Probabilidade

Prof. Lorí Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
http://www.mat.ufrgs.br/~viali/

1/4

Tipos de Modelo

Sistema Real → M o d e l o → Determinístico

M o d e l o → Probabilístico

Modelo determinístico

Causas → **Efeito**

Exemplos

Gravitação → $F = GM_1M_2/r^2$

Aceleração clássica → $v = at$

Aceleração relativística → $v = \dfrac{at}{\sqrt{1 + \dfrac{a^2t^2}{c^2}}}$

Modelo probabilístico

~~Causas~~ → Efeito

Exemplos

Binomial → $f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x}.p^x.(1-p)^{n-x} & x \in \{0, 1, \ldots, n\} \\ 0 & c.c. \end{cases}$

Poisson → $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x.e^{-\lambda}}{x!} & x \in \mathbb{N} \\ 0 & c.c. \end{cases}$

Normal → $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \Re$

Experimento Aleatório

Experiência para o qual o modelo probabilístico é adequado.

Características

❶ Não é possível prever um resultado particular, mas pode-se enumerar todos os possíveis;

❷ Podem ser repetidos inúmeras vezes sob as mesmas condições;

❸ Quando repetidos um grande número de vezes apresentam regularidade em termos de freqüências.

Exemplos

E_1: Joga-se um dado e observa-se o número da face superior.

E_2: Joga-se uma moeda quatro vezes e observa-se o número de caras e coroas;

E_3: Joga-se uma moeda quatro vezes e observa-se a seqüência de caras e coroas;

E_4: Uma lâmpada nova é ligada e conta-se o tempo gasto até queimar;

E_5: Joga-se uma moeda até que uma cara seja obtida. Conta-se o número de lançamentos necessários;

E_6: Uma carta de um baralho comum de 52 cartas é retirada e seu naipe registrado;

E_7: Jogam-se dois dados e observa-se o par de valores obtido;

Espaço amostra(l)

É o conjunto de resultados de uma experiência aleatória.

Exemplos

$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

S_3 = { cccc, ccck, cckc, ckcc, kccc, cckk, kkcc, ckkc, kcck, ckck, kckc, kkkc, kkck, kckk, ckkk, kkkk}

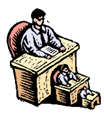
$S_4 = \{ t \in R \,/\, t \geq 0 \}$

$S_5 = \{1, 2, 3, \ldots\}$

S_6 = {♦, ♠, ♣, ♥}

S_7 = { (1, 1), (1, 2),(1,3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) }

Eventos



Um evento é um subconjunto de um espaço amostra.

Exemplo

Se S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } é um espaço amostra, então são eventos:

A = { 1, 3, 5}   B = { 6 }

C = { 4, 5, 6}   D = ∅   E = S

Ocorrência de um evento

Seja E um experimento com espaço amostra associado S. Diremos que o evento A ocorre se realizado E o resultado é um elemento de A.

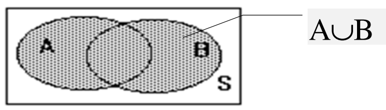
Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Combinação de eventos

Se A e B são eventos de um mesmo espaço amostra S. Diremos que ocorre o evento:

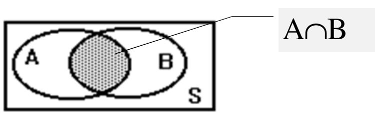
Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A união B, A soma B ou A mais B, se e só se A ocorre ou B ocorre.



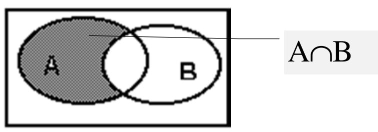
Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A produto B, A vezes B ou A interseção B, se e só se A ocorre e B ocorre.



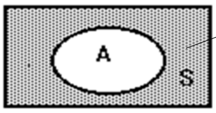
Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A menos B, A diferença B, se e só se A ocorre e B não ocorre.



Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

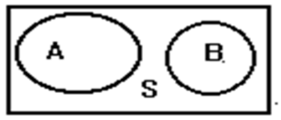
Complementar de A (não A) se e só se A não ocorre.



$A' = A^C = \overline{A}$

Eventos mutuamente excludentes (exclusivos)

Dois eventos A e B são mutuamente excludentes se não puderem ocorrer juntos.



Propriedades das operações entre eventos

Leis Comutativas

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Leis Associativas

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Leis Distributivas

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Leis de De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Outras Propriedades

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cap \overline{B} = A - B$$

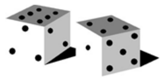
$$\overline{A} \cap B = B - A$$

Conceitos de probabilidade

- ♣ CLÁSSICO
- ♥ FREQÜENCIAL
- ♠ AXIOMÁTICO

Clássico

$$P(A) = \frac{\text{(número de casos favoráveis)}}{\text{(número de casos possíveis)}}$$



Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplo:

Qual a probabilidade de ganhar na Loto Fácil?

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Solução:

Casos favoráveis = 1

Casos possíveis:

$$\binom{25}{15} = 3268760$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

P(Loto Fácil) =

$$= \frac{\text{Número de favoráveis}}{\text{Número de possíveis}} = $$

$$= \frac{1}{\binom{25}{15}} = $$

$$= \frac{1}{3268760} = 0{,}000031\%$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Frequência relativa de um evento

$$fr_A = \frac{\text{(número de vezes que A ocorre)}}{\text{(número de vezes que E é repetido)}}$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplo:

Um dado é lançado 120 vezes e apresenta "FACE SEIS" 18 vezes.

Então, a freqüência relativa de "**face seis**" é:

$$fr_6 = $$

$$= \frac{\text{número de vezes que "f\_seis" ocorre}}{\text{número de vezes que o dado é jogado}}$$

$$= \frac{18}{120} = 0{,}15 = 15\%.$$

Conceito frequencial de probabilidade

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} fr_A$$

Conceito axiomático

P(A) é um número real que deve satisfazer as seguintes propriedades:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(S) = 1$

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

se $A \cap B = \varnothing$

Consequências dos axiomas (Teoremas)

(1) $P(\varnothing) = 0$

(2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

(3) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(5) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$

$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$

$+ P(A \cap B \cap C)$

Probabilidade condicionada

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Motivação

Considere uma urna com 50 fichas, onde 40 são pretas e 10 são brancas.

Suponha que desta urna são retiradas "duas" fichas, ao acaso e **sem** reposição:

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Sejam os eventos:

A = {a primeira ficha é branca}

B = {a segunda ficha é branca}

Então:

$P(A) = 10/50 = 0,20 = 20\%$

$P(B) = ?/49$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Neste caso, não se pode avaliar P(B), pois para isso é necessário saber se A ocorreu ou não, isto é, se saiu ficha branca na primeira retirada.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Se for informado que A ocorreu, então a probabilidade de B, será:

$P(B|A) = 9/49 = 0,1837 = 18,37\%.$

Observe a notação.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Esta representação é lida:

P de B dado A;

P de B dado que A ocorreu;

P de B condicionada a A.

Definição:

$$P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B)$$

Mas:

Se $P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B)$ então:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B).P(B)$$

E também:

Se $P(B \mid A) = P(A \cap B) / P(A)$ então:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B \mid A)$$

Assim:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = P(A|B).P(B)$$

Esse resultado é conhecido como teorema da multiplicação.

Independência

Dois eventos A e B são ditos independentes se a probabilidade de um ocorrer não altera a probabilidade do outro ocorrer, isto é:

Se:

(1) $P(A \mid B) = P(A)$ ou

(2) $P(B \mid A) = P(B)$ ou ainda

(3) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Independência (em geral)

Diremos que os eventos A_1, A_2, ..., A_n são independentes só se:

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Para provar que dois eventos são independentes basta verificar **uma** situação, para três **quatro** situações e para n eventos deve-se verificar **2^n – n – 1** situações.

Independência em pares

Dados os eventos A_1, A_2, ..., A_n eles são independentes aos pares se e só se:

$P(A_i \cap A_j) = P(A_i).P(A_j)$ para quaisquer

$i, j = 1, 2, ..., n$.

Ser independente aos pares não significa ser independente.

Considere o seguinte espaço amostra:

$S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ tal que $P(\{a_i\}) = ¼$.

Sejam A $\{a_1, a_3\}$, B = $\{a_3, a_4\}$ e C = $\{a_2, a_3\}$.

Então: P(A) = P(B) = P(C) = 1/2.

Assim P(AB) = P(AC) = P(BC) = ¼ = $(1/2)^2$

Mas P(ABC) = $P(\{a_3\})$ = ¼ ≠ $(1/2)^3$

Partição de um espaço amostra

Diz-se que os conjuntos:

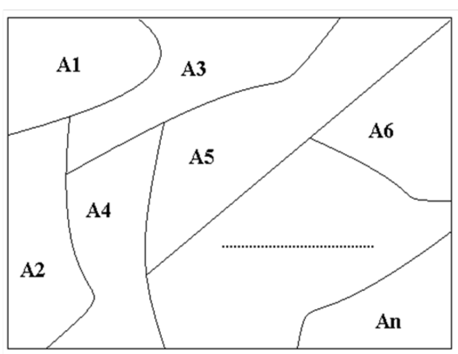
A_1, A_2, ..., A_n

eventos de um mesmo espaço amostra S, formam uma partição deste espaço se:

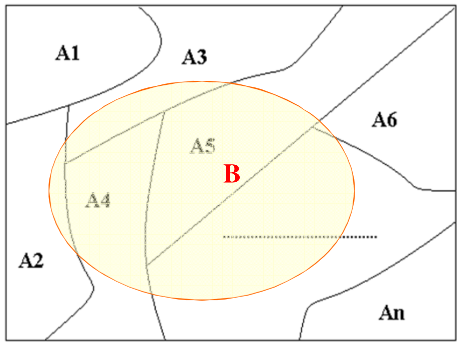
(1) $A_i \cap A_j = \varnothing$, para todo $i \neq j$

(2) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = S$

(3) $P(A_i) > 0$, para todo i



Teorema da probabilidade total

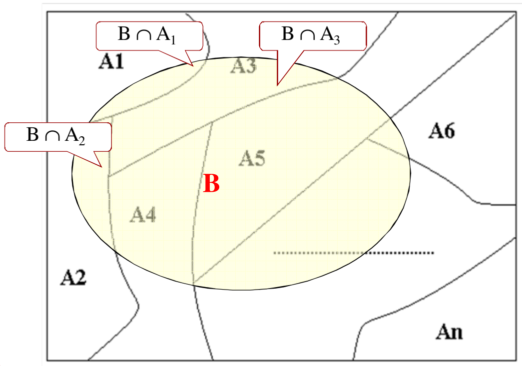


Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

B pode ser escrito como:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

P(B) será então:

$$P(B) = P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_1) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)]$$

$$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n) =$$

$$= \sum P(B \cap A_i)$$

$$= \sum P(A_i).P(B/A_i)$$

Assim: $P(B) = \sum P(A_i).P(B/A_i)$

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplo:

Uma peça é fabricada por três máquinas diferentes. A máquina “A” participa com 20% da produção, a “B” com 30% e a “C” com 50%.

Prof. Lori Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Das peças produzidas por “A”, 5% são defeituosas, das de “B” 3% e das de “C” 1%.

Selecionada uma peça ao acaso da produção global qual a probabilidade de ela ser defeituosa.

Solução:

Tem-se:

$P(A) = 20\%$ $\quad P(D|A) = 5\%$

$P(B) = 30\%$ $\quad P(D|B) = 3\%$

$P(C) = 50\%$ $\quad P(D|C) = 1\%$

$$P(D) = \sum P(A_i).P(D|A_i)$$

Então:

$P(D) =$

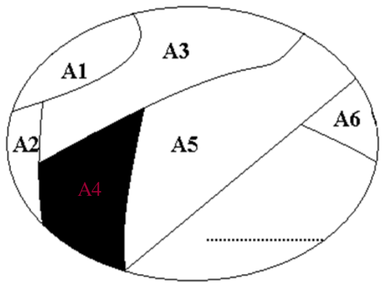
$= P(A).P(D|A) + P(B).P(D|B) + P(C).P(D|C) =$

$= 0,20.0,05 + 0,30.0,03 + 0,50.0,01 =$

$= 0,01 + 0,009 + 0,005 =$

$= 0,024 = 2,40\ \%$

Teorema de Bayes



Calcula a probabilidade de ocorrência de um dos “A_i” (que formam a partição) dado que ocorreu um evento qualquer “B”.

Aplicando a expressão da probabilidade condicionada vem:

$P(A_i \mid B) =$

$= P(A_i \cap B)/ P(B) =$

$= P(A_i).P(B \mid A_i)/ P(B)$

Na expressão:

$P(A_i \mid B) = P(A_i).P(B \mid A_i) / P(B)$

o valor de P(B) (denominador) é obtido por meio do Teorema da Probabilidade Total.

Exemplo:

Considerando o exercício anterior, suponha que uma peça seja selecionada e se verifique que ela é defeituosa. Qual a probabilidade de ela ter sido produzida pela máquina A?

Solução:

Tem-se:

$P(A) = 20\%$ $\quad$ $P(D|A) = 5\%$

$P(B) = 30\%$ $\quad$ $P(D|B) = 3\%$

$P(C) = 50\%$ $\quad$ $P(D|C) = 1\%$

$P(D) = 2{,}40\%$

Então:

$$P(A \mid D) =$$

$$= \frac{P(A).P(D \mid A)}{P(A).P(D \mid A) + P(B).P(D \mid B) + P(C).P(D \mid C)} =$$

$$= \frac{0{,}20.0{,}05}{0{,}20.0{,}05 + 0{,}30.0{,}03 + 0{,}50.0{,}01} =$$

$$= \frac{0{,}01}{0{,}024} = 41{,}67\%$$

Revisão de Análise Combinatória

Fatorial!

$n! = n.(n - 1).(n - 2). \ldots .3.2.1$

Obs.: (i) $0! = 1$

(ii) $n! = n.(n - 1)!$

Princípio

Fundamental

da

Contagem

Suponha que se possa fazer "n" escolhas independentes com:

- m_1 maneiras de fazer a escolha 1,
- m_2 maneiras de fazer a escolha 2,
- ....,
- m_n maneiras de fazer a escolha n.

Então existem $m_1.m_2. \ldots .m_n$ maneiras diferentes de fazer a seqüência inteira de escolhas.

Exemplo:

Quantos números distintos de dois algarismos existem?

$m_1.m_2 = 9.9 = 81$

Permutações:

Uma permutação é uma das possíveis maneiras de arranjar, ou ordenar, um conjunto de objetos.

O número de permutações de "r" objetos distintos é dado por:

$P_r = r.(r - 1).(r - 2). \ldots . 3.2.1 = r!$

Exemplo:

Dado o conjunto { a, b, c, d }.

O número de permutações possíveis é:

$P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$

Arranjos

O número de arranjos de "n" objetos distintos, tomados "r" a cada vez, onde $r \leq n$, é dado por:

$A(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - r + 1)$

O número de arranjos pode ser expresso em função do fatorial da seguinte forma:

$A(n, r) = n! / (n - r)!$

Exemplo:

De um baralho de 52 cartas, 5 são retiradas sucessivamente e sem reposição. Quantas seqüências são possíveis?

$A(52, 5) = 52! / (52 - 5)! =$

$= 52.51.50.49.48 =$

$= 311\ 875\ 200.$

Observação:

A PERMUTAÇÃO é um caso particular do ARRANJO, quando n = r.

$A(n, r) = n! / (n - r)! =$

$= A(n, n) =$

$= n! / (n - n)! = n! / 0! = n!$

Arranjo completo

Se “r” elementos forem tomados de “n”, onde são permitidas as repetições, isto é, o mesmo elemento pode ocorrer mais de uma vez, então o número de arranjos é dado por: $AC = n^r$.

Exemplo:

De um baralho de 52 cartas, 5 são retiradas sucessivamente e <u>com</u> reposição. Quantas seqüências são possíveis?

$AC(52, 5) = 52^5 = 418\ 195\ 493.$

Combinações

O número de combinações, ou subconjuntos, de “n” objetos tomados em grupos de “r”, onde $r \leq n$ é dado por:

$C(n, r) = n! / r!(n - r)!$

Exemplo:

Quantos são os cartões diferentes no jogo da Mega Sena?

$C(n, r) = C(60, 6) =$

$= 60! / 6!(60 - 6)! =$

$= 50\ 063\ 860.$

Relação entre os três principais resultados

$A(n, r) = C(n, r).P_r$

Pois, $C(n, r).Pr =$

$= [n! / r!(n - r)!]. r! =$

$= n! / (n - r)!$

$= A(n, r)$