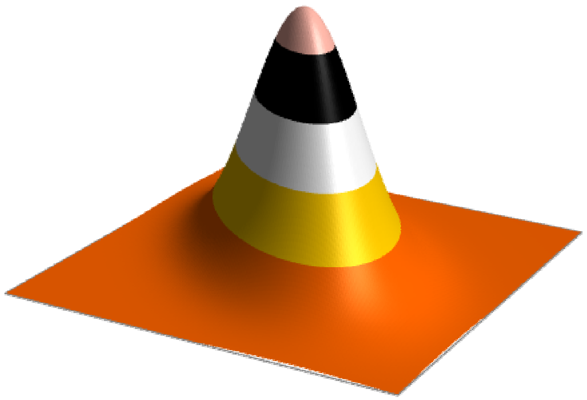


Probabilidade

Prof. Lorí Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
http://www.mat.ufrgs.br/~viali/

3/4

Variável Aleatória Contínua

Seja X uma variável aleatória com conjunto de valores X(S). Se o conjunto de valores for **infinito não enumerável** então a variável é dita **contínua**.

A Função Densidade de Probabilidade

É a função que associa a cada $\mathbf{x} \in \mathbf{X(S)}$ um número f(x) que deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int f(x)dx = 1$$

A Distribuição de Probabilidade

A coleção dos pares **(x, f(x))** é denominada de **distribuição de probabilidade** da VAC X.

Exemplo

Seja X uma VAC. Determine o valor de "c" para que f(x) seja uma função densidade de probabilidade (fdp).

$$f(x) = \begin{cases} c.x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

Para determinar o valor de "c", devemos igualar a área total a **um**, isto é, devemos fazer:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-1}^{1} c.x^2 dx = 1$$

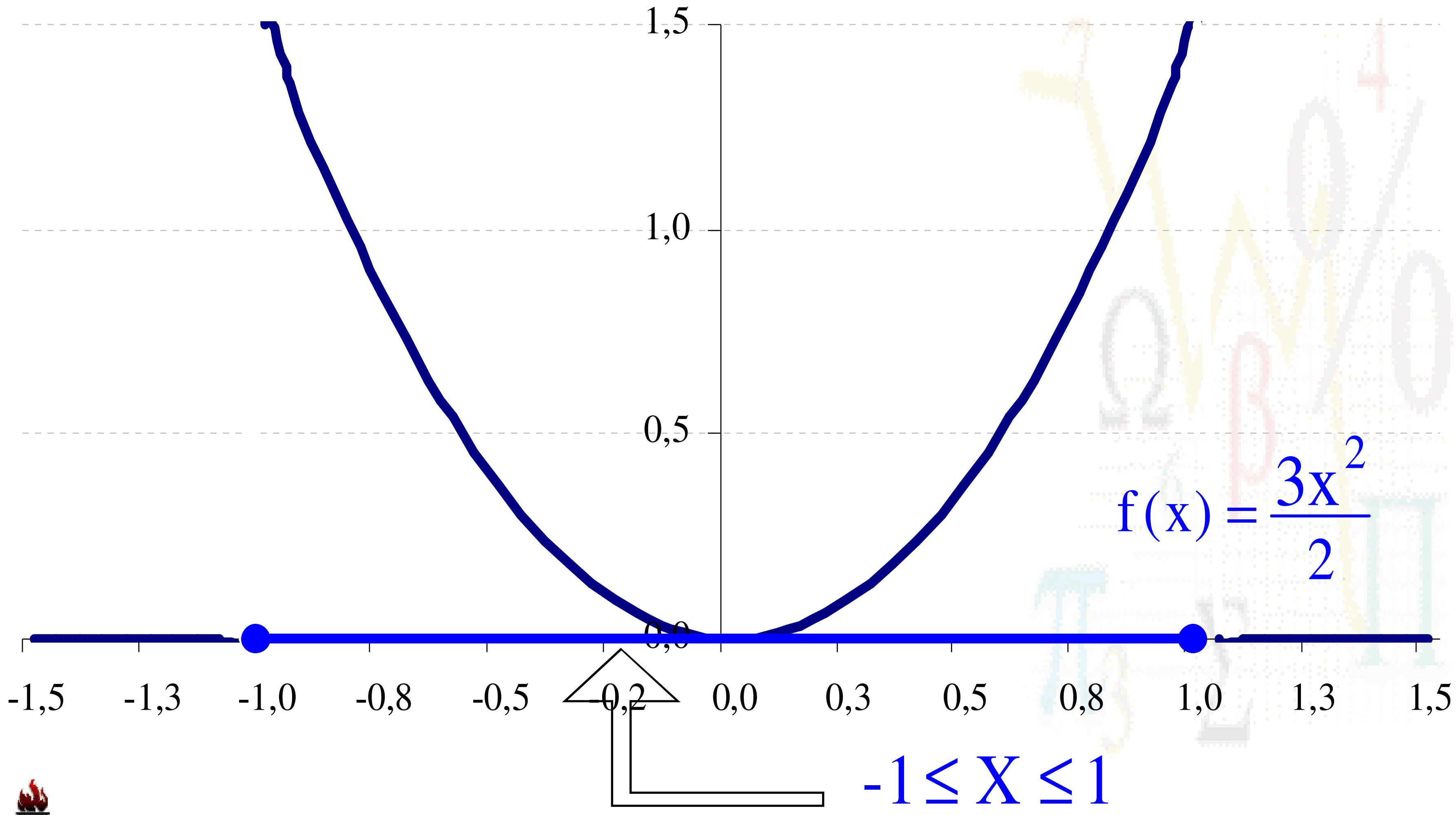
Tem-se:

$$\int_{-1}^{1} c.\,x^2\,dx = \quad c\int_{-1}^{1} x^2\,dx =$$

$$= c\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = c\left[\frac{1^3}{3} - \frac{-1^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

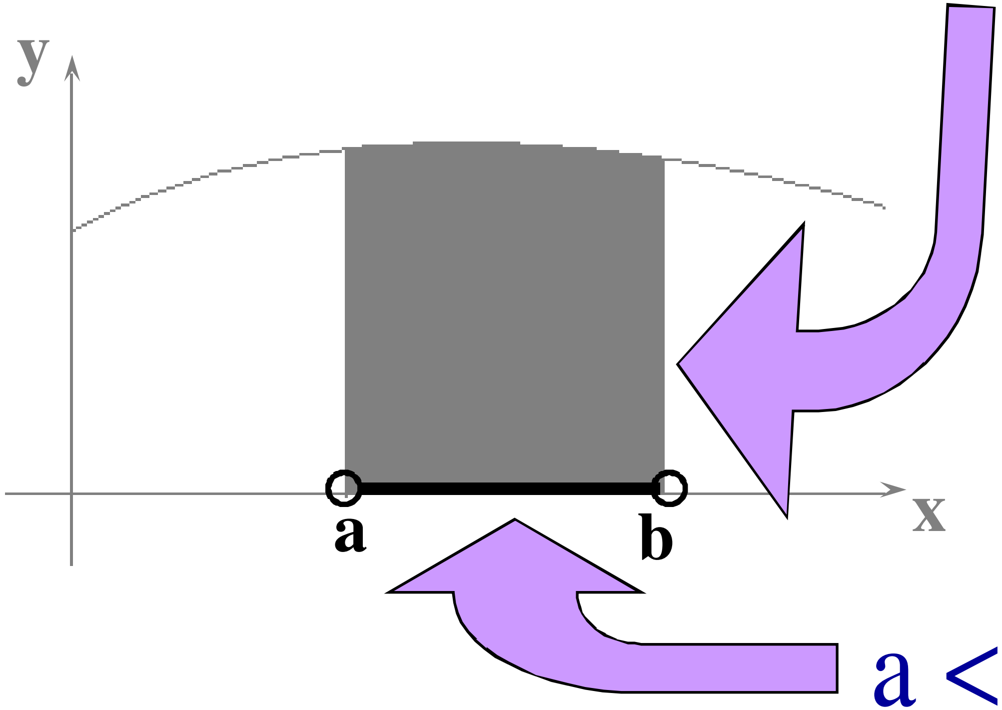
$$= \frac{2}{3}c = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

Representação Gráfica



Cálculo da Probabilidade

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$



$$a < X < b$$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Isto é, a probabilidade de que X assuma valores entre os números “a” e “b” é a área sob o gráfico de f(x) entre os pontos x = **a** e x = **b**.

Observações:

Se X é uma VAC, então:

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \le X < b) \\ &= P(a < X \le b) \\ &= P(a \le X \le b). \end{aligned}$$

Exemplo

Seja X uma VAC. Determine a probabilidade de X assumir valores no intervalo [-0,5; 0,5].

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{2} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

A probabilidade solicitada é dada por:

$$P(-0{,}5 < X < 0{,}5) = \int_{-0,5}^{0,5} \frac{3x^2}{2} dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-0,5}^{0,5} x^2 dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-05}^{0,5}$$

$$= \frac{1}{2}[(0{,}5)^3 - (-0{,}5)^3]$$

$$= 12{,}50\%$$

Momentos

Se X é um VAC então o k-ésimo momento de X é dado por:

$$\mu_k = E(X^k) = \int x^k f(x)dx$$

e o k-ésimo momento central de X é obtido por: $\mu_k^{'} = E(X^k) = \int (x - \mu)^k f(x)dx$

Considerando que o momento de ordem "k" de X é $E(X^k) = \mu_k$, pode-se expressar a expectância e as demais medidas em função desse resultado. Tem-se, então:

VAC – Caracterização

(a) Expectância, valor esperado

$$\mu = E(X) = \int xf(x)dx$$

(b) Variância

$$\sigma^2 = V(X) = \int (x-\mu)^2 f(x)dx =$$

$$= \int x^2 f(x)dx - \left(\int xf(x)dx\right)^2 =$$

$$= \int x^2 f(x)dx - \mu^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

(iii) Desvio Padrão

$$\sigma = \sqrt{\int (x-\mu)^2 f(x)dx} =$$

$$= \sqrt{\int x^2 f(x)dx - \mu^2} = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2}$$

(iv) O Coeficiente de Variação

$$\gamma = \sigma/\mu$$

(c) Assimetria

$$\gamma_1 = [\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^{\,3}]/\sigma^3$$

(d) Curtose

$$\gamma_2 = E[(X - \mu)^4]/\sigma^4 - 3 =$$

$$= [\mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_1^{\,2}\mu_2 - 3\mu_1^{\,4}]/\sigma^4 - 3$$

Exemplo

Determinar a expectância e o desvio padrão da variável X dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{2} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

$$\mu = E(X) = \int_{-1}^{1} x.f(x)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} x.\frac{3x^2}{2}.dx = \int_{-1}^{1} \frac{3x^3}{2}dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1^4}{4} - \frac{-1^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\sigma = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2}$$

$$E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2 . \frac{3x^2}{2} dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^4 dx =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{2}\left[\frac{1^5}{5} - \frac{-1^5}{5}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right] = \frac{3}{5} = 0{,}60$$

O desvio padrão de X será, então:

$$\sigma = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2} =$$
$$= \sqrt{0,60 - 0} = 0,77$$

A Função de Distribuição

É a função F(x) definida por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

A F(x) é a integral da f(x) até um ponto genérico "**x**".

Exemplo

Considerando a função abaixo como a fdp de uma VAC X, determinar a F(x).

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{2} & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

A F(x) é uma função definida em todo o intervalo real da seguinte forma:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -1 \\ \int_{-1}^{x} \frac{3u^2}{2} du & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Vamos determinar o valor da integral em "u":

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{3u^2}{2} du = \frac{3}{2} \int_{-1}^{x} u^2 du =$$

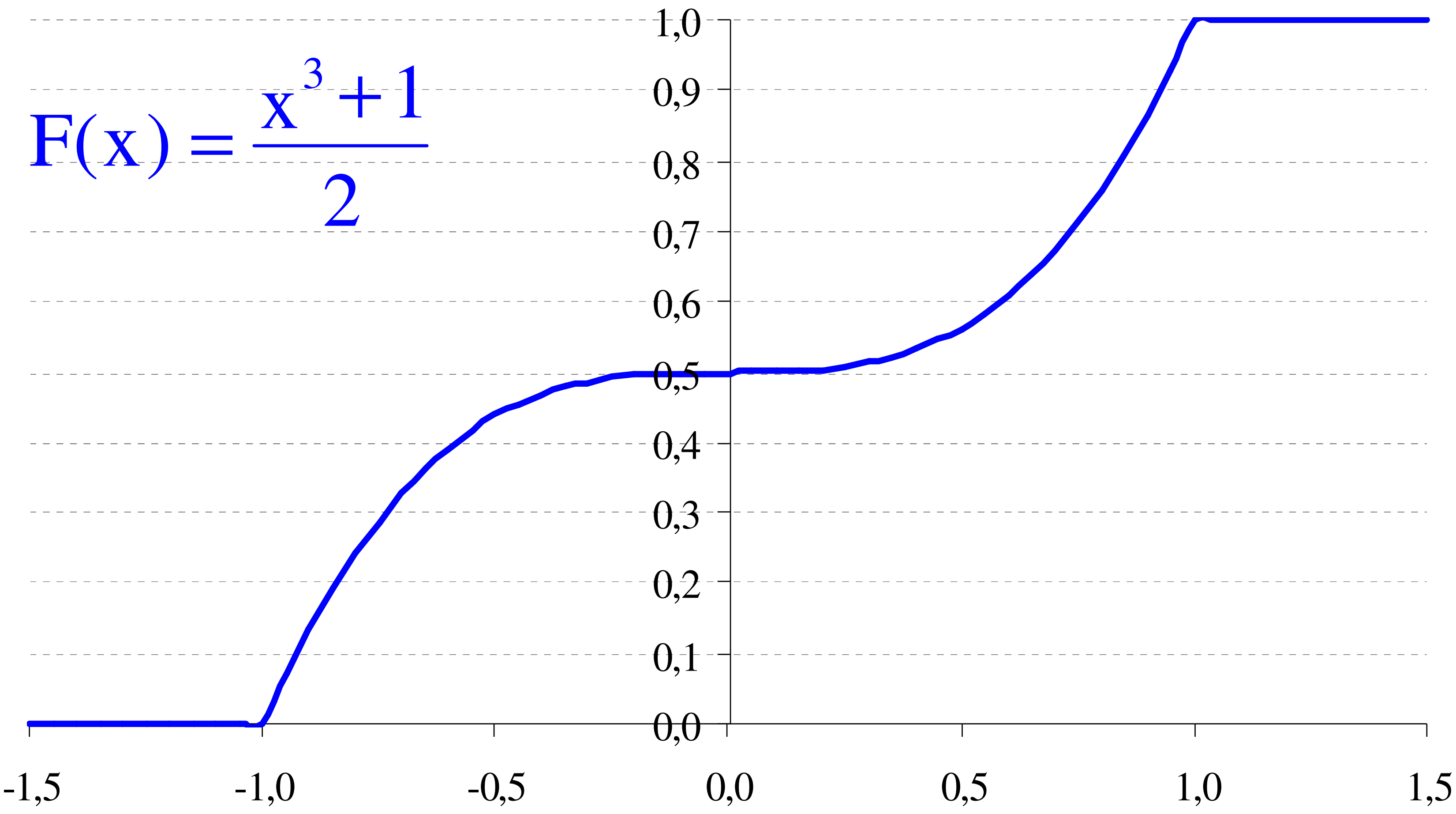
$$= \frac{3}{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{x} = \frac{1}{2}[u^3]_{-1}^{x} = \frac{x^3+1}{2}$$

Assim a Função de Distribuição Acumulada (FDA) é:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -1 \\ \dfrac{x^3 + 1}{2} & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Representação Gráfica

$$F(x) = \frac{x^3 + 1}{2}$$



Cálculo de Probabilidade com a FDA

O uso da FDA é bastante prático no cálculo das probabilidades, pois não é necessário integrar, já que ela é uma função Integral.

Usando a FDA, teremos sempre três casos possíveis:

$$P(X \leq x) = F(x)$$

$$P(X > x) = 1 - F(x)$$

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Observação:

Se X é uma VAC então o momento de ordem "k" é dado por:

$$E(X^k) = \int x^k f(x)dx$$

Modelos Probabilísticos Contínuos

- Uniforme
- Exponencial
- Normal

Uniforme

Uma VAC X é uniforme no intervalo [a; b] se assume todos os valores com igual probabilidade. Isto é, se f(x) for:

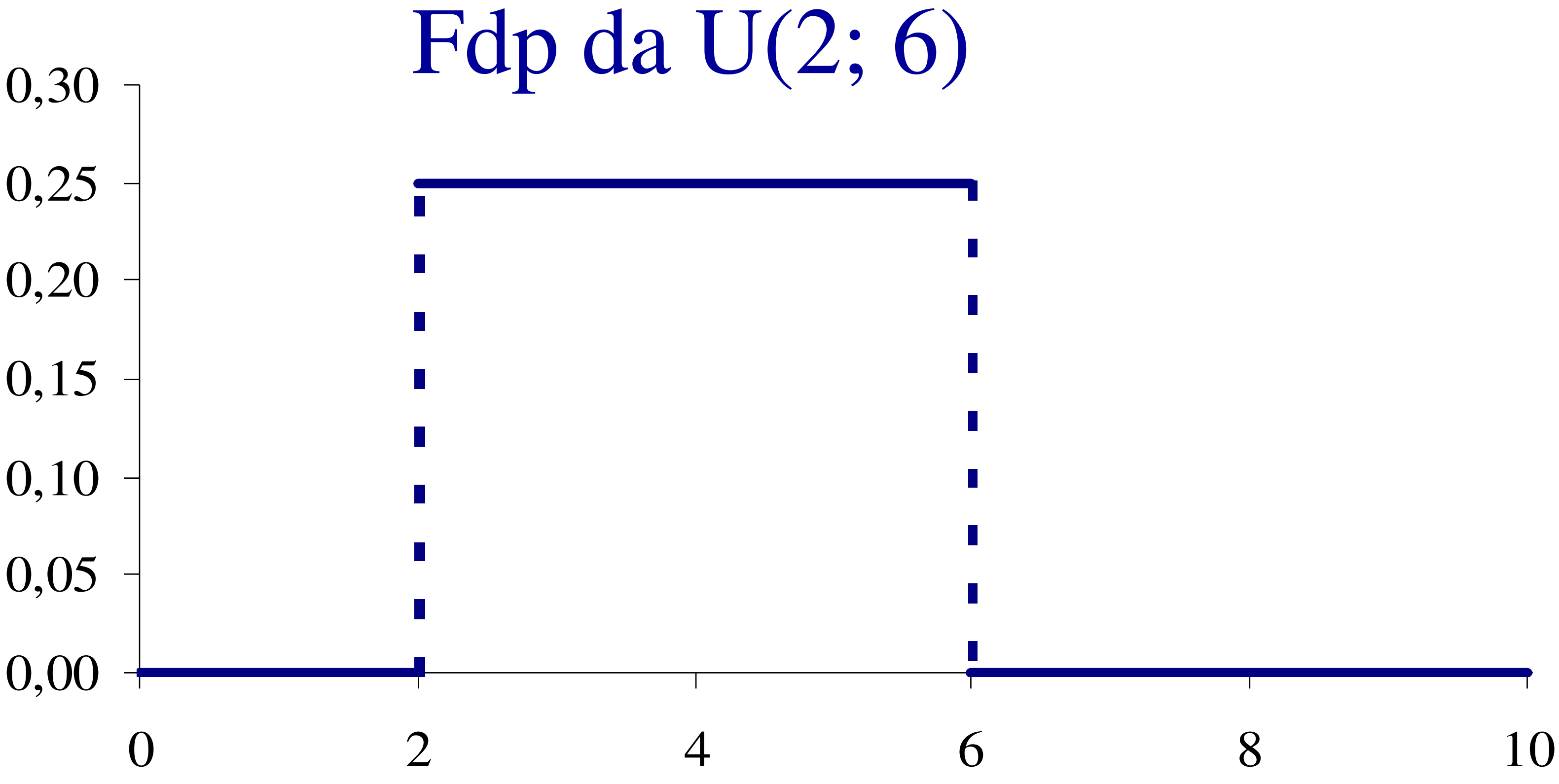
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } \; a \leq x \leq b \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Exemplo

Seja X uma VAC com distribuição uniforme no intervalo [2; 6], isto é, X ~ U(2; 6). Então a fdp é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6-2} = \dfrac{1}{4} & \text{se } 2 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Representação Gráfica



A Função de Distribuição

A função F(x) é dada por:

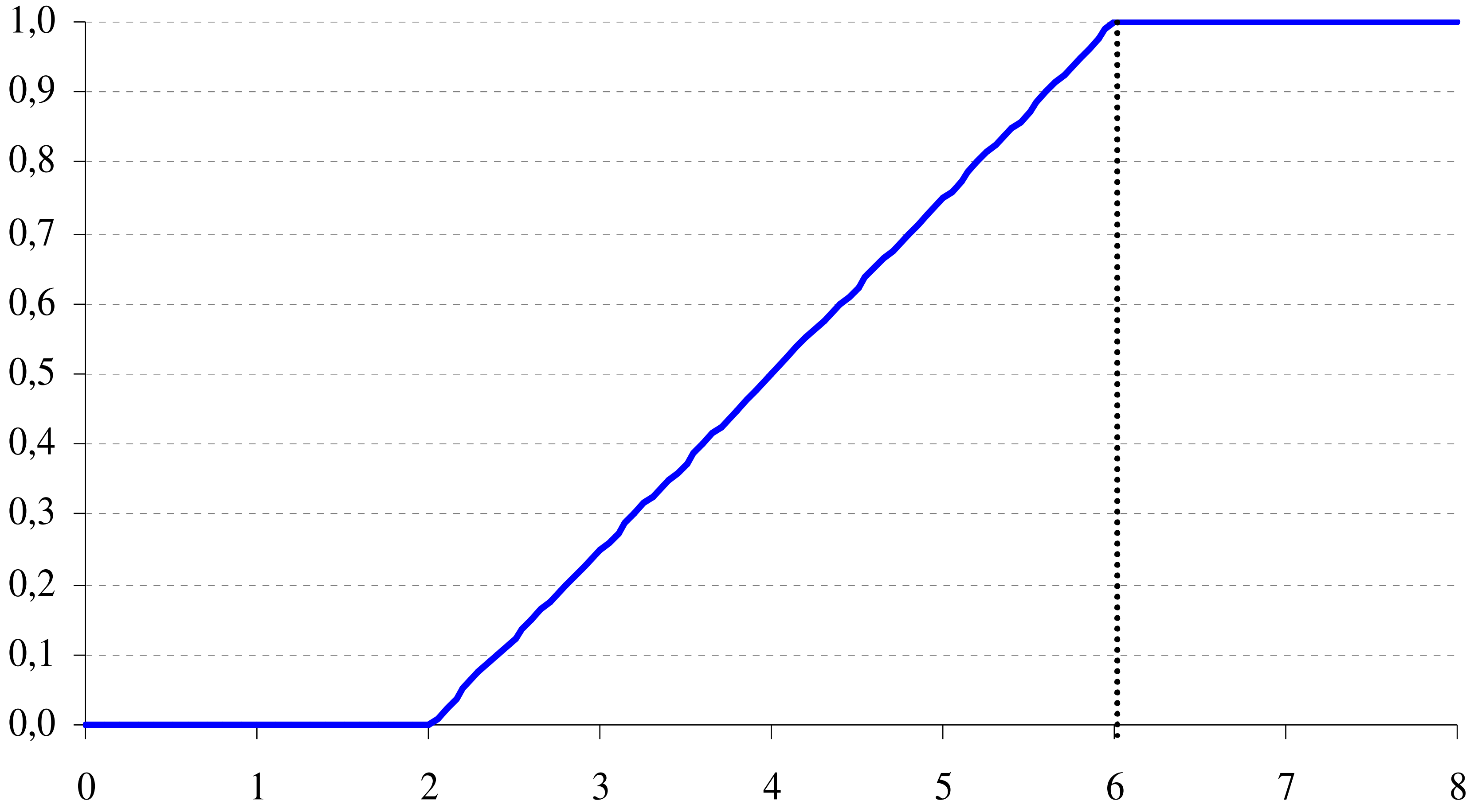
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{se } a \le x \le b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$$

Exemplo

Seja X uma uniforme no intervalo [2; 6], então a FDA de X é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 2 \\ \dfrac{x-2}{4} & \text{se } 2 \leq x \leq 6 \\ 1 & \text{se } x > 6 \end{cases}$$

Representação Gráfica da U(2; 6)



Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} =$$

$$= \frac{(b-a).(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Variância

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$$

A variância será então:

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{4} =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

Assimetria

$$\gamma_1 = 0$$

Curtose

$$\gamma_2 = -6/5$$

Exponencial

Uma variável aleatória T tem uma distribuição **exponencial** se sua fdp for do tipo:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda.e^{-\lambda.t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Exemplo

O tempo de trabalho sem falhas de um equipamento (em horas) é dado pela função, abaixo. Determinar a probabilidade de que o equipamento não falhe durante as primeiras 50 horas.

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}01e^{-0{,}01t} & \text{se} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

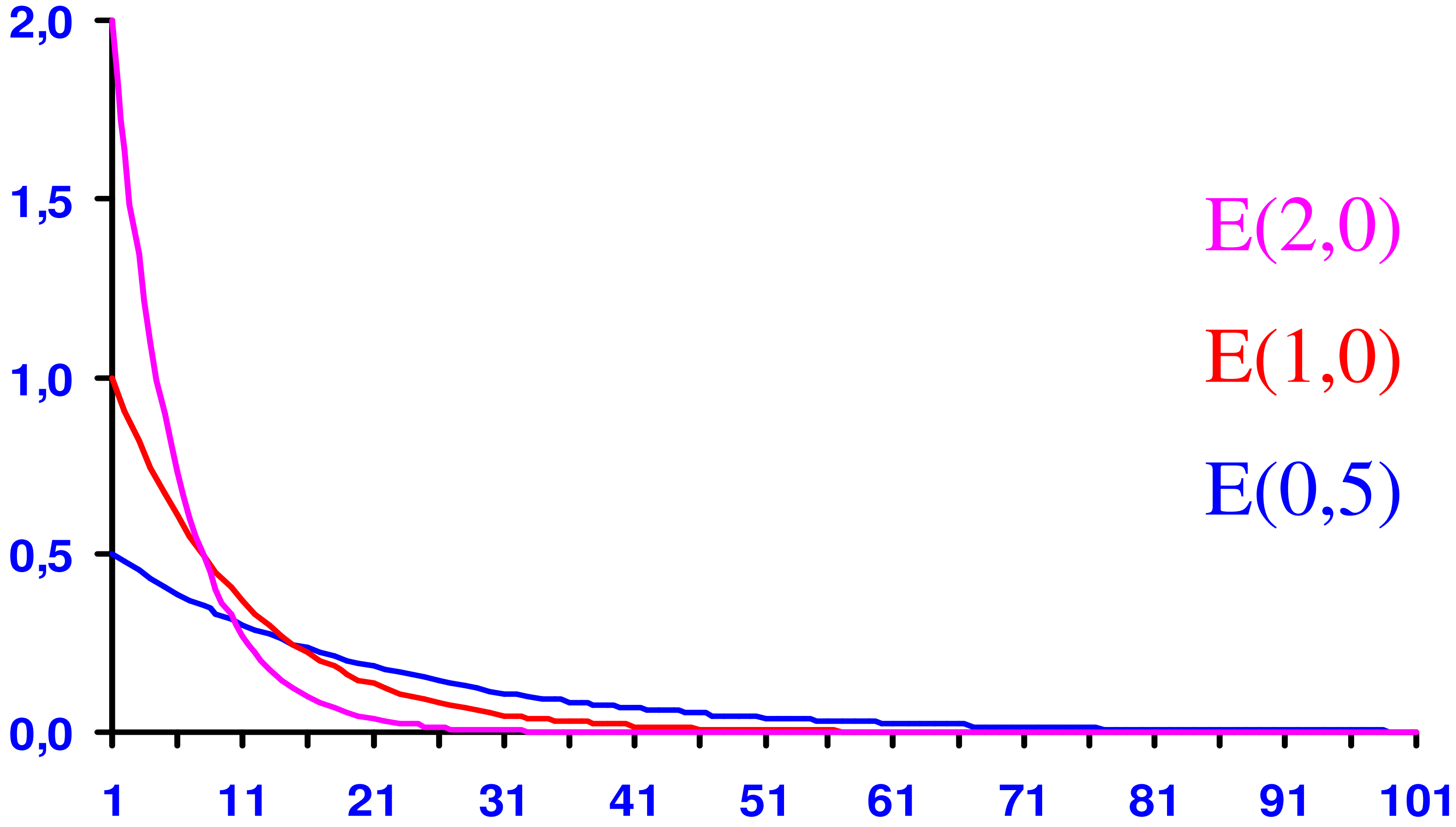
A probabilidade solicitada é dada pela integral da função no intervalo T < 50, isto é:

$$P(T < 50) = \int_0^{50} 0,01 e^{-0,01t} dt =$$

$$= 0,01 . \int_0^{50} e^{-0,01t} dt = 0,01 . \left[-\frac{e^{-0,01t}}{0,01} \right]_0^{50} =$$

$$= 1 - e^{-0,5} = 39,35\%$$

Representação gráfica



A função de distribuição

A função F(t) é dada por:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Obs.: Tente determinar!

Exemplo

O tempo de trabalho sem falha de um equipamento (em horas) é uma exponencial de parâmetro $\lambda = 0{,}01$. Determine a probabilidade de ele funcionar sem falhas por pelo menos 50 horas.

A FDA para esta fdp é dada por:

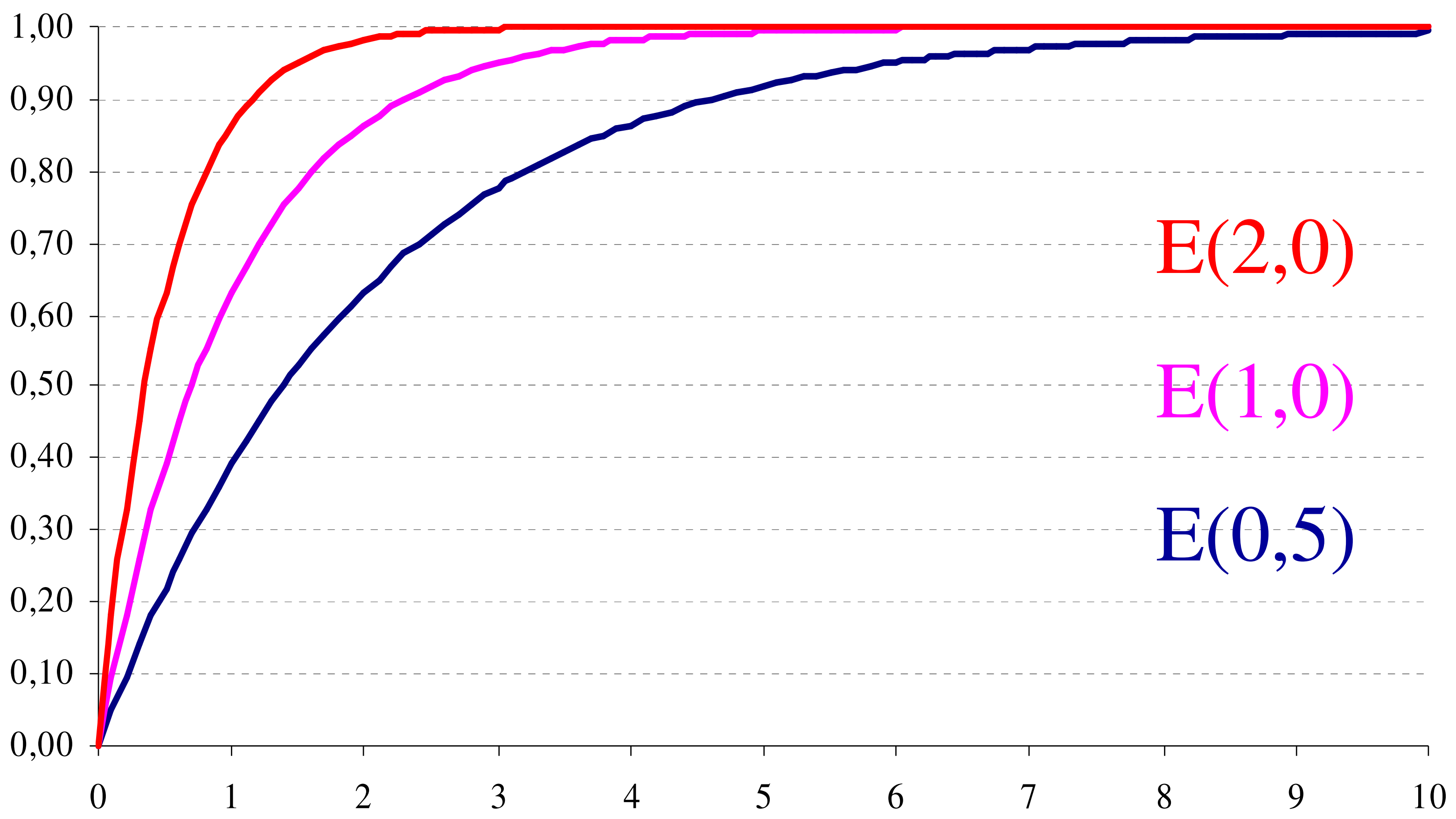
$$F(t) = 1 - e^{-0,01t}$$

A probabilidade solicitada é dada por:

$$P(T \leq 50) = F(50) = 1 - e^{-0,01.50} =$$

$$= 1 - e^{-0,5} = 39,35\%$$

Representação gráfica



Expectância ou valor esperado

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)dt = \int_0^{\infty} t.\lambda e^{-\lambda t} dt =$$

$$= [-te^{-\lambda t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt =$$

$$= \left[-te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

Obs.: Foi utilizado integração por partes.

Variância

$$\sigma^2 = V(T) = E(T^2) - E(T)^2$$

$$E(T^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 . f(t)dt = \int_0^{\infty} t^2 . \lambda e^{-\lambda t} dt =$$

$$= [-t^2 e^{-\lambda t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2te^{-\lambda t} dt =$$

$$= \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda} . \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

A variância será então:

$$\sigma^2 = V(T) = E(T^2) - E(T)^2 =$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exercício

Seja T uma VAC com distribuição exponencial de parâmetro λ. Determinar o valor mediano da distribuição.

Solução:

Conforme visto a mediana é o valor que divide a distribuição de forma que:

$$P(T < me) = P(T > me) = 50\%.$$

$$\text{Tem-se } F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

$$\text{Então: } P(T < me) = F(me) =$$

$$1 - e^{-\lambda me} = 0,5 \Rightarrow 1 - e^{-\lambda me} = 0,5$$

$$e^{-\lambda me} = 0,5 \Rightarrow -\lambda me = \ln(0,5)$$

$$\text{Assim } me = -\frac{\ln(0,5)}{\lambda} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Assimetria

$$\gamma_1 = 2$$

Curtose

$$\gamma_2 = 6$$