

Probabilidade

Prof. Lori Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
<http://www.mat.ufrgs.br/~viali/>

4/4



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



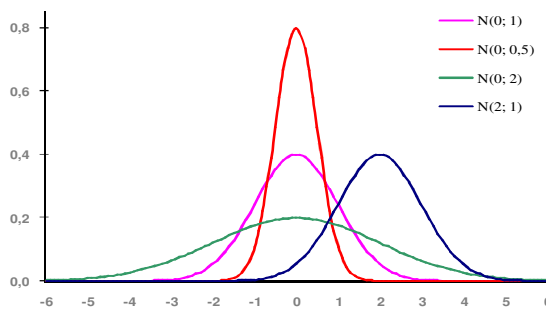
A distribuição normal

Uma variável aleatória X tem uma distribuição **normal** se sua fdp for do tipo:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathfrak{R}$$

com $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$

Representação gráfica



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Cálculo de probabilidades

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du = ?$$

A normal não é integrável por meio do TFC, isto é, não existe uma $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Solução:

Utilizar integração numérica. Como não é possível fazer isto com todas as curvas, escolheu-se uma para ser tabelada (integrada numericamente).



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



A normal padrão

A curva escolhida é a $N(0, 1)$, isto é, com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

Se X é uma $N(\mu, \sigma)$, então:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Será uma $N(0; 1)$.



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



A fdp da variável Z é dada por:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad z \in \mathfrak{R}$$

uma vez que $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.



A distribuição N(0, 1)

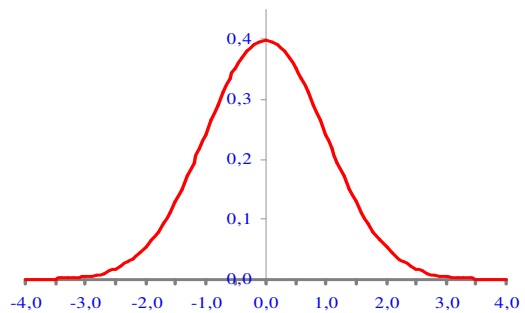


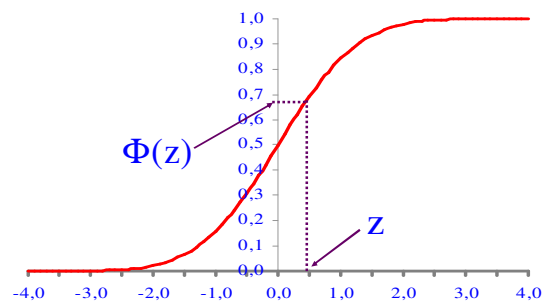
Tabela:

O que é tabelado é a FDA da variável Z, isto é:

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= \int_{-\infty}^z \varphi(u) du = \\ &= \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(z) \end{aligned}$$



A FDA da N(0; 1)



Uso da tabela

Área à esquerda (abaixo) de “z”

$$P(Z \leq z) = \Phi(z) = \text{Leitura direta}$$

Área à direita (acima) de “z”

$$P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$$

Área entre dois valores de “z”

$$P(z_1 < Z < z_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$



A tabela é construída como uma matriz. As linhas fornecem a unidade ou unidade mais décimo e as colunas fornecem os centésimos.

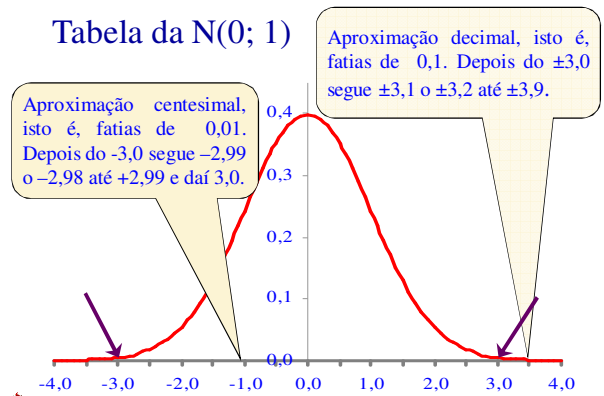
Assim para ler, por exemplo, -0,15 deve-se procurar na linha do -0,1 + coluna do 5 (sexta coluna). A primeira é a do “0” (zero).



A aproximação é centesimal (2 casas após a vírgula) exceto nas linhas -3 e $+3$, que estão destacadas, onde a aproximação é, em virtude da pouca área, **decimal**. Observe que está escrito -3 e não $-3,0$!



Tabela da $N(0; 1)$



z	0	1	2	3
-3	0,0013	0,0018	0,0007	0,0005
-2,9	0,0019	$P(Z < -3,3)$ $= \Phi(-3,3)$	0,0018	0,0017
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032
-2,6	0,0047	0,0046	0,0044	0,0043
-2,5	0,0062	$P(Z < -2,53)$ $= F(-2,53)$	0,0059	0,0057
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099
-2,2	0,0139	0,0136	$P(Z < -2,00)$ $= F(-2,00)$	0,0099
-2,1	0,0179	0,0174	0,0171	0,0166
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212



Exemplo:

Uma VAC tem distribuição normal de média 50 e desvio padrão 8. Determinar:

- (a) $P(X \leq 40)$
- (b) $P(X > 65)$
- (c) $P(45 < X < 62)$

(a) $P(X \leq 40)$

$$P(X \leq 40) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{40 - 50}{8}\right) = P(Z \leq -1,25) = 10,56\%$$

(b) $P(X > 65)$

$$P(X > 65) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{65 - 50}{8}\right) = P(Z > 1,88) = 1 - P(Z < 1,88) = 1 - \Phi(1,88) = \Phi(-1,88) = 3,01\%$$



$$(c) P(45 < X < 62)$$

$$\begin{aligned} P(45 < X < 62) &= \\ &= P\left(\frac{45 - 50}{8} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{62 - 50}{8}\right) \\ &= P(-0,62 < Z < 1,50) = \\ &= \Phi(1,50) - \Phi(-0,62) = \\ &= 93,32\% - 27,67\% = 65,65\% \end{aligned}$$



A função inversa:

Uma VAC tem distribuição normal de média 50 e desvio padrão 8.

Determinar:

(a) $P(X \leq x) = 5\%$

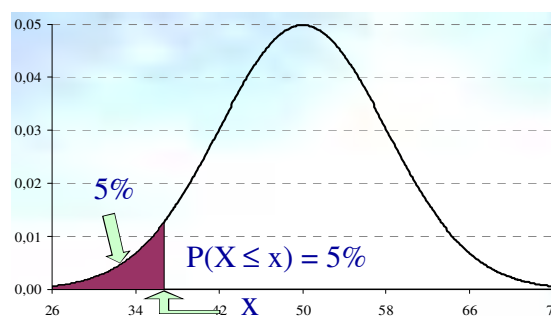
(b) $P(X > x) = 1\%$



Para resolver este tipo de exercício é preciso utilizar a função inversa, isto pode ser feito direto na tabela. Só que agora devemos procurar uma probabilidade (corpo da tabela) e obter um valor de “z” (lateral da tabela).



Graficamente



Em (a) temos $P(X \leq x) = 5\%$

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - 50}{8}\right) = \\ &= P(Z \leq z) = \Phi(z) = 5\% \\ \text{onde } z &= \frac{x - 50}{8} \end{aligned}$$



Se $\Phi(z) = 5\%$, então

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}[\Phi(z)] &= \Phi^{-1}(5\%) \\ z &= \Phi^{-1}(0,05) \end{aligned}$$

Procurando na tabela, o valor (z) mais próximo de $5\% = 0,05$, tem-se:



z	0	1	2	3	4	5
-3	0,0013	0,0010	0,0007	0,0005	0,0003	0,0002
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0100	0,0098	0,0096
-2,2	0,0139	0,0136	0,0134	0,0132	0,0129	0,0127
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0167	0,0162	0,0158
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606

Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Como os dois valores estão a mesma distância, isto é, apresentam o mesmo erro (0,0005), pega-se a média entre eles.

Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Assim

$$z = \frac{1,64 + 1,65}{2} = 1,645$$

Como $z = \frac{x-50}{8}$, tem-se:

$$-1,645 = z = \frac{x-50}{8} \Rightarrow$$

$$x = 50 - 1,645 \cdot 8 = 36,84$$

Em (b) temos $P(X > x) = 1\%$

$$P(X > x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{x-50}{8}\right) =$$

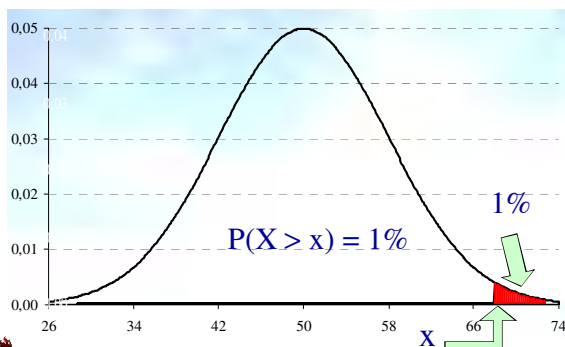
$$= P(Z > z) = 1 - \Phi(z) = 1\% = 0,01$$

Mas $1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$

Logo $-z = \Phi^{-1}(0,01)$

Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Procurando na tabela, o valor (z) mais próximo de $1\% = 0,01$, tem-se:
 $z = -2,33$

Conforme pode ser visto na próxima lâmina!

Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

z	0	1	2	3
-3	0,0013	0,0010	0,0007	0,0005
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Como

$-z = \Phi^{-1}(0,01)$, tem-se :

$$-(-2,33) = \frac{x - 50}{8} \Rightarrow$$

$$x = 2,33 \cdot 8 + 50 = 68,64$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Aproximação da Binomial pela Normal:

É possível se estabelecer aproximações entre as variáveis discretas: Binomial, Hipergeométrica e Poisson conforme visto.

É, também, possível aproximar uma variável discreta (a Binomial) por uma contínua (a Normal).

$$P(X = x) \cong P(x - 0,5 \leq Y \leq x + 0,5)$$

$$P(x_1 < X < x_2) \cong P(x_1 + 0,5 \leq Y \leq x_2 - 0,5)$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) \cong P(x_1 - 0,5 \leq Y \leq x_2 + 0,5)$$

Onde Y é uma normal de média $\mu = np$ e desvio variância $\sigma^2 = npq$



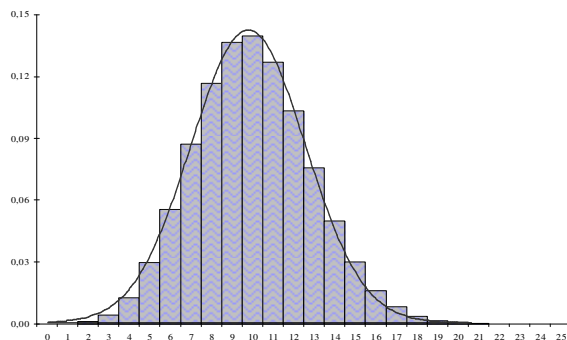
Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Graficamente



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Exemplo:

Determinar a probabilidade de que em 120 lançamentos de um dado honesto se obtenha face seis:

- (a) Exatamente 20 vezes.
- (b) Mais do que 25 vezes.



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Tem-se:

X = número de faces seis em 120 lançamentos.

$$n = 120$$

$$p = 1/6$$

$$X \sim B(120; 1/6)$$



Então:

$$(a) P(X = 20) = \binom{120}{20} \left(\frac{1}{6}\right)^{20} \left(\frac{5}{6}\right)^{100} = 9,73\%$$

$$(b) P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) = \\ = 1 - \sum_{x=0}^{30} \binom{120}{x} \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{120-x} = 0,71\%$$



Aproximado pela normal, tem-se:

Y = número de faces seis em 120 lançamentos, será aproximadamente uma normal:

$$\mu_Y = 120 \cdot (1/6) = 20 \text{ e}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{120 \cdot (1/6) \cdot (5/6)} = 4,0825$$



$$(a) P(X = 20) = P(19,5 < Y < 20,5) = \\ = P(-0,12 < Z < 0,12) = \\ = \Phi(0,12) - \Phi(-0,12) = 9,75\%$$

$$(b) P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) = \\ = 1 - P(Y \leq 30,5) = 1 - P(Z \leq 2,57) = \\ = \Phi(-2,57) = 0,51\%$$

