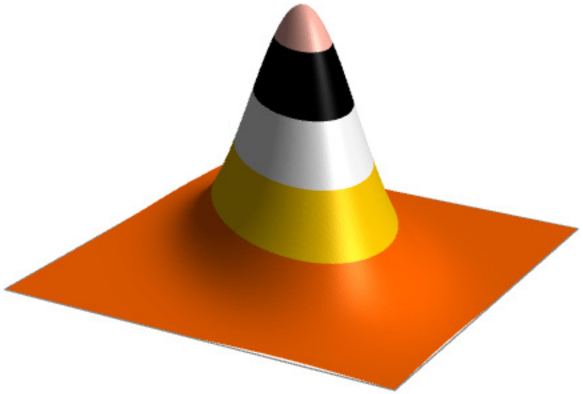
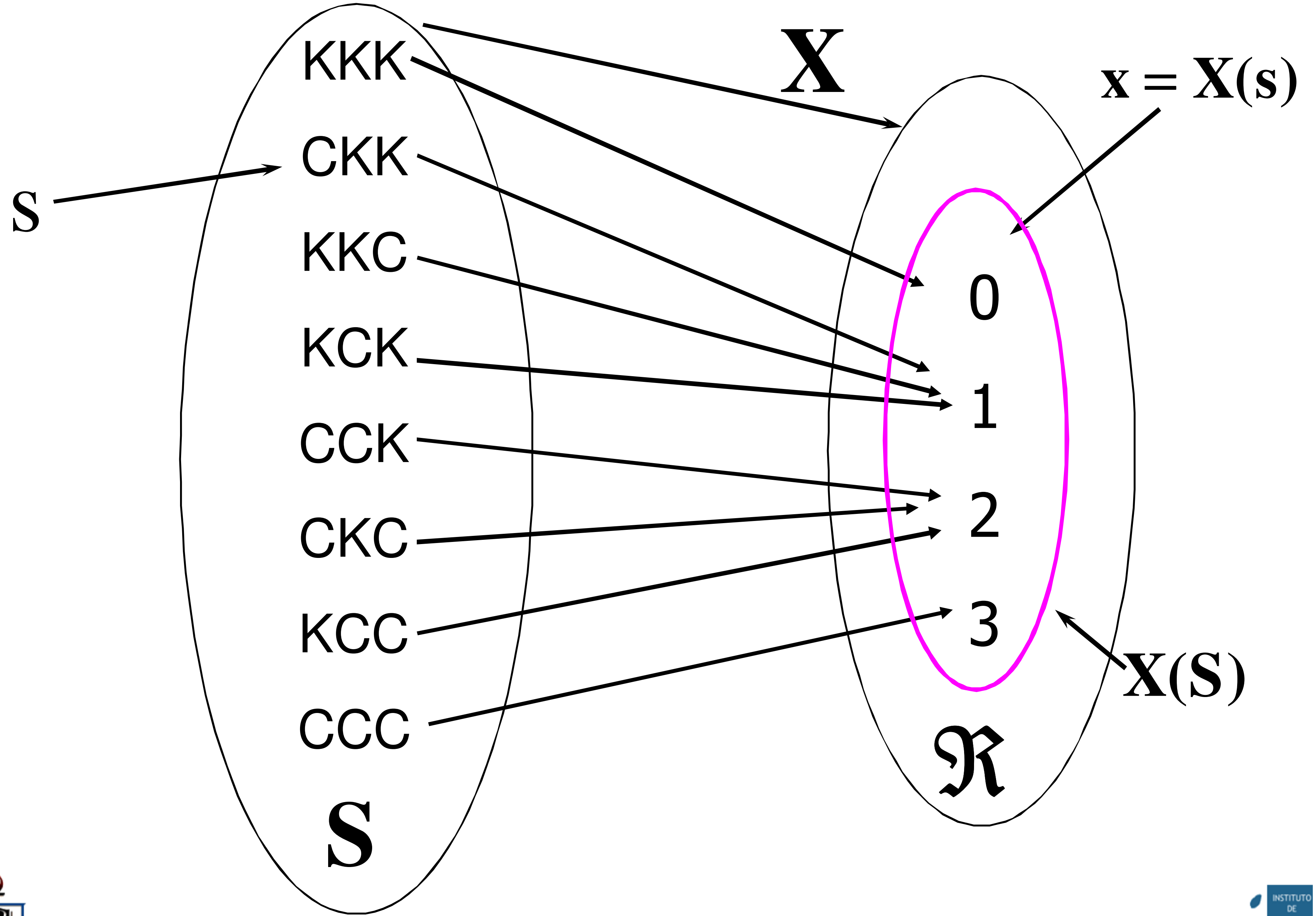


Probabilidade

Prof. Lorí Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
http://www.mat.ufrgs.br/~viali/

2/4

Variável Aleatória


KKK
CKK
KKC
KCK
CCK
CKC
KCC
CCC
S
s
X
x = X(s)
0
1
2
3
X(S)
ℜ

Variável Aleatória

Uma função **X** que associa a cada elemento de S ($s \in S$) um número real $x = X(s)$ é denominada **variável aleatória**.

O conjunto de valores

O conjunto formado por todos os valores “x”, isto é, a imagem da variável aleatória X, é denominado de conjunto de valores de X.

$$\mathbf{X(S) = \{\, x \in \Re \mid X(s) = x \,\}}$$

Tipos de variáveis

Conforme o conjunto de valores – X(S) – uma variável aleatória poderá ser discreta ou contínua.

Variável Discreta (VAD)

Se o conjunto de valores for **finito** ou então **infinito enumerável** a variável é dita discreta.

Variável Contínua (VAC)

Se o conjunto de valores for **infinito não enumerável** então a variável é dita contínua.

Variável Aleatória Discreta

A função de probabilidade (fp)

A função de probabilidade (fp) de uma VAD é a função que associa a cada $x_i \in X(S)$ o número $f(x_i) = P(X = x_i)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$f(x_i) \geq 0$, para todo "i"

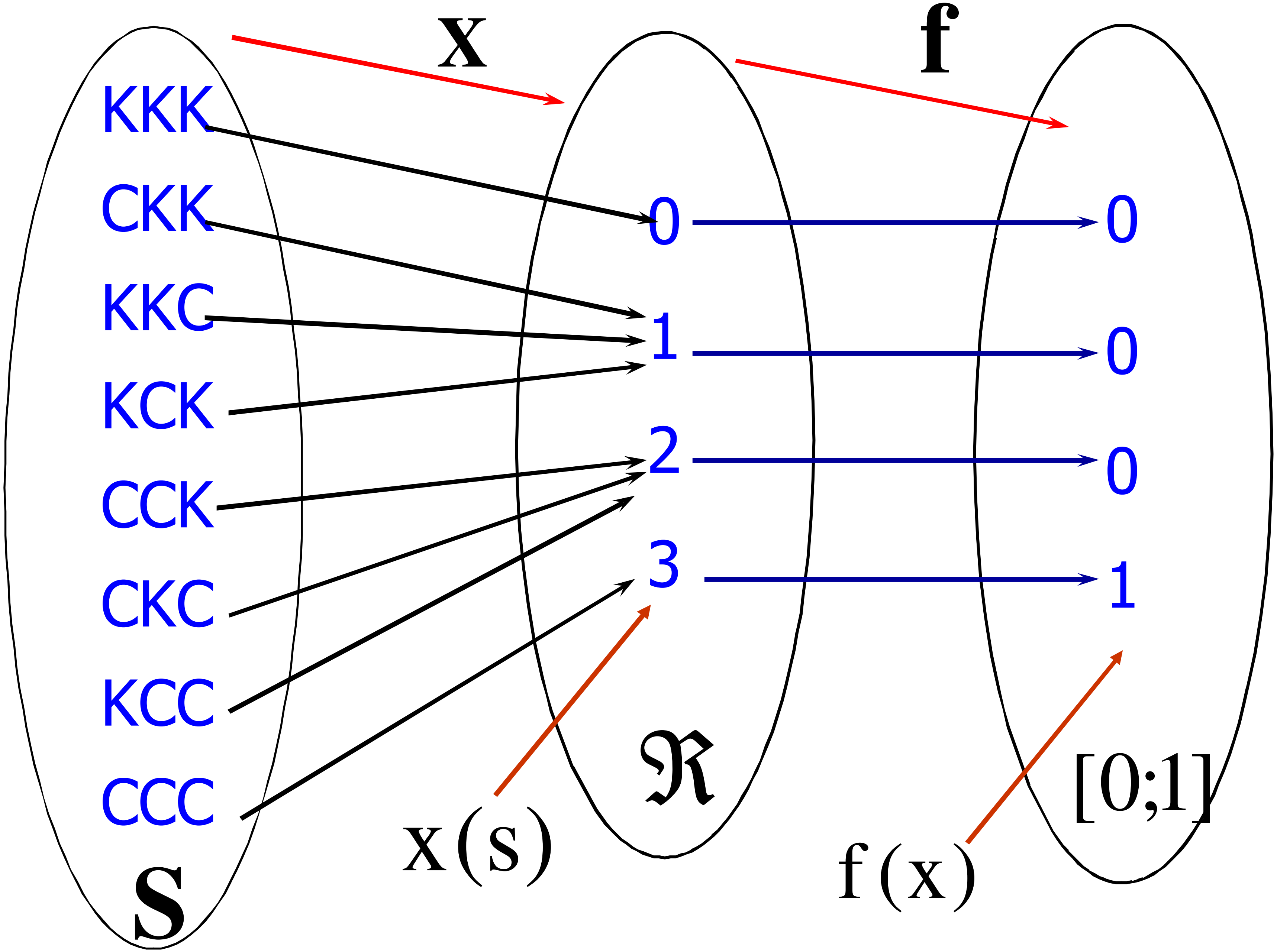
$\sum f(x_i) = 1$

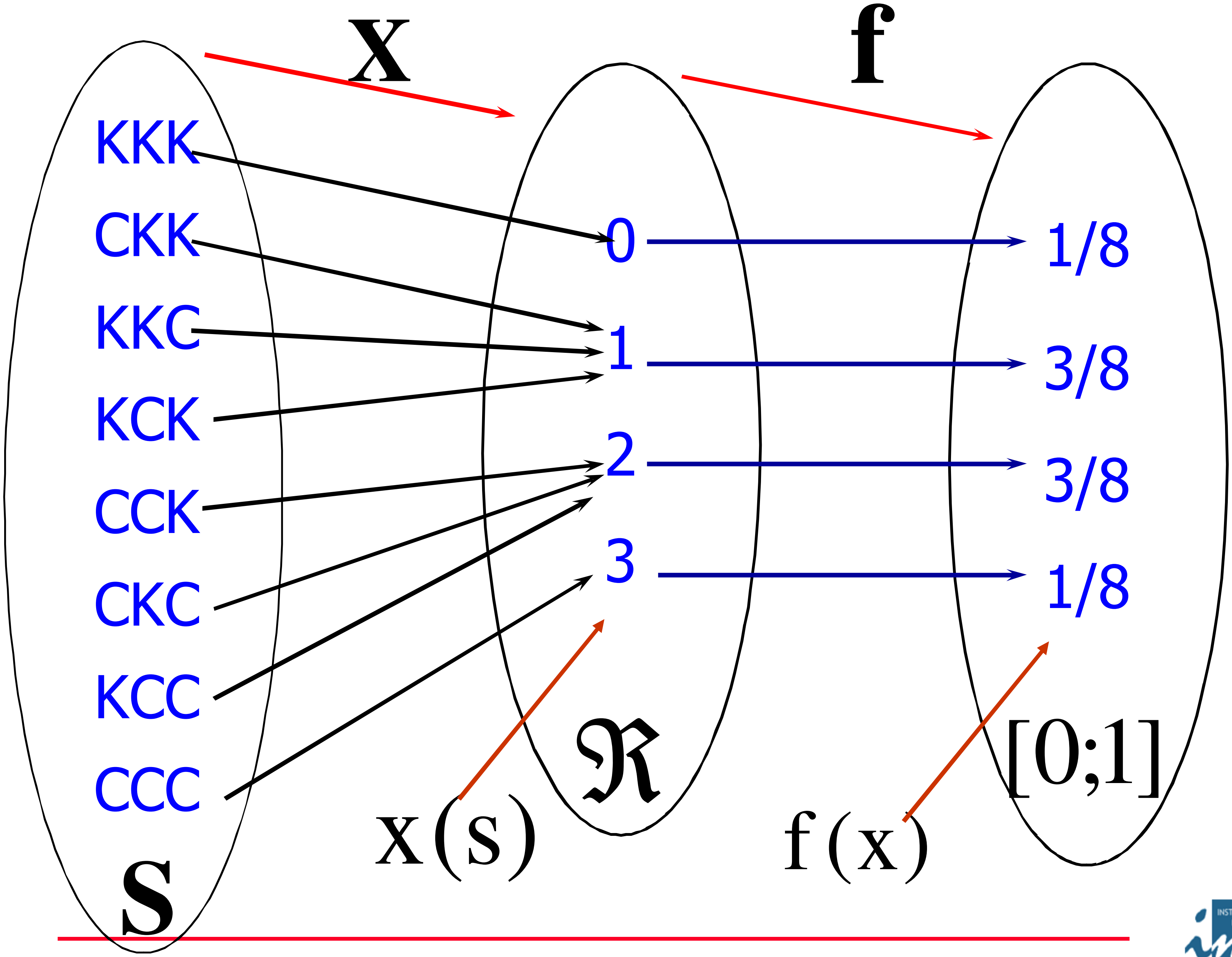
A distribuição de probabilidade

A coleção dos pares $[x_i, f(x_i)]$ para $i = 1, 2, 3, ...$ é denominada de distribuição de probabilidade da VAD X.

Exemplo:

Suponha que uma moeda equilibrada é lançada três vezes. Seja X = "número de caras". Então a distribuição de probabilidade de X é:


X
f
KKK
CKK
KKC
KCK
CCK
CKC
KCC
CCC
S
0
1
2
3
ℜ
x(s)
0
0
0
1
[0;1]
f(x)


X
f
KKK
CKK
KKC
KCK
CCK
CKC
KCC
CCC
S
0
1
2
3
ℜ
x(s)
1/8
3/8
3/8
1/8
[0;1]
f(x)

Exemplo:

Suponha que um par de dados é lançado. Então X = “soma do par” é uma variável aleatória discreta com o seguinte conjunto de valores:

Como $X((a, b)) = a + b$, o conjunto de valores de X é dado por:

$X(S) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

A função de probabilidade $f(x) = P(X = x)$, associa a cada $x \in X(S)$, um número no intervalo $[0; 1]$ dado por:

$$f(x) = P(X = x) = P(X(s) = x) =$$
$$= P([x \in X(S) \,/\, X(s) = x\})$$

Desta forma:

$f(2) = P(X = 2) = P\{(1,1)\} = 1/36$

$f(3) = P(X = 3) = P\{(1,2), (2, 1)\} = 2/36$

....

$f(11) = P(X=11) = P\{(6, 5), (5, 6)\} = 2/36$

$f(12) = P(X = 12) = P\{(6, 6)\} = 1/36$

A distribuição de probabilidade será:

A distribuição de probabilidade de X será então:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	**1**

Representação de uma distribuição de probabilidade

Poderá ser feita por meio de:

- uma tabela
- uma expressão analítica (fórmula)
- um diagrama

Tabela

Seja X = “número de caras”, obtidas no lançamento de 4 moedas honestas. Então a distribuição de X é a da tabela ao lado.

x	f(x)
0	1/16
1	4/16
2	6/16
3	4/16
4	1/16
Σ	1

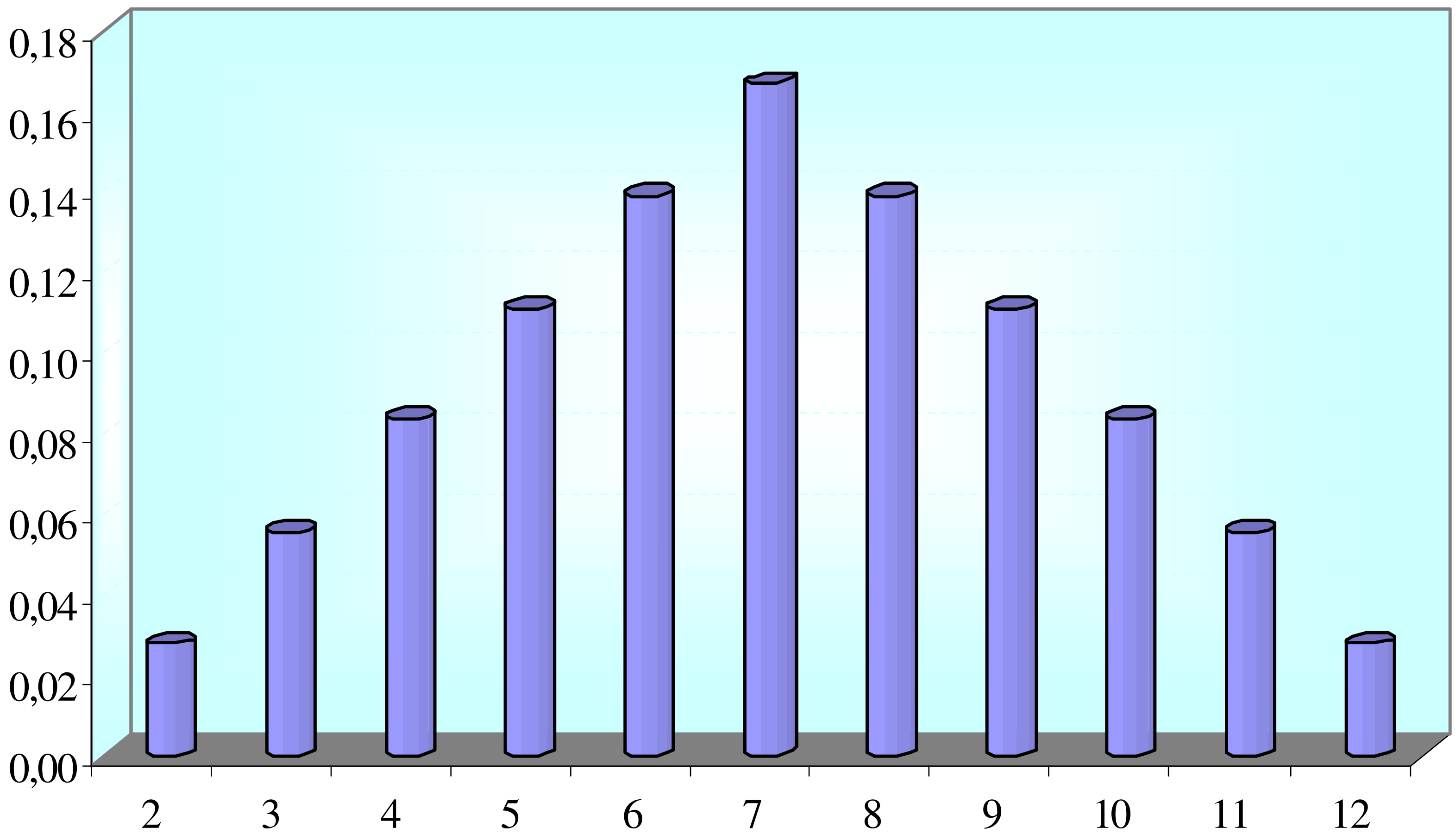
Expressão analística

Considere X = “soma do par”, no lançamento de dois dados equilibrados, então:

$$f: \mathbf{X(S)} \rightarrow \Re$$

$$x \rightarrow \begin{cases} (x - 1)/36 & \text{se } x \leq 7 \\ (12 - x + 1)/36 & \text{se } x > 7 \end{cases}$$

Diagrama



VAD - Caracterização

(a) Expectância, valor esperado (*Expectation*)

$$\mu = E(X) = \sum x.f(x) = \sum x.P(X = x)$$

(b) Variância (*Variance*)

$$\sigma^2 = \sum f(x)(x-\mu)^2 = \sum x^2 f(x) - \mu^2 =$$

$$= E(X^2)\text{-}E(X)^2$$

(iii) Desvio Padrão

(*Standard Deviation*)

$$\sigma = \sqrt{\sum f(x)(x-\mu)^2} = \sqrt{\sum x^2 f(x) - \mu^2} = \sqrt{E(X^2)-E(X)^2}$$

(iv) O Coeficiente de Variação

(*Variation Coeficient*)

$$\gamma = \sigma/\mu$$

Definições:

Seja X uma VA. O momento de ordem "k" de X é o valor $E(X^k) = \mu_k$, se esse valor convergir.

Obs.: A expectância é o primeiro momento.

Seja X uma VA. O momento central de ordem "k" de X é o valor $E[(X - E(X))^k] = E[(X - \mu)^k]$, se esse valor convergir.

Obs.: (i) A variância é o segundo momento central;

(ii) O primeiro momento central é sempre zero;

(iii) O terceiro momento central é utilizado para determinar a assimetria de uma distribuição;

(iv) O quarto momento central é utilizado na determinação da curtose de uma distribuição.

Se X é um VAD então o k-ésimo momento de X é dado por:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k f(x_i)$$

e o k-ésimo momento central de X é obtido por:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^k f(x_i)$$

Considerando que o momento de ordem “k” de X é $E(X^k) = \mu_k$, pode-se expressar a expectância e as demais medidas em função desse resultado. Tem-se, então:

(a) Expectância, valor esperado

$$\mu_1 = E(X)$$

(b) Variância

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \mu_2 - \mu_1{}^2$$

(c) Assimetria

$$\gamma_1 = [\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1{}^3]/\sigma^3$$

(v) Curtose

$$\gamma_2 = E[(X - \mu)^4]/\sigma^4 - 3 =$$

$$= [\mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_1{}^2\mu_2 - 3\mu_1{}^4]/\sigma^4 - 3$$

Exemplo

Calcular o valor esperado, a variabilidade da variável X = "número de caras" no lançamento de quatro moedas honestas.

Cálculos

x	f(x)	x.f(x)	$x^2f(x)$	$x^3f(x)$	$x^4f(x)$
0	1/16	0	0	0	0
1	4/16	4/16	4/16	4/16	4/16
2	6/16	12/16	24/16	48/16	96/16
3	4/16	12/16	36/16	108/16	324/16
4	1/16	4/16	16/16	64/16	256/16
Σ	1	2	5	14	42,5

Tem-se:

$\mu_1 = 2;\ \mu_2 = 5;\ \mu_3 = 14$ e $\mu_4 = 42{,}5$

Assim:

(i) $E(X) = \mu_1 = 2$ caras

(ii) $\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1{}^2 = 5 - 4 = 1$ cara

(iii) $\gamma_1 = [\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1{}^3]/\sigma^3 =$

$$= 14 - 3.2.5 + 2.8 = 30 - 30 = 0$$

(iv) Curtose

$$\gamma_2 = [\mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_1^2\mu_2 - 3\mu_1^4]/\sigma^4 - 3 =$$

$$42{,}5 - 4.2.14 + 6.4.5 - 3.16 - 3 =$$

$$= 42{,}5 - 112 + 120 - 48 - 3 = 2{,}5 - 3 =$$

$$= -0{,}50$$

Outros resultados

Moda

$$m_o = 2 \text{ caras}$$

Mediana

$$m_e = 2 \text{ caras}$$

Propriedades

Da expectância ou valor esperado

(i) Linearidade

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

(ii) Não multiplicativa

$$E(XY) \neq E(X)E(Y), \text{ em geral}$$

(iii) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

Da variância

(i) $V(a) = 0$

(ii) $V(aX + b) = a^2V(X)$

(iii) $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$ se X e Y forem independentes.

Exercício

Três dados honestos são lançados. Seja X = soma dos resultados. Determine a distribuição de X e calcule os momentos até a quarta ordem.

A partir dos momentos, determinar:

(i) A expectância

(ii) A variância

(iii) A assimetria

(iv) A curtose

A Função de Distribuição (FD)

Seja X uma variável aleatória (discreta ou contínua). A função de distribuição (acumulada) ou simplesmente "função de repartição" é definida por: $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriedades da FD

(a) $0 \leq F(x) \leq 1;$

(b) $F(x_1) \leq F(x_1)$ se $x_1 < x_2$

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Determinação de probabilidades a partir da FD

(i) $P(a < X \leq b) = F(b) – F(a)$;

(ii) $P(X < a) = F(a)$ e

(iii) $P(X > a) = 1 - F(a)$

VAD e FD

Seja X é uma variável aleatória discreta (VAD) então a FD é a função em escada dada por:

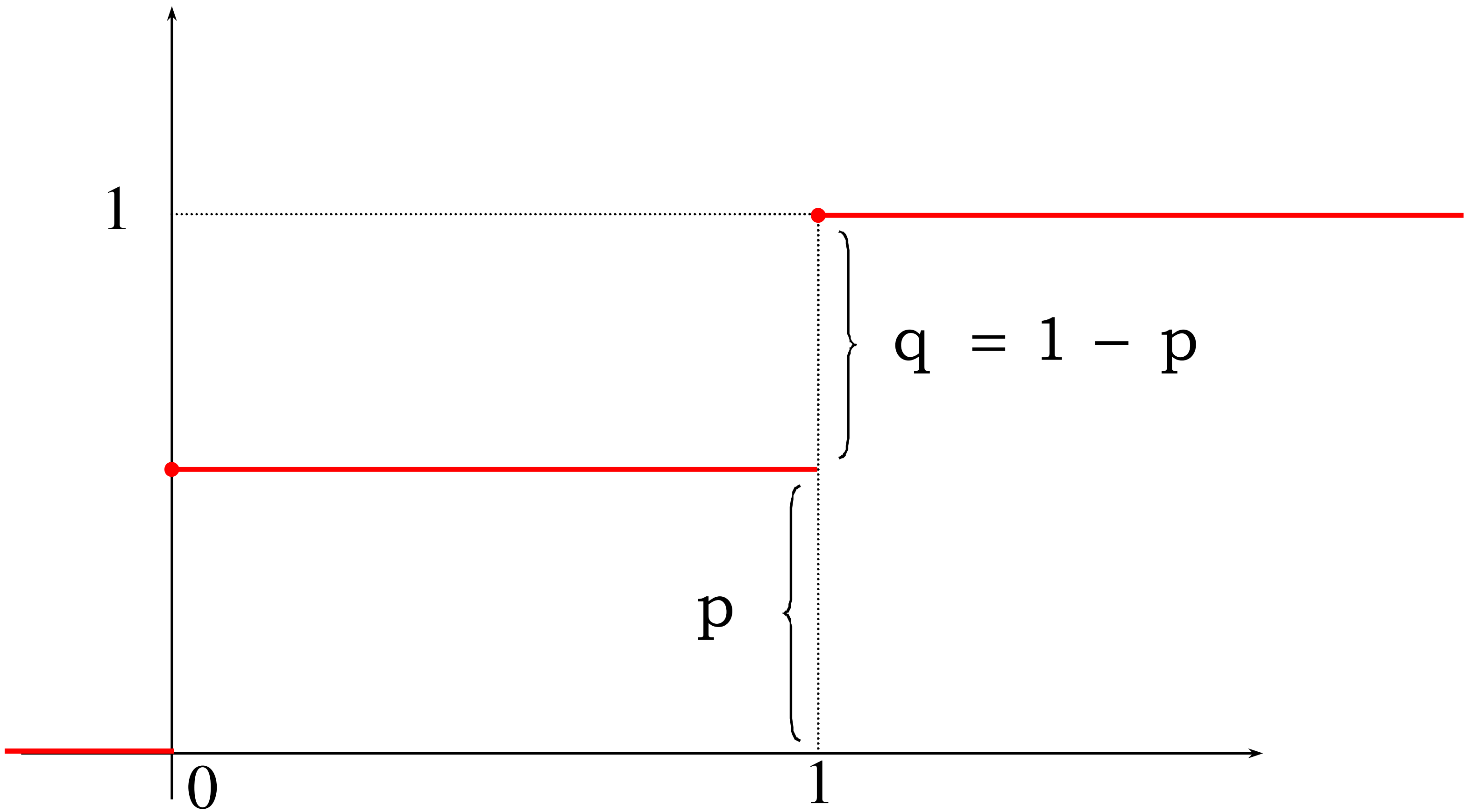
$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Exemplo

Seja X = número de caras no lançamento de uma moeda. Então a FD de X é:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ p & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

A Função de Distribuição



Observação:

Seja X é uma variável aleatória discreta (VAD) com FD F(x), então:

$$P(X = x_i) = f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Exercício

Uma fonte de informação gera símbolos ao acaso a partir de um alfabeto de quatro letras { a, b, c, d } com probabilidades f(a) = ½, f(b) = ¼ e f(c) = f(d) = 1/8. Um esquema codifica esses símbolos em binário da seguinte forma: a $\rightarrow$ 0, b $\rightarrow$ 10, c $\rightarrow$ 110, d $\rightarrow$ 111. Seja X a VA que representa o tamanho do código, isto é, o número de dígitos binários (bits).

(a) Qual é o conjunto de valores de X?

(b) Assumindo que a geração dos símbolos são independentes, encontre: $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ e $P(X > 3)$.

(c) Determine a FD de X.

(d) Represente a FD graficamente.

Modelos Discretos de Probabilidade

- Bernoulli
- Binomial
- Hipergeométrica
- Poisson

Bernoulli

Experimento

Qualquer um que corresponda a apenas dois resultados. Estes resultados são anotados por “0” ou “fracasso” e “1” ou “sucesso”. A probabilidade de ocorrência de “sucesso é representada por “p” e a de insucesso por “q = 1 – p”.

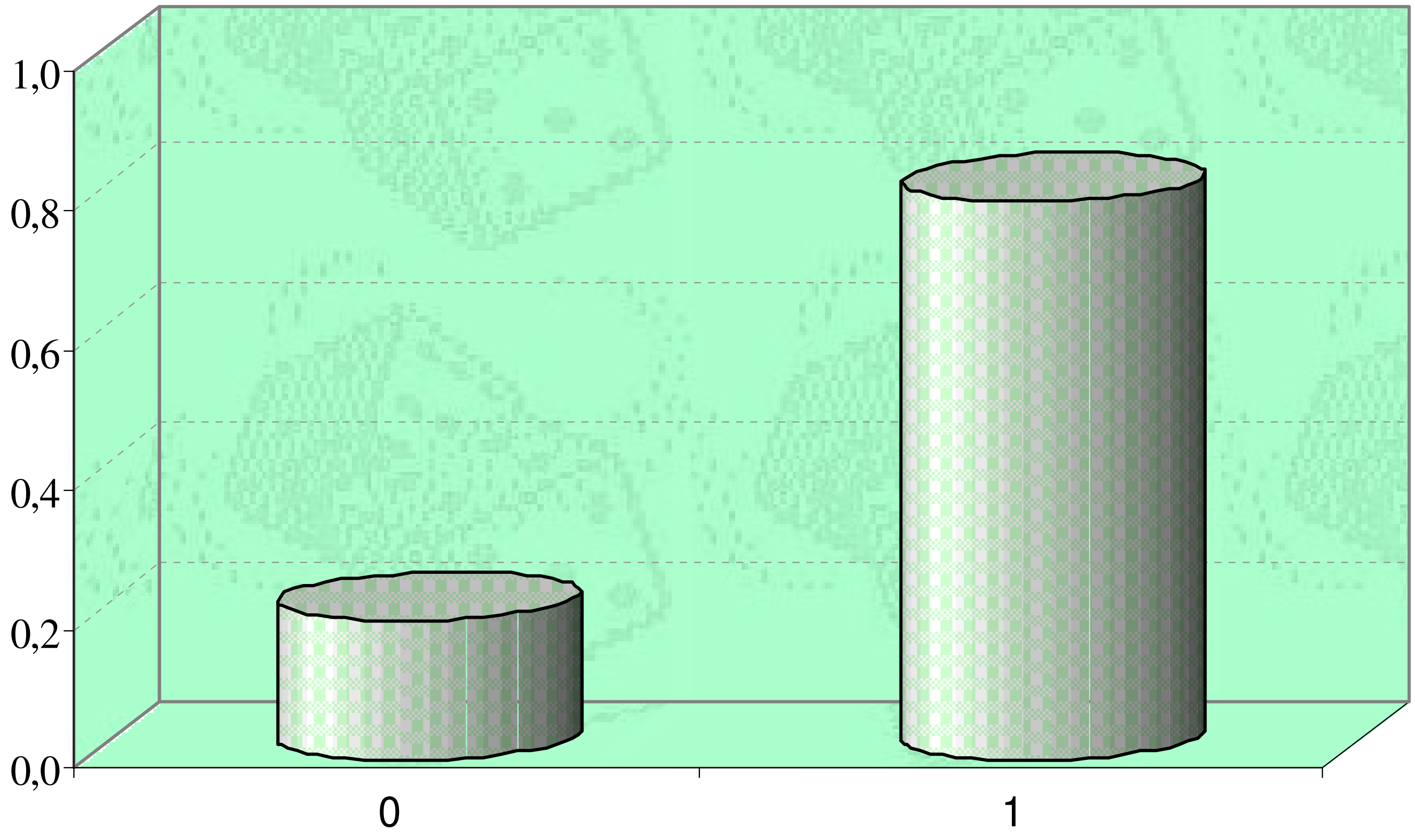
Conjunto de Valores

$$X(S) = \{ 0, 1 \}$$

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1 - p & \text{se } x = 0 \\ p & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

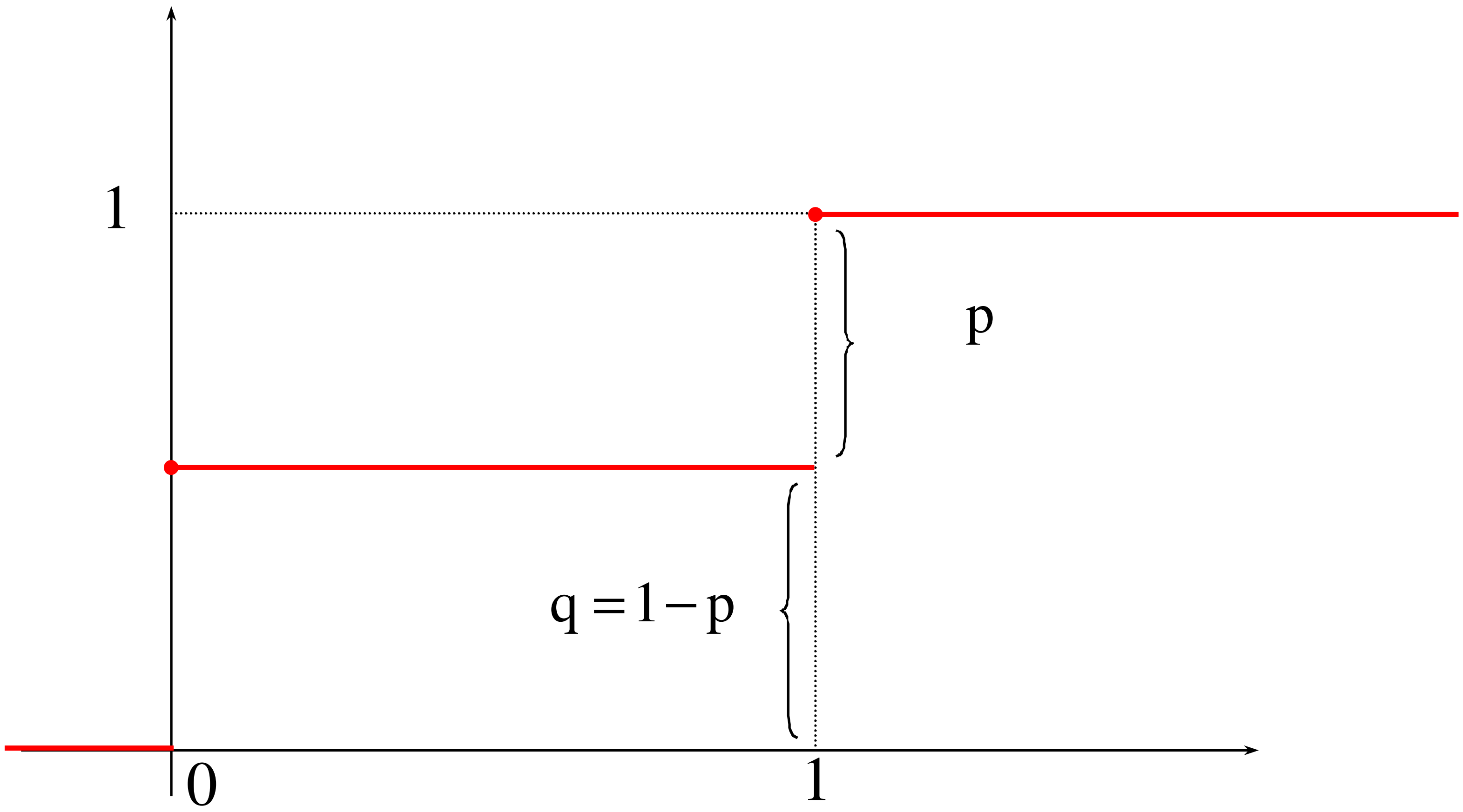
A Função de Probabilidade (fp)



A Função de Distribuição (FD)

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ q & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Função de Distribuição



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \sum x.f(x) = 0.q + 1.p = p$$

Variância

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$$

$$= (0^2.q + 1^2.p) - p^2 =$$

$$= p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

Exemplo

Suponha que um circuito é testado e que ele seja rejeitado com probabilidade 0,10. Seja X = "o número de circuitos rejeitados em um teste". Determine a distribuição de X.

Como se trata de um único teste, a variável X é Bernoulli com p =10%, assim a distribuição é:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0,9 & \text{se } x = 0 \\ 0,1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Binomial

Experimento

Como existem apenas duas situações: A ocorre ou não, pode-se determinar a probabilidade de A não ocorrer como sendo $q = 1 - p$. A VAD definida por X = "número de vezes que A ocorreu nas 'n' repetições de E" é denominada BINOMIAL.

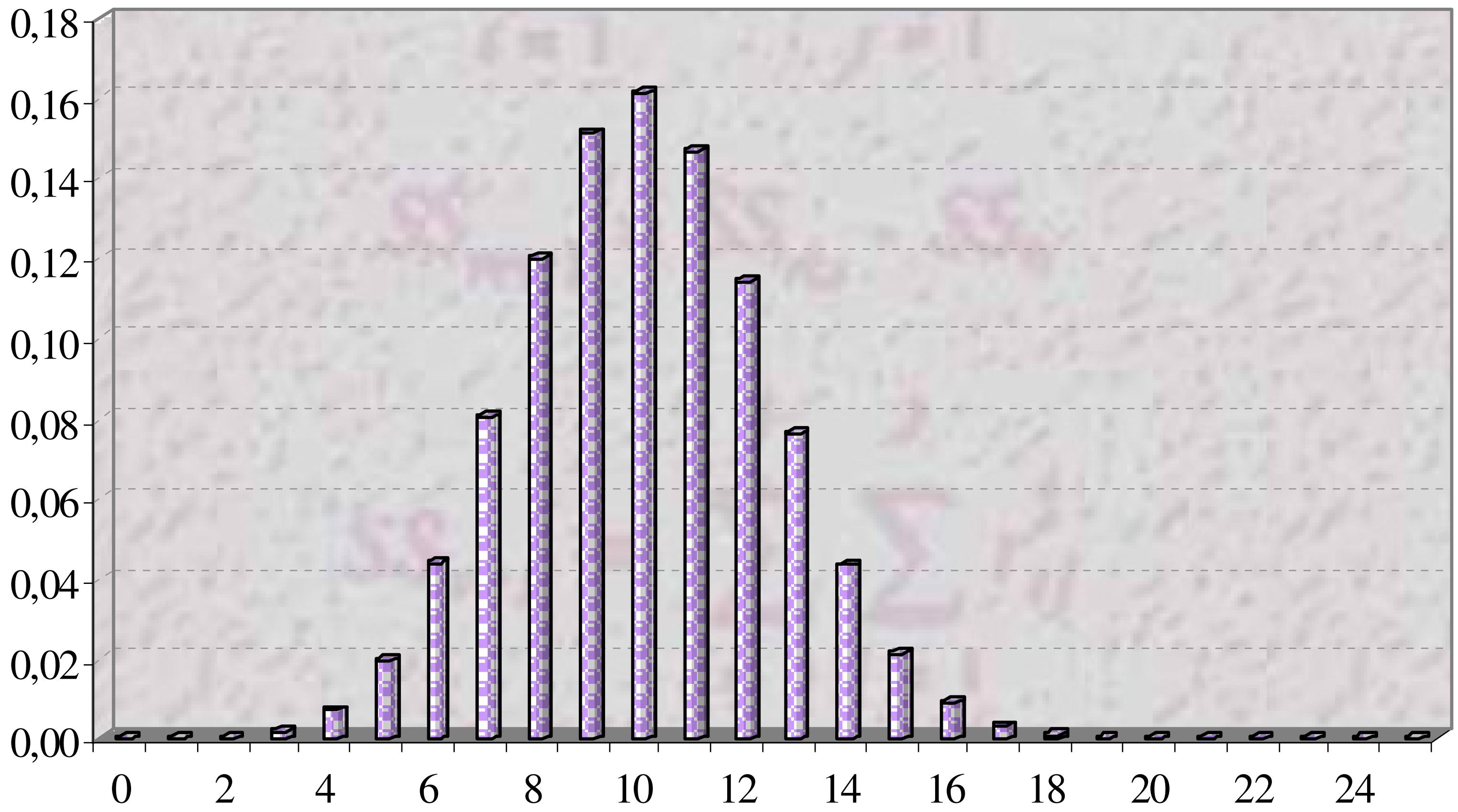
Conjunto de Valores

$$X(S) = \{0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n\}$$

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

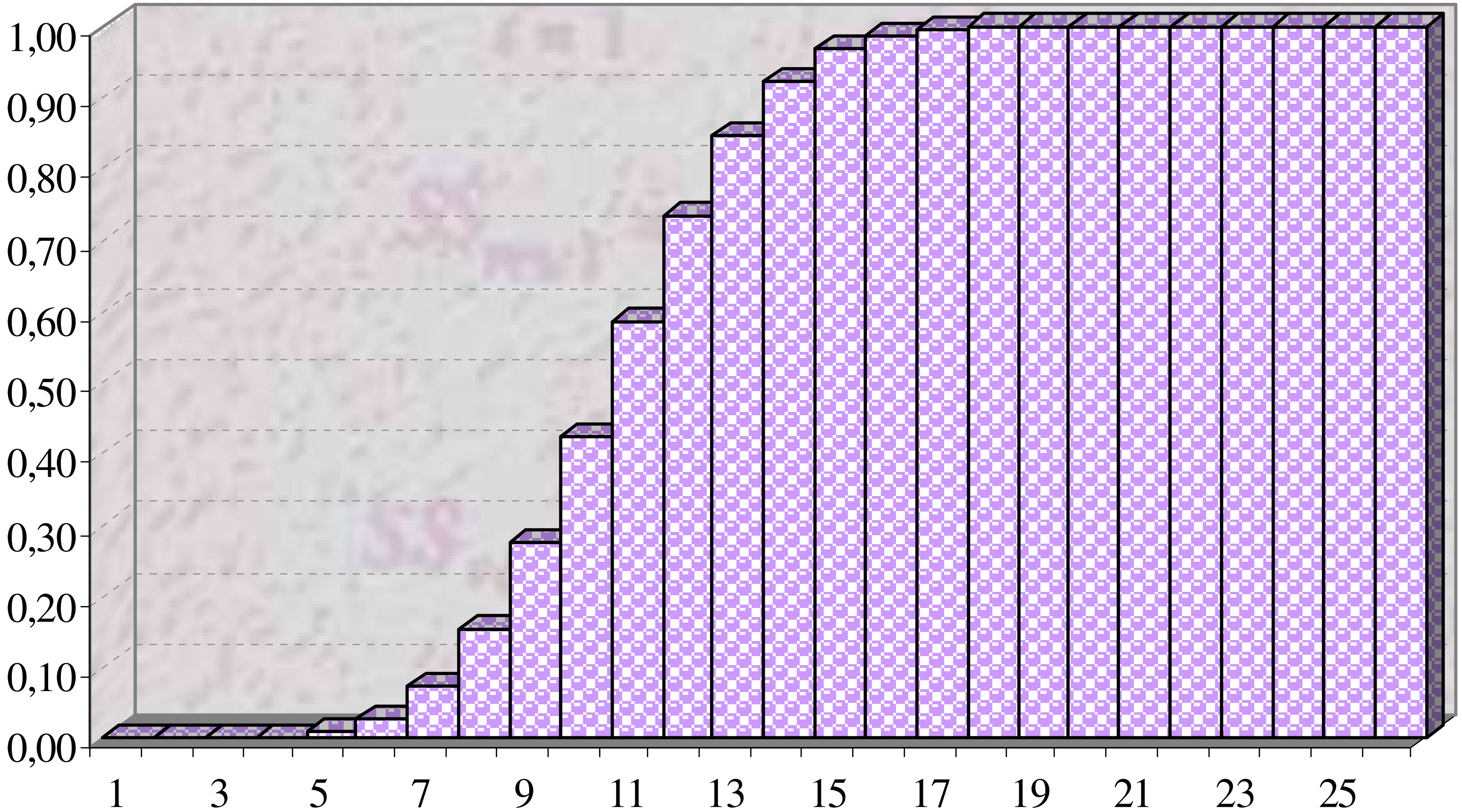
A Função de Probabilidade (fp)



A Função de Distribuição (FD)

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{se } 0 \leq x \leq n \\ 1 & \text{se } x > n \end{cases}$$

A Função de Distribuição



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \sum x.f(x) \;= \sum x.\binom{n}{x} p^x q^{n-x} = np$$

Variância

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \sum x^2.\binom{n}{x} p^x q^{n-x} = n(n-1)\,p^2 + np$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$$

$$n(n-1)p^2 + np - (np)^2 =$$

$$= -np^2 + np = np(1-p) = npq$$

Assim:

$$E(X) = np$$

$$\sigma_X = \sqrt{npq}$$

Suponha que um circuito é testado e que ele seja rejeitado com probabilidade 0,10. Seja X = “o número de circuitos rejeitados em 10 testes”. Determine a distribuição de X.

Como se tratam de 10 testes a variável X é Binomial com p =10%, assim a distribuição é:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{10}{x}(0{,}1)^{x} . (0{,}9)^{10-x}$$

$$\text{para } x = 0, 1, 2, ..., 10$$

Exemplo

Uma fábrica recebe um lote de 100 peças das quais cinco são defeituosas. Suponhamos que a fábrica aceite todas as 100 peças se não houver nenhuma defeituosa em uma amostra aleatória de 10 peças selecionadas para inspeção. Determinar a probabilidade de o lote ser aceito.

Tem-se:

$$n = 10 \text{ e } p = 5/100 = 0{,}05$$

$$f(0) = P(X = 0) = \binom{10}{0} 0{,}05^{0}\, 0{,}95^{10} =$$

$$= 59{,}87\%$$

Tem-se:

n = 10 e p = 5/100 = 5%

Então:

$$f(0) = P(X = 0) = \binom{10}{0}.(0,5)^{0}.(0,95)^{10} =$$

$$= 59,87\%$$

Hipergeométrica

Experimento:

A distribuição Binomial é deduzida com base em “n” repetições de um experimento de maneira independente (isto é, p = constante), ou retiradas com reposição de uma população finita.

Se a experiência consistir na seleção de objetos, **sem reposição**, de uma população finita, de tamanho “N”, onde “r” apresentam uma característica “N – r” não apresentam esta característica, então existirá dependência entre as repetições.

Neste caso a variável aleatória X = "número de objetos com a característica r em uma amostra de tamanho n", terá uma distribuição denominada de Hipergeométrica.

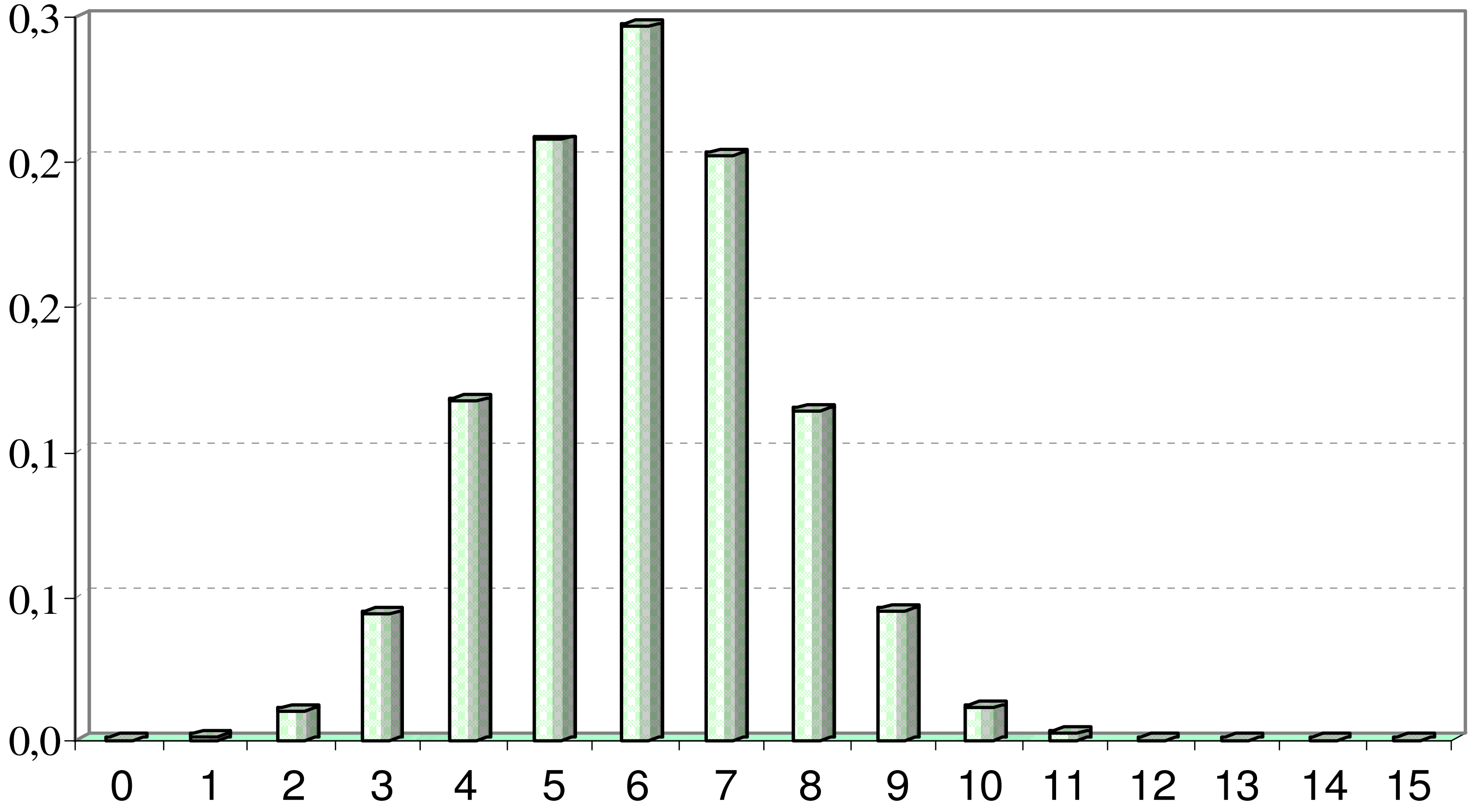
Conjunto de Valores

$$x : \text{máx}\{0, n–N+r\}, \ldots, \text{mín}\{r, n\}$$

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

A Função de Probabilidade (fp)
H(20; 15; 50)



A Função de Distribuição (FD)

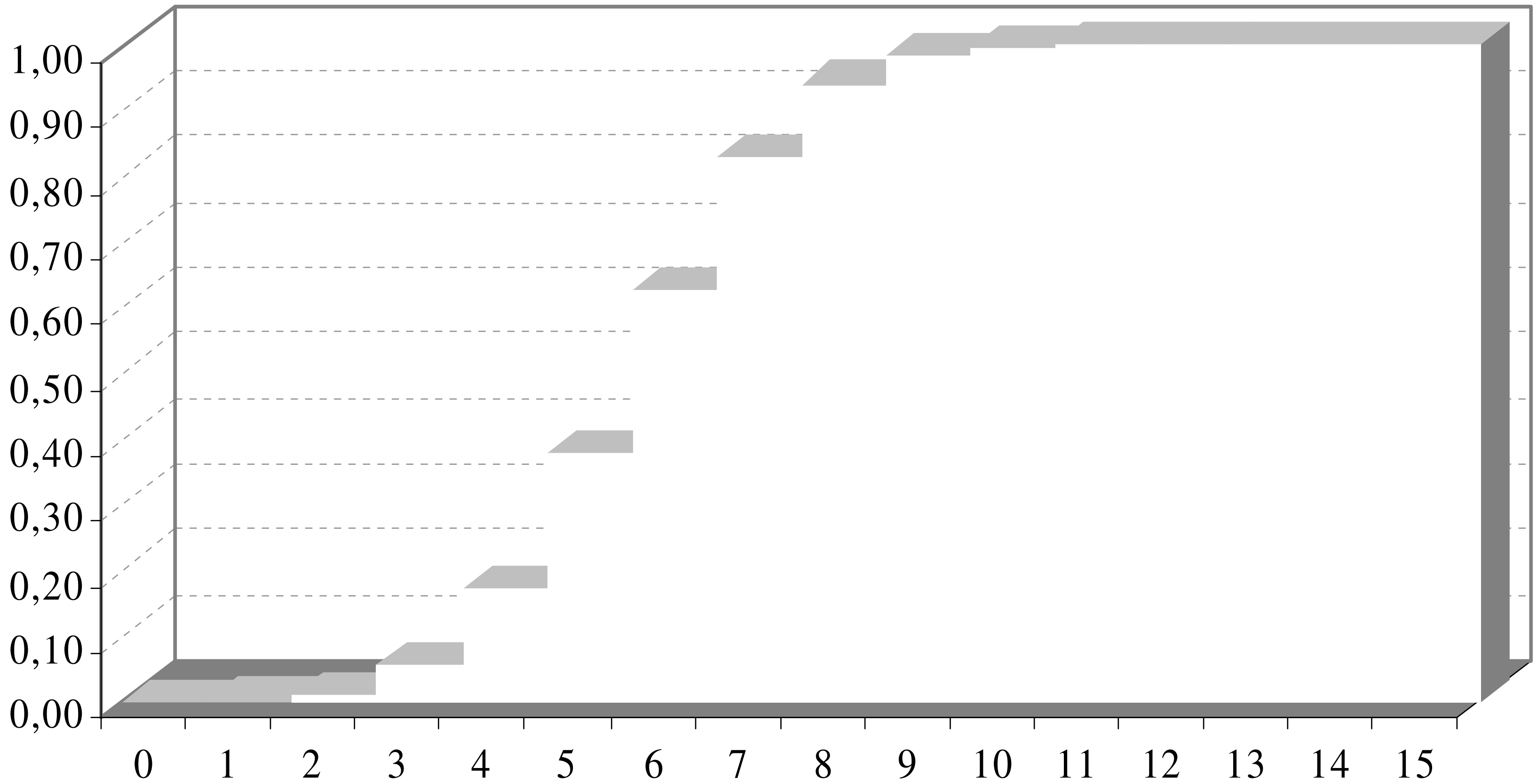
$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < j \\ \displaystyle\sum_{x=j}^{k} \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} & \text{se } j \leq x \leq k \\ 1 & \text{se } x > k \end{cases}$$

onde $j = \text{máx}\{0,\ n - N + r\}$

$k = \text{mín}\{r,\ n\}$

Função de Distribuição

H(20; 15; 50)



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = np$$

Desvio Padrão

$$\sigma_X = \sqrt{npq}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \qquad \text{Onde } p = \frac{r}{N}$$

Exemplo

Uma fábrica recebe um lote de 100 peças das quais cinco são defeituosas. Suponhamos que a fábrica aceite todas as 100 peças se não houver nenhuma defeituosa em uma amostra aleatória de 10 peças selecionadas para inspeção. Determinar a probabilidade de o lote ser aceito.

Pela Hipergeométrica:

$N = 100, r = 5, n = 10$

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} = 58{,}38\%$$

Pela Binomial:

$n = 10$ e $p = 5/100 = 5\%$

$$f(0) = P(X = 0) = \binom{10}{0}.(0{,}05)^{0}.(0{,}95)^{10} =$$

$$= 59{,}87\%$$

Poisson

Experimento

Na Binomial a variável que interessa é o número de sucessos em um intervalo discreto (n repetições de um experimento). Muitas vezes, entretanto, o interesse é o número de sucessos em um intervalo contínuo, como o tempo, área, superfície, etc.

Para determinar a f(x) de uma distribuição deste tipo, será suposto que:

(i) Eventos definidos em intervalos não sobrepostos são independentes;

(ii) Em intervalos de mesmo tamanho as probabilidades de um mesmo número de sucessos são iguais;

(iii) Em intervalos muito pequenos a probabilidade de mais de um sucesso é desprezível.

(iv) Em intervalos muito pequenos a probabilidade de um sucesso é proporcional ao tamanho do intervalo.

Definição:

Se uma variável satisfaz estas quatro propriedades ela é dita VAD de POISSON. Se X é uma VAD de POISSON, então a função de probabilidade de X é dada por:

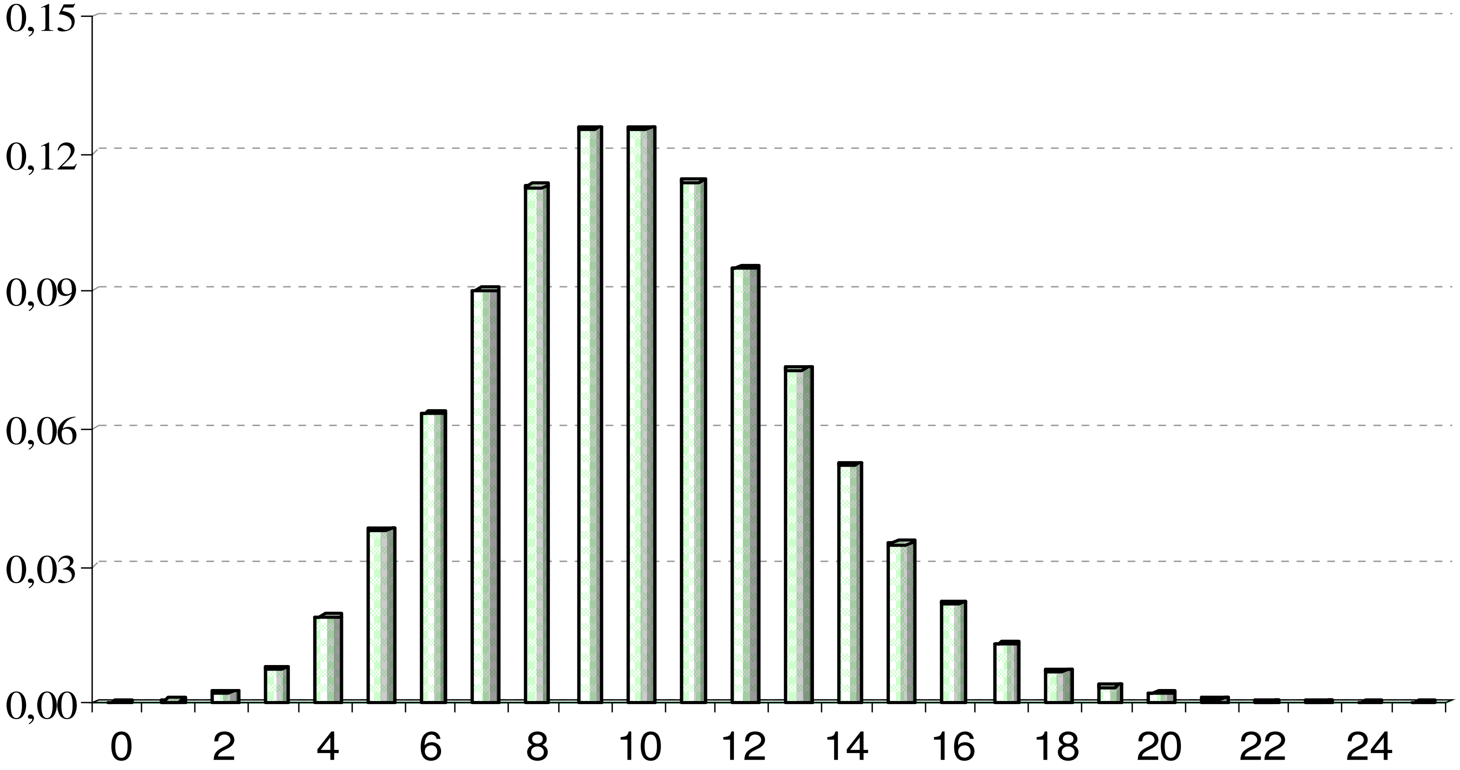
A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}$$

$$\text{para} \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

"λ" é denominada de taxa de sucessos

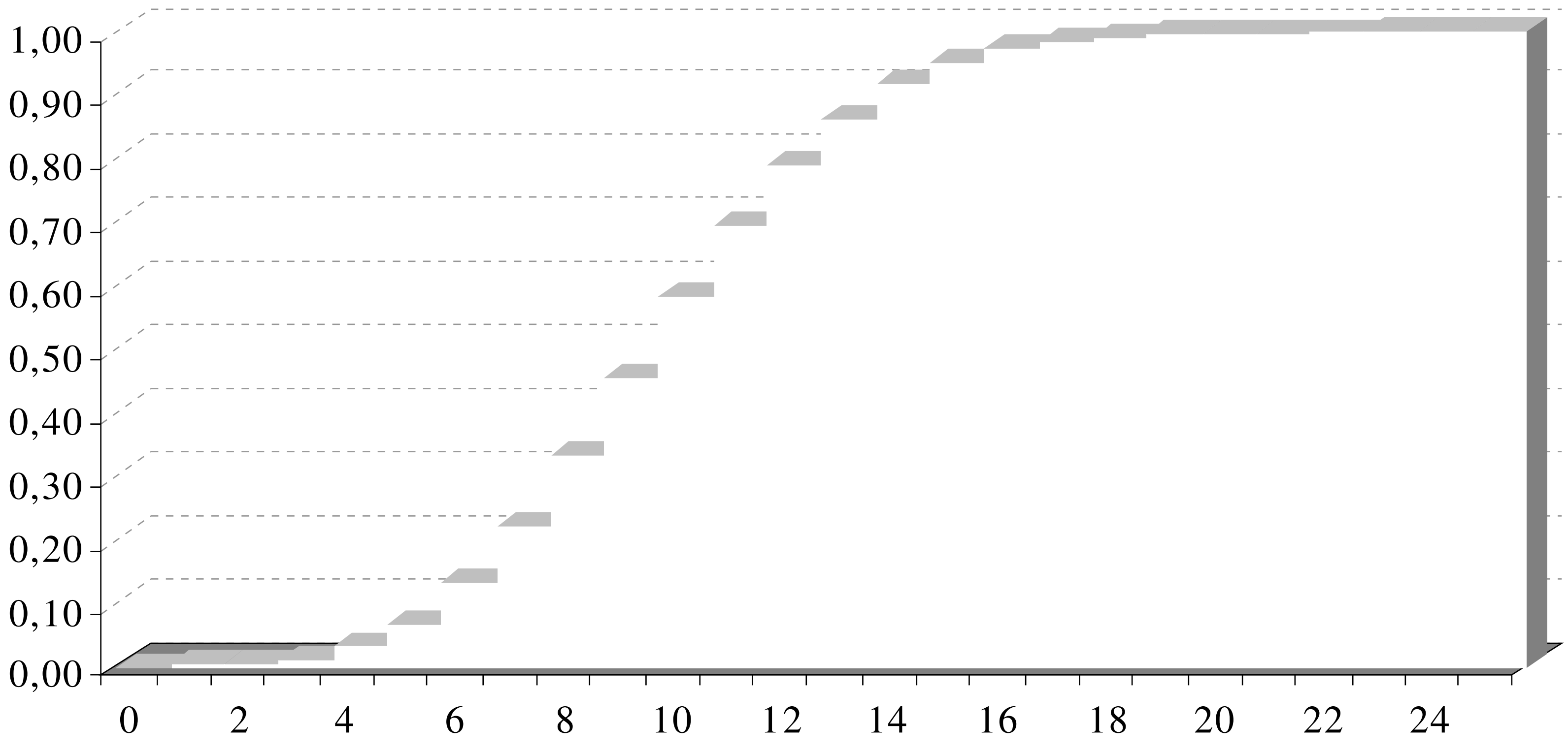
A Função de Probabilidade (fp) - P(10)



A Função de Distribuição (FD)

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{x} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k}}{k!} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Função de Distribuição - P(10)



Características:

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \lambda$$

Desvio Padrão

$$\sigma_X = \sqrt{\lambda}$$

Exemplo:

O número de consultas a uma base de dados computacional é uma VAD de Poisson com $\lambda = 6$ em um intervalo de dez segundos. Qual é a probabilidade de que num intervalo de 5 segundos nenhum acesso se verifique?

A taxa de consultas é de "**seis**" em "**dez**" segundos em "**cinco**" segundos teremos uma taxa de $\lambda = 3$ consultas.

Então:

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{e^{-3}.3^{0}}{0!} =$$

$$= e^{-3} = 4{,}98\%$$

Exemplo:

Considerando o exemplo dado na Hipergeométrica, que foi resolvido, também, pela Binomial, é possível ainda utilizar a Poisson. Para isto deve-se fazer $\lambda = np$.

Então:

$$\lambda = 10.0{,}05 = 0{,}5.$$

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{e^{-0,5}.0{,}5^{0}}{0!} =$$

$$= e^{-0,5} = 60{,}65\%$$

Em resumo:

Binomial: 59,85%

Hipergeométrica: 58,38%

Poisson: 60,65%

Como pode ser visto, nesse caso, é possível resolver um mesmo problema, utilizando três modelos diferentes.