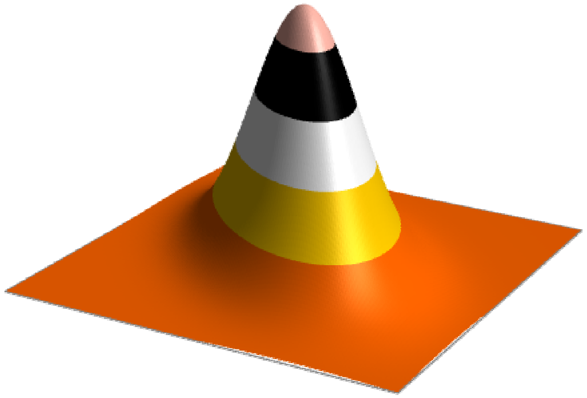


Probabilidade

Prof. Lorí Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
http://www.mat.ufrgs.br/~viali/

4/4

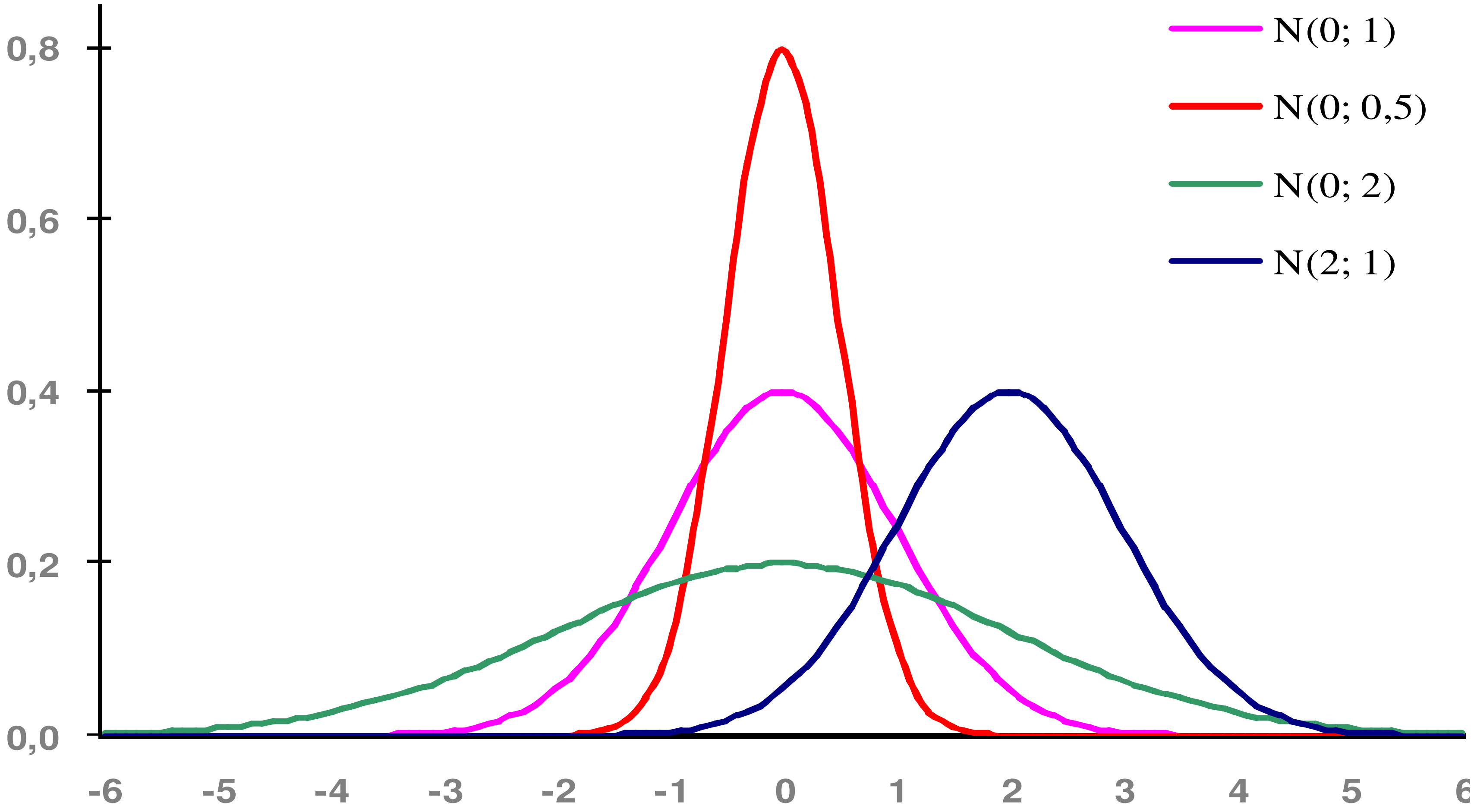
A distribuição normal

Uma variável aleatória X tem uma distribuição **normal** se sua fdp for do tipo:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \Re$$

com $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$

Representação gráfica



Cálculo de probabilidades

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{-\frac{1}{2}.\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du = ?$$

A normal não é integrável por meio do TFC, isto é, não existe uma F(x) tal que F'(x) = f(x).

Solução:

Utilizar integração numérica. Como não é possível fazer isto com todas as curvas, escolheu-se uma para ser tabelada (integrada numericamente).

A normal padrão

A curva escolhida é a N(0, 1), isto é, com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

Se X é uma N(μ, σ), então:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Será uma N(0; 1).

A fdp da variável Z é dada por:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{z^2}{2}}, \; z \in \Re$$

uma vez que $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

A distribuição N(0, 1)

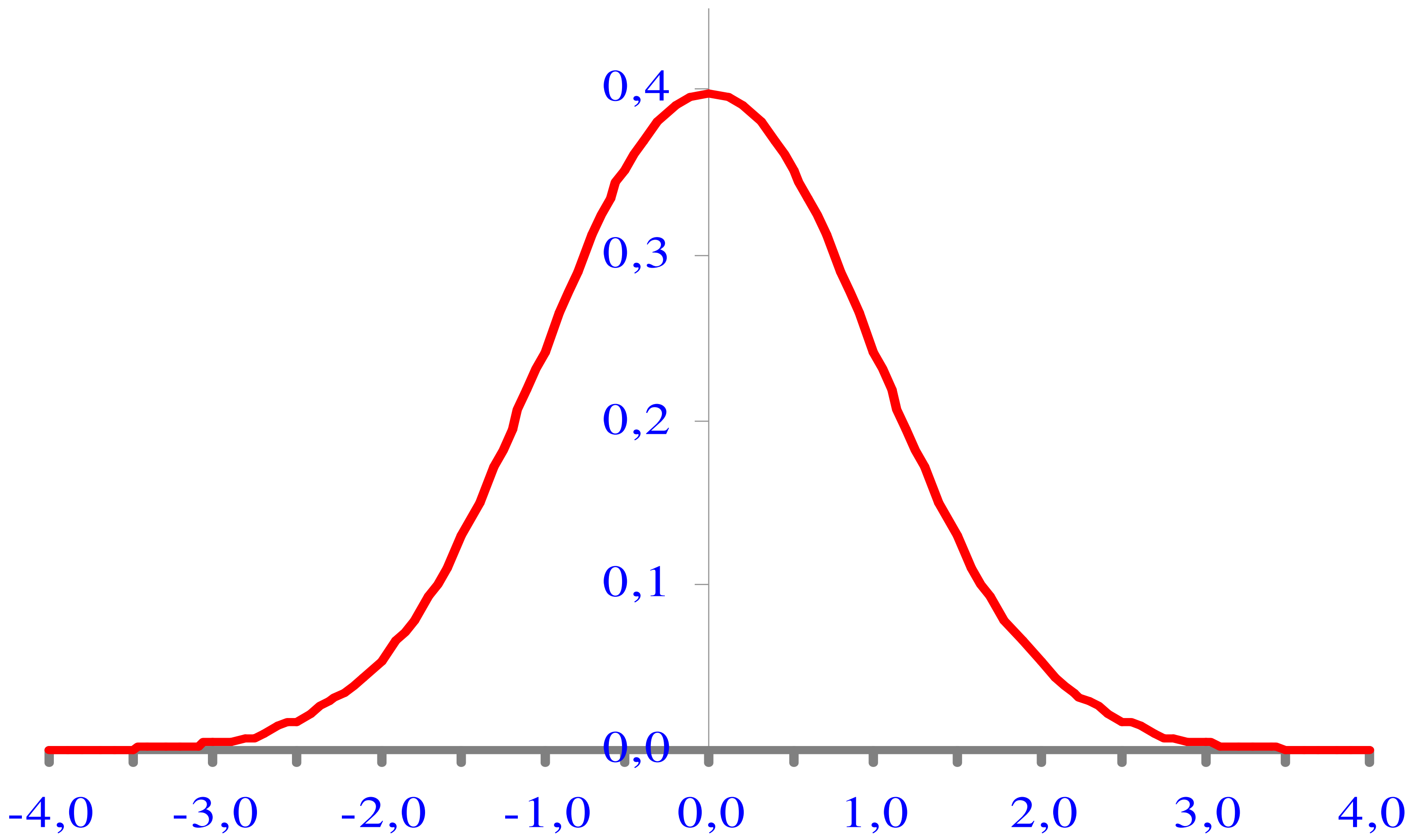


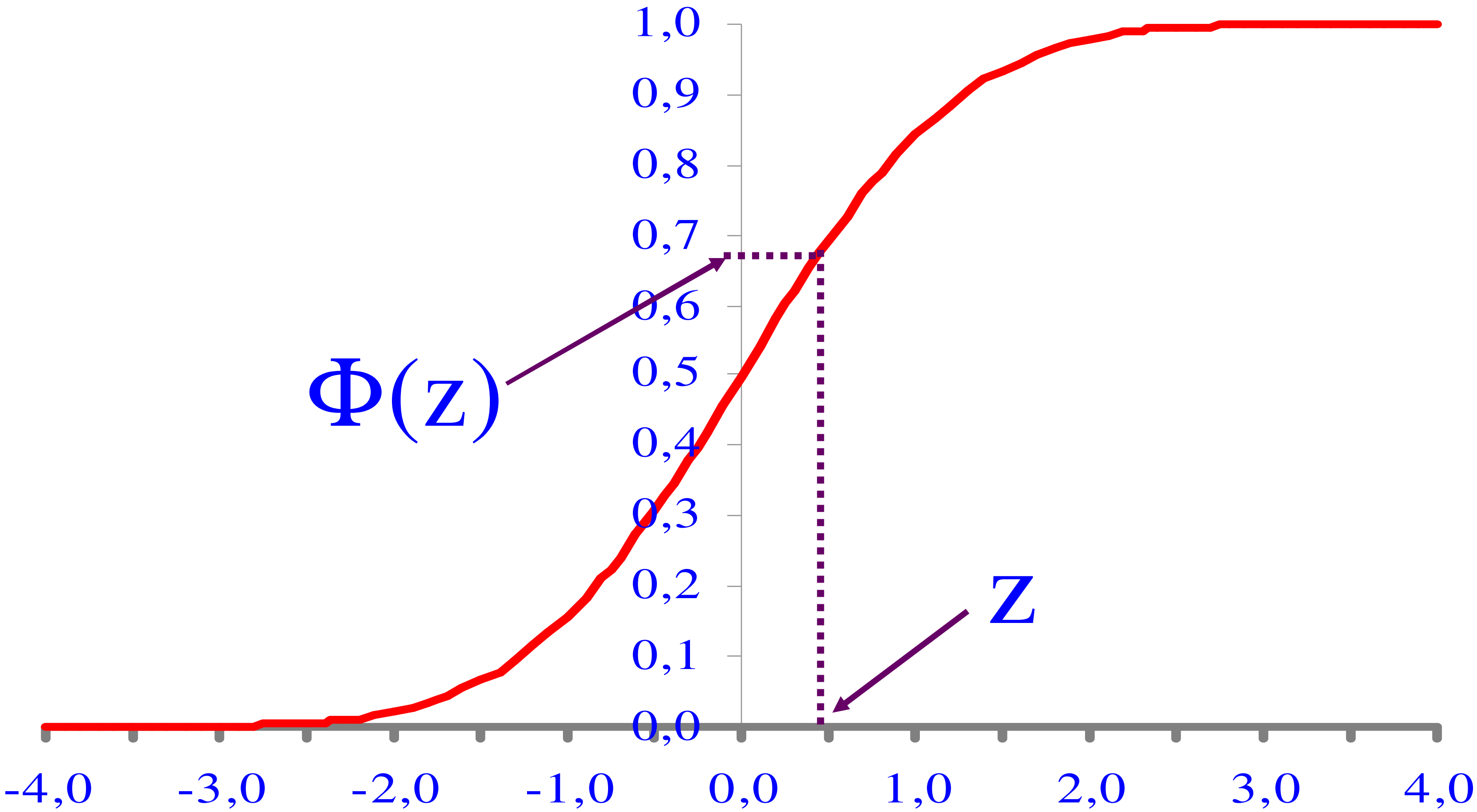
Tabela:

O que é tabelado é a FDA da variável Z, isto é:

$$P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(u)du =$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{u^2}{2}}.du = \Phi(z)$$

A FDA da N(0; 1)



Uso da tabela

Área à esquerda (abaixo) de “z”

$$P(Z \leq z) = \Phi(z) = \text{Leitura direta}$$

Área à direita (acima) de “z”

$$P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$$

Área entre dois valores de “z”

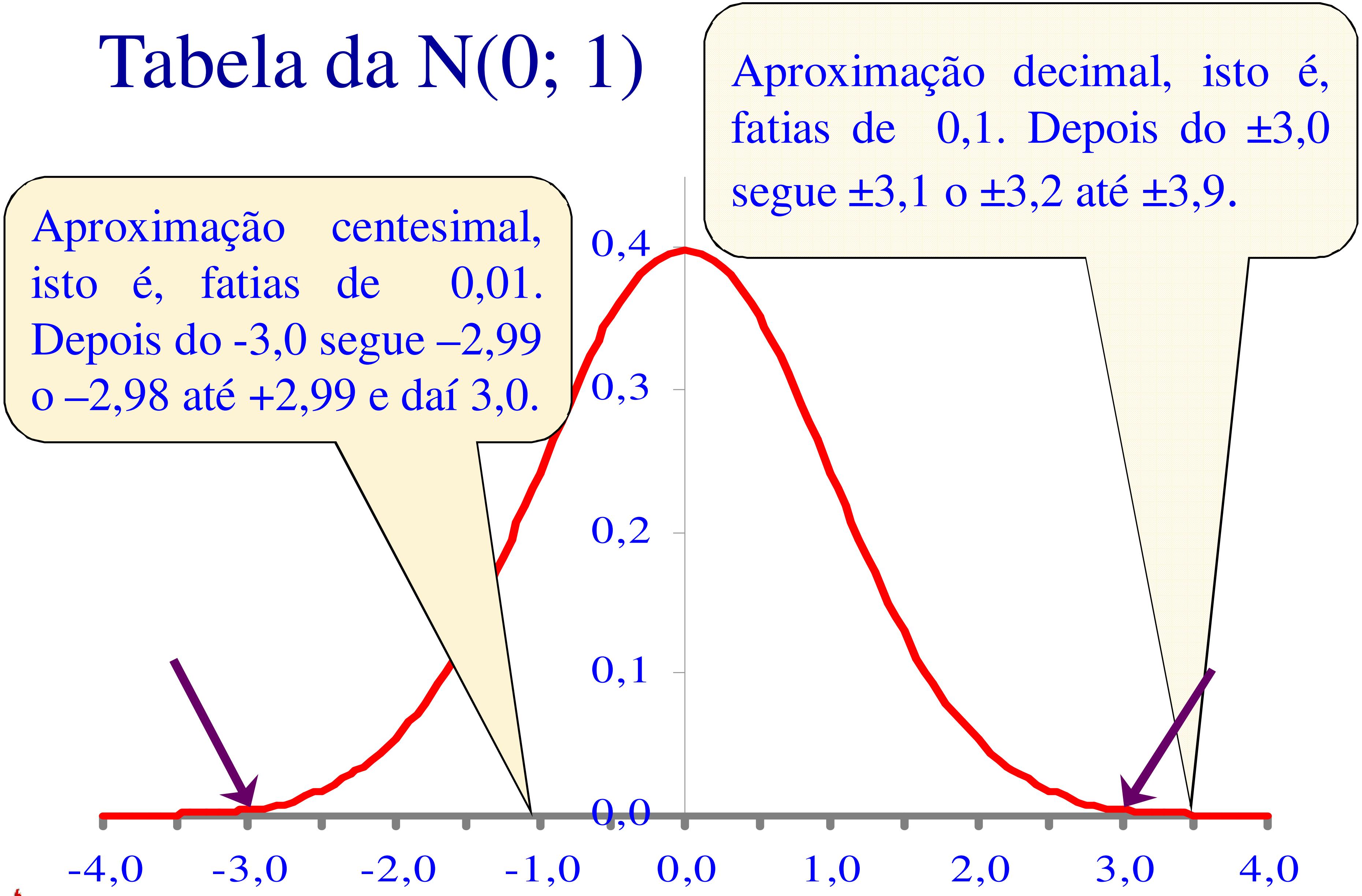
$$P(z_1 < Z < z_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$

A tabela é construída como uma matriz. As linhas fornecem a unidade ou unidade mais décimo e as colunas fornecem os centésimos.

Assim para ler, por exemplo, -0,15 deve-se procurar na linha do –0,1 + coluna do 5 (sexta coluna). A primeira é a do “0” (zero).

A aproximação é centesimal (2 casas após a vírgula) exceto nas linhas –3 e +3, que estão destacadas, onde a aproximação é, em virtude da pouca área, **decimal.** Observe que está escrito –3 e não –3,0!

Tabela da N(0; 1)



z	0	1	2	3
-3	0,0013	0,0010	0,0007	0,0005
-2,9	0,0019	[illegible]	0,0018	0,0017
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032
-2,6	0,0047	[illegible]	0,0044	0,0043
-2,5	0,0062	[illegible]	0,0059	0,0057
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099
-2,2	0,0139	0,0136	[illegible]	[illegible]
-2,1	0,0179	0,0174	[illegible]	0,0166
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212

P(Z < -3,3)
= Φ(-3,3)

P(Z < -2,53)
= F(-2,53)

P(Z < -2,00)
= F(-2,00)

Exemplo:

Uma VAC tem distribuição normal de média 50 e desvio padrão 8. Determinar:

(a) $P(X \leq 40)$

(b) $P(X > 65)$

(c) $P(45 < X < 62)$

(a) $P(X \leq 40)$

$$P(X \leq 40) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{40-50}{8}\right) =$$

$$= P(Z \leq -1{,}25) = 10{,}56\%$$

(b) $P(X > 65)$

$$P(X > 65) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{65 - 50}{8}\right) =$$

$$= P(Z > 1{,}88) = 1 - P(Z < 1{,}88) =$$

$$= 1 - \Phi(1{,}88) = \Phi(-1{,}88) = 3{,}01\%$$

(c) $P(45 < X < 62)$

$$P(45 < X < 62) =$$

$$= P\left(\frac{45-50}{8} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{62-50}{8}\right)$$

$$= P(-0,62 < Z < 1,50) =$$

$$= \Phi(1,50) - \Phi(-0,62) =$$

$$= 93,32\% - 27,67\% = 65,65\%$$

A função inversa:

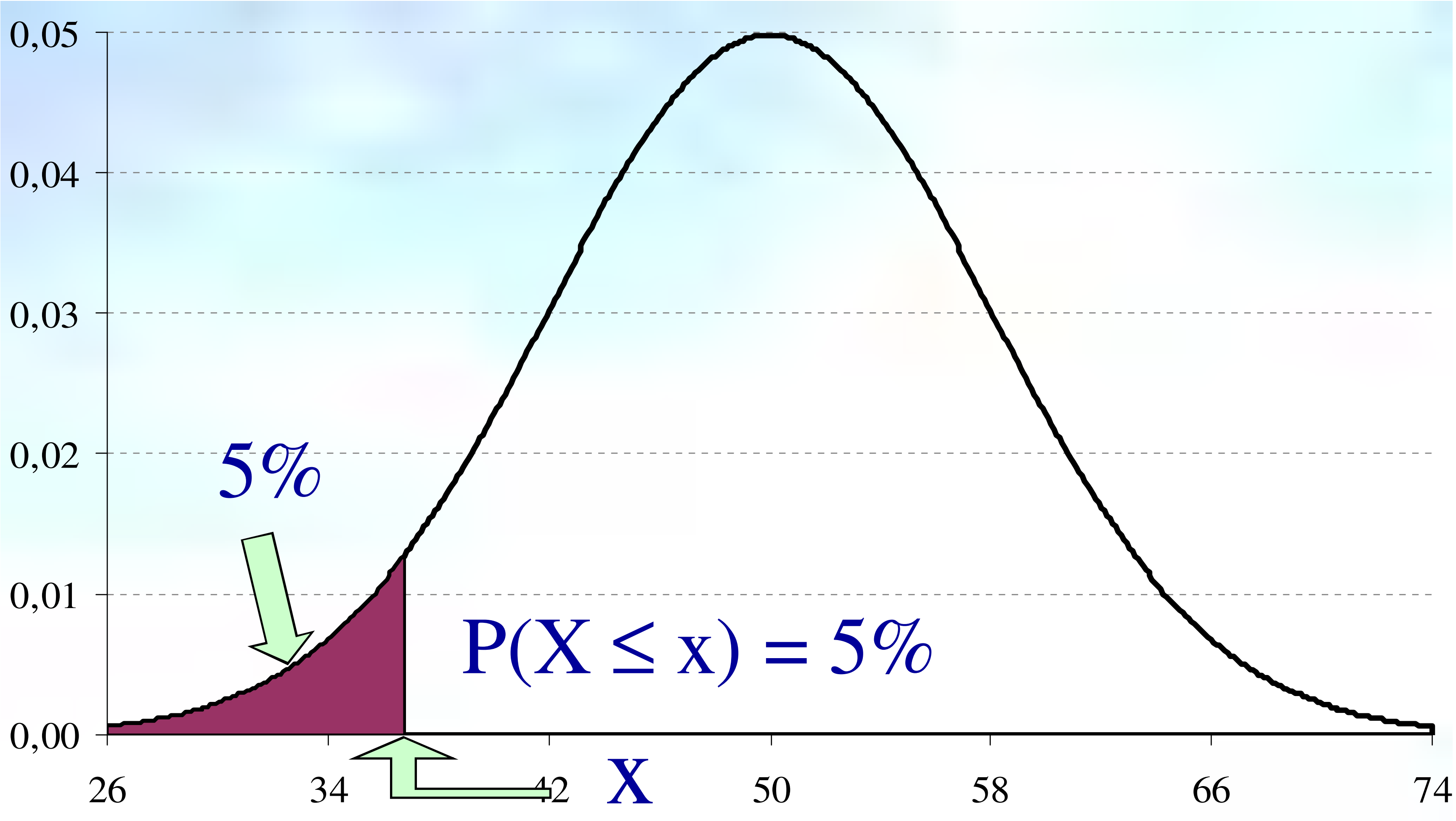
Uma VAC tem distribuição normal de média 50 e desvio padrão 8. Determinar:

(a) $P(X \leq x) = 5\%$

(b) $P(X > x) = 1\%$

Para resolver este tipo de exercício é preciso utilizar a função inversa, isto pode ser feito direto na tabela. Só que agora devemos procurar uma probabilidade (corpo da tabela) e obter um valor de “z” (lateral da tabela).

Graficamente



Em **(a)** temos $P(X \le x) = 5\%$

$$P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-50}{8}\right) =$$

$$= P(Z \le z) = \Phi(z) = 5\%$$

$$\text{onde} \quad z = \frac{x-50}{8}$$

$$\text{Se } \Phi(z) = 5\%, \ \text{então}$$

$$\Phi^{-1}[\Phi(z)] = \Phi^{-1}(5\%)$$

$$z = \Phi^{-1}(0{,}05)$$

Procurando na tabela, o valor (z) mais próximo de $5\% = 0{,}05$, tem-se:

z	0	1	2	3	4	5
-3	0,0013	0,0010	0,0007	0,0005	0,0003	0,0002
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606

z = -1,64

z = -1,65

Como os dois valores estão a mesma distância, isto é, apresentam o mesmo erro (0,0005), pega-se a média entre eles.

Assim

$$z = \frac{1,64 + 1,65}{2} = 1,645$$

$$Como \quad z = \frac{x - 50}{8}, \; tem - se:$$

$$-1,645 = z = \frac{x - 50}{8} \Rightarrow$$

$$x = 50 - 1,645.8 = 36,84$$

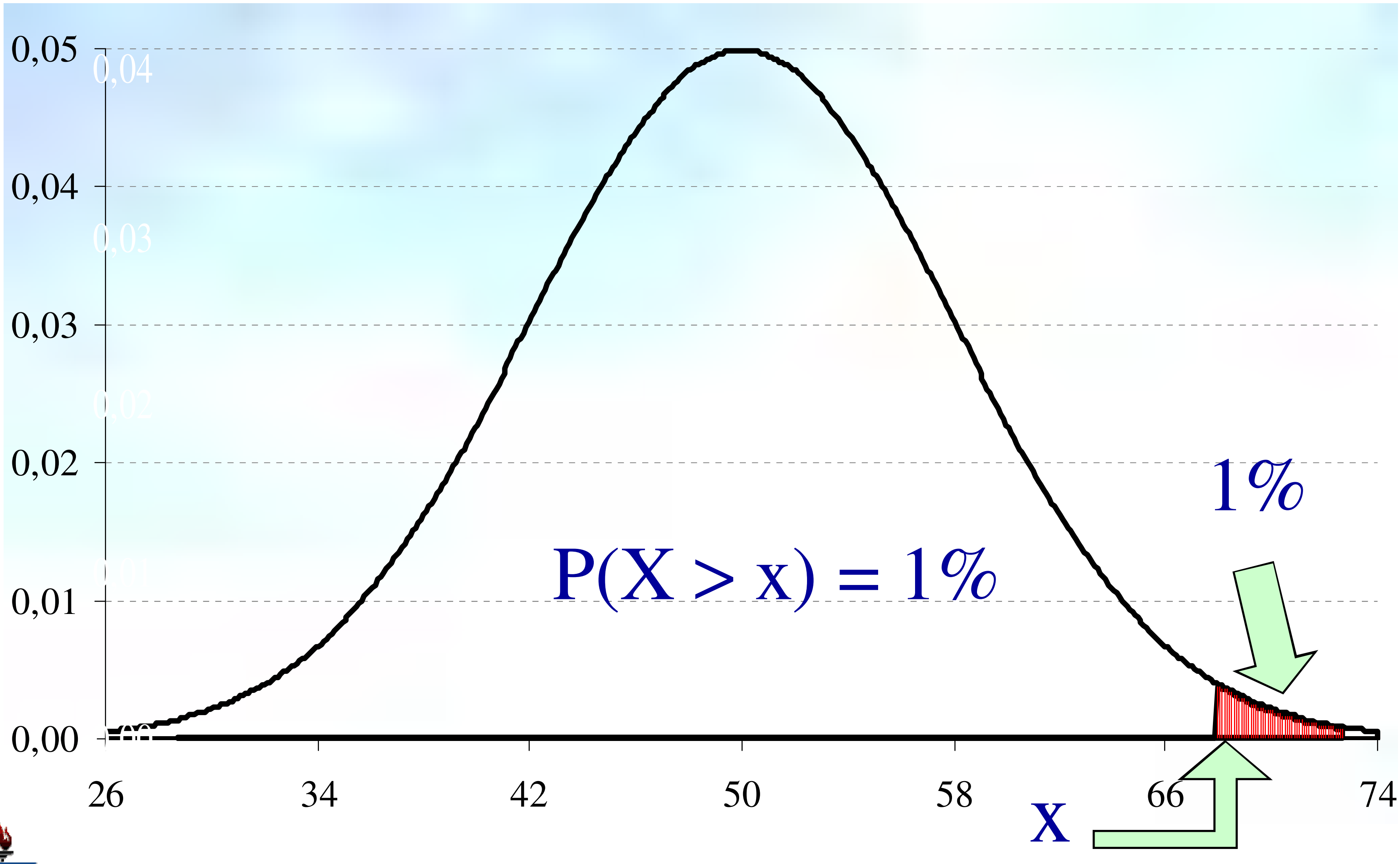
Em (b) temos $P(X > x) = 1\%$

$$P(X > x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{x-50}{8}\right) =$$

$$= P(Z > z) = 1 - \Phi(z) = 1\% = 0{,}01$$

Mas $\quad 1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$

Logo $-z = \Phi^{-1}(0{,}01)$


0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0,00
26
34
42
50
58
66
74
P(X > x) = 1%
1%
x

Procurando na tabela, o valor (z) mais próximo de 1% = 0,01, tem-se:

$z = -2,33$

Conforme pode ser visto na próxima lâmina!

z	0	1	2	3
-3	0,0013	0,0010	0,0007	0,0005
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212

z = -2,33

Como

$$-z = \Phi^{-1}(0{,}01), \ \text{tem} - \text{se}:$$

$$-(-2{,}33) = \frac{x - 50}{8} \Rightarrow$$

$$x = 2{,}33.8 + 50 = 68{,}64$$

Aproximação da Binomial pela Normal:

É possível se estabelecer aproximações entre as variáveis discretas: Binomial, Hipergeométrica e Poisson conforme visto.

É, também, possível aproximar uma variável discreta (a Binomial) por uma contínua (a Normal).

$$P(X = x) \cong P(x - 0{,}5 \le Y \le x + 0{,}5)$$

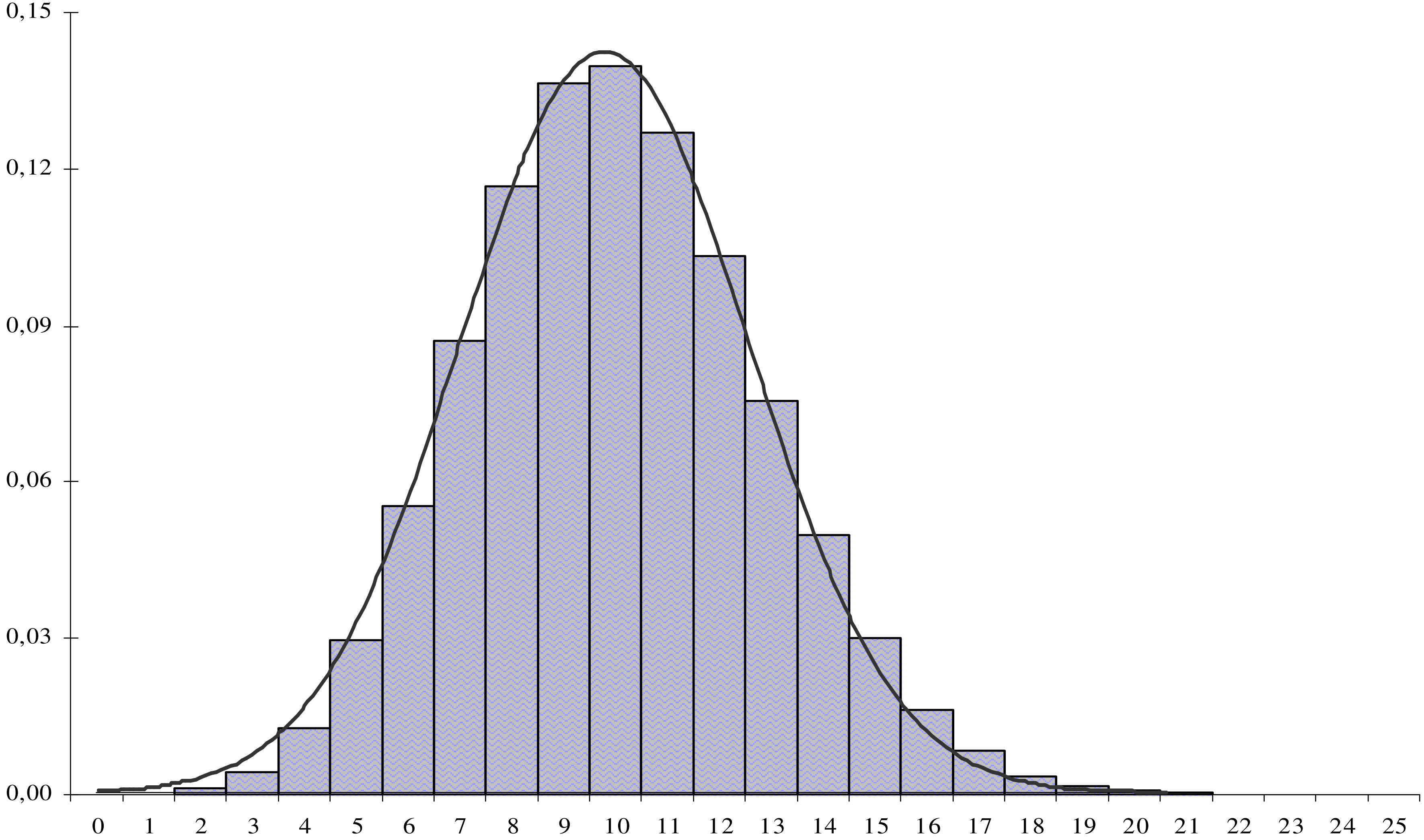
$$P(x_1 < X < x_2) \cong P(x_1 + 0{,}5 \le Y \le x_2 - 0{,}5)$$

$$P(x_1 \le X \le x_2) \cong P(x_1 - 0{,}5 \le Y \le x_2 + 0{,}5)$$

Onde Y é uma normal de média

$\mu = np$ e desvio variância $\sigma^2 = npq$

Graficamente



Exemplo:

Determinar a probabilidade de que em 120 lançamentos de um dado honesto se obtenha face seis:

(a) Exatamente 20 vezes.

(b) Mais do que 25 vezes.

Tem-se:

X = número de faces seis em 120 lançamentos.

$n = 120$

$p = 1/6$

$X \sim B(120; 1/6)$

Então:

$$(a)\ \ P(X = 20) = \binom{120}{20}\left(\frac{1}{6}\right)^{20}\left(\frac{5}{6}\right)^{100} = 9{,}73\%$$

$$(b)\ \ P(X > 30) = 1 - P(X \le 30) =$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{30}\binom{120}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\left(\frac{5}{6}\right)^{120-x} = 0{,}71\%$$

Aproximado pela normal, tem-se:

Y = número de faces seis em 120 lançamentos, será aproximadamente uma normal:

$$\mu_Y = 120.(1/6) = 20$$ e

$$\sigma_Y = \sqrt{120.(1/6).(5/6)} = 4{,}0825$$

(a) $P(X = 20) = P(19,5 < Y < 20,5) =$

$= P(-0,12 < Z < 0,12) =$

$= \Phi(0,12) – \Phi(-0,12) = 9,75\%$

(b) $P(X > 30) = 1- P(X \leq 30) =$

$= 1- P(Y \leq 30,5) = 1 – P(Z \leq 2,57) =$

$= \Phi(-2,57) = 0,51\%$