

Probabilidade

Prof. Lori Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
<http://www.mat.ufrgs.br/~viali/>

3/4



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Variável Aleatória Contínua

Seja X uma variável aleatória com conjunto de valores $X(S)$. Se o conjunto de valores for **infinito não enumerável** então a variável é dita **contínua**.

A Função Densidade de Probabilidade

É a função que associa a cada $x \in X(S)$ um número $f(x)$ que deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int f(x)dx = 1$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



A Distribuição de Probabilidade

A coleção dos pares $(x, f(x))$ é denominada de **distribuição de probabilidade** da VAC X .

Exemplo

Seja X uma VAC. Determine o valor de “ c ” para que $f(x)$ seja uma função densidade de probabilidade (fdp).

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Para determinar o valor de “c”, devemos igualar a área total a **um**, isto é, devemos fazer:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 1$$

$$\int_{-1}^1 c \cdot x^2 dx = 1$$

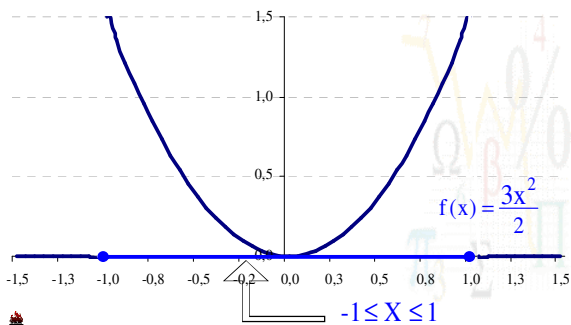


Tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 c \cdot x^2 dx &= c \int_{-1}^1 x^2 dx = \\ &= c \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = c \left[\frac{1^3}{3} - \frac{-1^3}{3} \right] = \\ &= \frac{2}{3} c = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

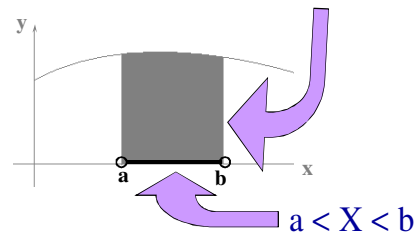


Representação Gráfica



Cálculo da Probabilidade

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$



$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Isto é, a probabilidade de que X assumira valores entre os números “a” e “b” é a área sob o gráfico de f(x) entre os pontos $x = a$ e $x = b$.



Observações:

Se X é uma VAC, então:

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \leq X < b) \\ &= P(a < X \leq b) \\ &= P(a \leq X \leq b). \end{aligned}$$



Exemplo

Seja X uma VAC. Determine a probabilidade de X assumir valores no intervalo $[-0,5; 0,5]$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{2} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



A probabilidade solicitada é dada por:

$$\begin{aligned} P(-0,5 < X < 0,5) &= \int_{-0,5}^{0,5} \frac{3x^2}{2} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int_{-0,5}^{0,5} x^2 dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-0,5}^{0,5} \\ &= \frac{1}{2} [(0,5)^3 - (-0,5)^3] \\ &= 12,50\% \end{aligned}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Momentos

Se X é um VAC então o k -ésimo momento de X é dado por:

$$\mu_k = E(X^k) = \int x^k f(x) dx$$

e o k -ésimo momento central de X é

$$\text{obtido por: } \mu'_k = E(X^k) = \int (x-\mu)^k f(x) dx$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Considerando que o momento de ordem “ k ” de X é $E(X^k) = \mu_k$, pode-se expressar a expectância e as demais medidas em função desse resultado. Tem-se, então:



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



VAC – Caracterização

(a) Expectância, valor esperado

$$\mu = E(X) = \int x f(x) dx$$

(b) Variância

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= V(X) = \int (x-\mu)^2 f(x) dx = \\ &= \int x^2 f(x) dx - (\int x f(x) dx)^2 = \\ &= \int x^2 f(x) dx - \mu^2 = E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



(iii) Desvio Padrão

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\int (x-\mu)^2 f(x) dx} = \\ &= \sqrt{\int x^2 f(x) dx - \mu^2} = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2} \end{aligned}$$

(iv) O Coeficiente de Variação

$$\gamma = \sigma/\mu$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



(c) Assimetria

$$\gamma_1 = [\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3]/\sigma^3$$

(d) Curtose

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= E[(X - \mu)^4]/\sigma^4 - 3 = \\ &= [\mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_1^2\mu_2 - 3\mu_1^4]/\sigma^4 - 3\end{aligned}$$



Exemplo

Determinar a expectância e o desvio padrão da variável X dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{2} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$



$$\begin{aligned}\mu &= E(X) = \int_{-1}^1 x \cdot f(x) dx = \\ &= \int_{-1}^1 x \cdot \frac{3x^2}{2} dx = \int_{-1}^1 \frac{3x^3}{2} dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{1^4}{4} - \frac{-1^4}{4} \right] = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right] = 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{E(X^2) - E(X)^2} \\ E(X^2) &= \int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{3x^2}{2} dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 x^4 dx = \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{3}{2} \left[\frac{1^5}{5} - \frac{-1^5}{5} \right] = \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right] = \frac{3}{5} = 0,60\end{aligned}$$



O desvio padrão de X será, então:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{E(X^2) - E(X)^2} = \\ &= \sqrt{0,60 - 0} = 0,77\end{aligned}$$



A Função de Distribuição

É a função F(x) definida por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

A F(x) é a integral da f(x) até um ponto genérico “x”.



Exemplo

Considerando a função abaixo como a fdp de uma VAC X , determinar a $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{2} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



A $F(x)$ é uma função definida em todo o intervalo real da seguinte forma:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -1 \\ \int_{-1}^x \frac{3u^2}{2} du & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Vamos determinar o valor da integral em “u”:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{3u^2}{2} du = \frac{3}{2} \int_{-1}^x u^2 du = \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{u^3}{3} \right]_{-1}^x = \frac{1}{2} [u^3]_{-1}^x = \frac{x^3 + 1}{2} \end{aligned}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Assim a Função de Distribuição Acumulada (FDA) é:

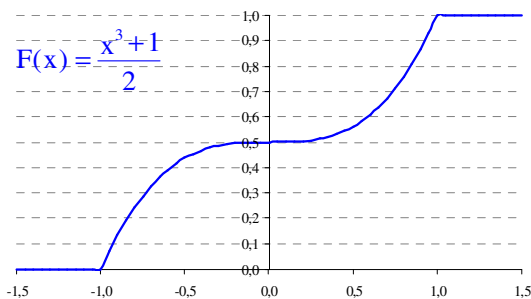
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -1 \\ \frac{x^3 + 1}{2} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Representação Gráfica



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Cálculo de Probabilidade com a FDA

O uso da FDA é bastante prático no cálculo das probabilidades, pois não é necessário integrar, já que ela é uma função Integral.



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Usando a FDA, teremos sempre três casos possíveis:

$$P(X \leq x) = F(x)$$

$$P(X > x) = 1 - F(x)$$

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Observação:

Se X é uma VAC então o momento de ordem “ k ” é dado por:

$$E(X^k) = \int x^k f(x) dx$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Modelos Probabilísticos Contínuos

- Uniforme
- Exponencial
- Normal



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Uniforme

Uma VAC X é uniforme no intervalo $[a; b]$ se assume todos os valores com igual probabilidade. Isto é, se $f(x)$ for:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Exemplo

Seja X uma VAC com distribuição uniforme no intervalo $[2; 6]$, isto é, $X \sim U(2; 6)$. Então a fdp é dada por:

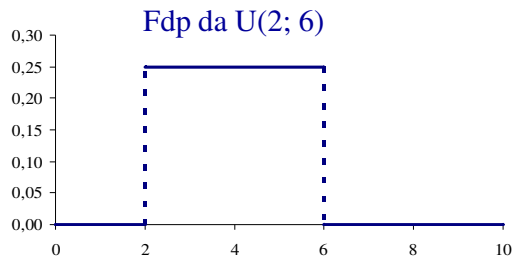
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6-2} = \frac{1}{4} & \text{se } 2 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Representação Gráfica



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



A Função de Distribuição

A função $F(x)$ é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Exemplo

Seja X uma uniforme no intervalo $[2; 6]$, então a FDA de X é dada por:

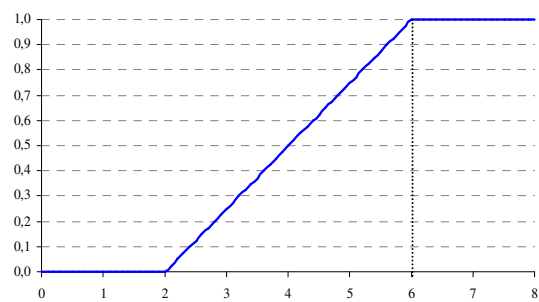
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 2 \\ \frac{x-2}{4} & \text{se } 2 \leq x \leq 6 \\ 1 & \text{se } x > 6 \end{cases}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Representação Gráfica da U(2; 6)



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Expectância ou Valor Esperado

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \\ &= \frac{(b-a) \cdot (b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Variância

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} \end{aligned}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



A variância será então:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{4} = \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}\end{aligned}$$



Assimetria

$$\gamma_1 = 0$$

Curtose

$$\gamma_2 = -6/5$$



Exponencial

Uma variável aleatória T tem uma distribuição **exponencial** se sua fdp for do tipo:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Exemplo

O tempo de trabalho sem falhas de um equipamento (em horas) é dado pela função, abaixo. Determinar a probabilidade de que o equipamento não falhe durante as primeiras 50 horas.

$$f(t) = \begin{cases} 0,01e^{-0,01t} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

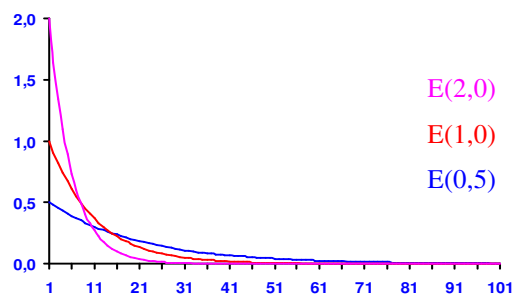


A probabilidade solicitada é dada pela integral da função no intervalo $T < 50$, isto é:

$$\begin{aligned}P(T < 50) &= \int_0^{50} 0,01e^{-0,01t} dt = \\ &= 0,01 \cdot \int_0^{50} e^{-0,01t} dt = 0,01 \cdot \left[\frac{e^{-0,01t}}{-0,01} \right]_0^{50} = \\ &= 1 - e^{-0,5} = 39,35\%\end{aligned}$$



Representação gráfica



A função de distribuição

A função $F(t)$ é dada por:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Obs.: Tente determinar!



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Exemplo

O tempo de trabalho sem falha de um equipamento (em horas) é uma exponencial de parâmetro $\lambda = 0,01$. Determine a probabilidade de ele funcionar sem falhas por pelo menos 50 horas.



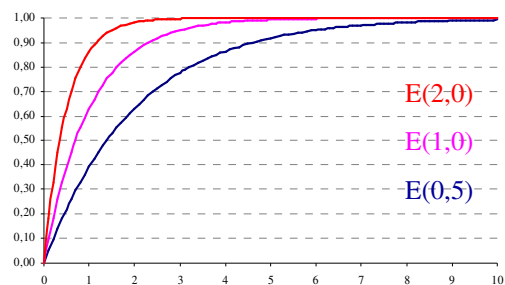
Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Representação gráfica



A FDA para esta fdp é dada por:

$$F(t) = 1 - e^{-0,01t}$$

A probabilidade solicitada é dada por:

$$\begin{aligned} P(T \leq 50) &= F(50) = 1 - e^{-0,01 \cdot 50} = \\ &= 1 - e^{-0,5} = 39,35\% \end{aligned}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Expectância ou valor esperado

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = \\ &= [-te^{-\lambda t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \\ &= \left[-te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Obs.: Foi utilizado integração por partes.

Variância

$$\sigma^2 = V(T) = E(T^2) - E(T)^2$$

$$\begin{aligned} E(T^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} t^2 \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = \\ &= [-t^2 e^{-\lambda t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2te^{-\lambda t} dt = \\ &= \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

A variância será então:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= V(T) = E(T^2) - E(T)^2 = \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Exercício

Seja T uma VAC com distribuição exponencial de parâmetro λ . Determinar o valor mediano da distribuição.



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Solução:

Conforme visto a mediana é o valor que divide a distribuição de forma que:

$$P(T < me) = P(T > me) = 50\%.$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Tem-se $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Então : $P(T < me) = F(me) =$

$$1 - e^{-\lambda me} = 0,5 \Rightarrow 1 - e^{-\lambda me} = 0,5$$

$$e^{-\lambda me} = 0,5 \Rightarrow -\lambda me = \ln(0,5)$$

$$\text{Assim } me = -\frac{\ln(0,5)}{\lambda} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Assimetria

$$\gamma_1 = 2$$

Curtose

$$\gamma_2 = 6$$



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

