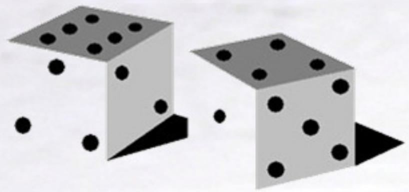


Probabilidade Bivariada

Prof. Lorí Viali, Dr.
viali@mat.ufgrs.br
http://www.mat.ufrgsbr/~viali/

Motivação

Em muitas situações precisamos lidar com duas ou mais variáveis aleatórias ao mesmo tempo. Por exemplo o comprimento e a largura de uma determinada peça.

Distribuições Multivariadas

Uma distribuição de probabilidade pode ser unidimensional ou n-dimensional. Distribuições n-dimensionais ($n \geq 2$) são denominadas de distribuições multivariadas.

VA n-dimensional

Se $X_1, X_2, ..., X_n$ forem "n" funções, cada uma associando um número real a cada resultado $s \in S$, denominaremos $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de variável aleatória n-dimensional.

Um caso especial de distribuição multivariada envolve uma variável aleatória bidimensional que é denominada de distribuição bivariada.

VADB

A variável (X, Y) será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis de (X, Y) forem finitos ou infinitos numeráveis, isto é, os valores possíveis são **(x_i, y_j)** com **$i = 1, 2, 3, \ldots$ e $j = 1, 2, 3, \ldots$**

A função de probabilidade

A cada variável aleatória discreta bidimensional está associada uma função de probabilidade que satisfaz as seguintes condições:

(i) $p(x_i, y_j) \geq 0$ para i, j = 1, 2, 3, ...

(ii) $$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$$

A função "p" definida para todo (x_i, y_i) no contradomínio de (X, Y) é denominada de **função de probabilidade** de (X, Y).

A distribuição conjunta

A coleção dos pares:

$[(x_i, y_j), p(x_i, y_j)]$, $i, j = 1, 2, 3, ...$

é, denominada de distribuição de probabilidade conjunta da variável aleatória discreta bidimensional (X, Y).

Exemplo:

Uma pequena fábrica opera com dois turnos diários. Em um estudo sobre o padrão de ausências ao trabalho as duas variáveis aleatórias de interesse são: X = número de faltas no turno da manhã e Y = número de ausências no turno da tarde do mesmo dia.

Baseado numa longa série de registros, de funcionários, o diretor de pessoal, determinou a distribuição conjunta de X e Y mostrada na tabela (próxima lâmina).

Distribuição Conjunta

X \ Y	0	1	2	3	Σ
0	0,05	0,05	0,10	0,00	**0,20**
1	0,05	0,10	0,25	0,10	**0,50**
2	0,00	0,15	0,10	0,05	**0,30**
Σ	**0,10**	**0,30**	**0,45**	**0,15**	**1,00**

Interpretação

Na tabela o valor 0,25 da célula ($X = 1$, $Y = 2$) significa que em 25% dos dias um trabalhador faltou no turno da manhã e dois faltaram no turno da tarde. O valor de 20% da soma da primeira linha, indica que em 20% dos dias ninguém faltou no turno da manhã.

Da mesma forma, o valor de 45% na quarta coluna, indica que em 45% dos dias, dois trabalhadores não compareceram no turno da tarde.

Exercício:

Suponha que uma palavra da frase:

"**O Grêmio é e sempre será o melhor time gaúcho**" é selecionada ao acaso.

Sejam:

X = tamanho da palavra e

Y = número de vogais da palavra, duas variáveis aleatórias.

Determinar a distribuição conjunta de (X, Y).

Distribuição Conjunta

X \ Y	1	2	3
1	0,4	0,0	0,0
4	0,0	0,2	0,0
6	0,0	0,2	0,2

Distribuições Marginais

A cada variável bidimensional (X, Y) estão associados duas variáveis aleatórias X e Y.

Os valores de X considerados em conjunto com as probabilidades que aparecem na última coluna à direita formam a distribuição marginal de X e os valores de Y considerados com as probabilidades da última linha da tabela formam a distribuição marginal de Y.

Distribuições Marginais

No caso discreto a obtenção da distribuição marginal de X é dado por:

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

$$= P(X = x_i, Y = y_1 \text{ ou } Y = y_2 \text{ ou } ....)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j)$$

Definição:

Se (X, Y) é uma VA discreta bidimensional, então as coleções de pares:

$[x, p(x) = P(X = x)]$ e

$[y, p(y) = P(Y = y)]$

são denominadas de **Distribuições Marginais**.

Exemplo:

Considerando a distribuição conjunta (X, Y) onde X = faltas no turno da manhã e Y = faltas no turno da tarde, tem-se, as seguintes distribuições marginais.

Distribuições Marginais

x	p(x)
0	0,20
1	0,50
2	0,30
Σ	**1,00**

y	p(y)
0	0,10
1	0,30
2	0,45
3	0,15
Σ	**1,00**

Exercício:

Considerando a distribuição conjunta (X, Y) onde X = tamanho da palavra e Y = número de vogais, determine as distribuições marginais.

Solução

Y / X	1	2	3	Σ
1	0,4	0,0	0,0	**0,4**
4	0,0	0,2	0,0	**0,2**
6	0,0	0,2	0,2	**0,4**
Σ	**0,4**	**0,4**	**0,2**	**1,0**

Distribuições Condicionais

No estudo descritivo com distribuições conjuntas foram calculados os percentuais em relação as linhas e as colunas. Na probabilidade este cálculo é denominado de Distribuições Condicionais.

Definição:

Seja x_i um valor da VAD X tal que $p(x_i) > 0$. A probabilidade:

$P(Y = y_j \mid X = x_i) =$

$P(X = x_i, Y = y_j) / P(X = x_i) =$

$P(y_j \mid X = x_i)$ para $j = 1, 2, \ldots, n$

é denominada probabilidade condicional de $Y = y_j$, dado que $X = x_i$.

Exemplo:

Com base na tabela do número de ausências ao trabalho nos turnos da manhã e da tarde, determine a distribuição condicional de $P(Y \mid x = 0)$.

$$P(Y = y \mid x = 0) =$$

$$= P(Y = y; x = 0)/P(x = 0) =$$

$$= P(Y \mid x = 0).$$

Assim para y = 0, 1, 2 e 3, tem-se:

$$p(0 \mid x = 0) = P(y = 0;\, x = 0)/P(x = 0) =$$

$$= 0{,}05/0{,}20 = 0{,}25.$$

$$p(1 \mid x = 0) = P(y = 1;\, x = 0)/P(x = 0) =$$

$$= 0{,}05/0{,}20 = 0{,}25.$$

$$p(2 \mid x = 0) = P(y = 2;\ x = 0)/P(x = 0) =$$

$$= 0{,}10/0{,}20 = 0{,}50.$$

$$p(3 \mid x = 0) = P(y = 3;\ x = 0)/P(x = 0) =$$

$$= 0/0{,}20 = 0.$$

y	$p(y \mid x = 0)$
0	0,25
1	0,25
2	0,50
Σ	1,00

Exercício:

Qual é a distribuição do número de vogais se o tamanho da palavra é seis.

Solução

X \ Y	1	2	3	Σ
1	0,4	0,0	0,0	**0,4**
4	0,0	0,2	0,0	**0,2**
6	0,0	0,2	0,2	**0,4**
Σ	**0,4**	**0,4**	**0,2**	**1,0**

$$p(2 \mid x = 6) = P(y = 2; x = 6)/P(x = 6) =$$

$$= 0{,}2/0{,}4 = 0{,}5.$$

$$p(3 \mid x = 6) = P(y = 3; x = 6)/P(x = 6) =$$

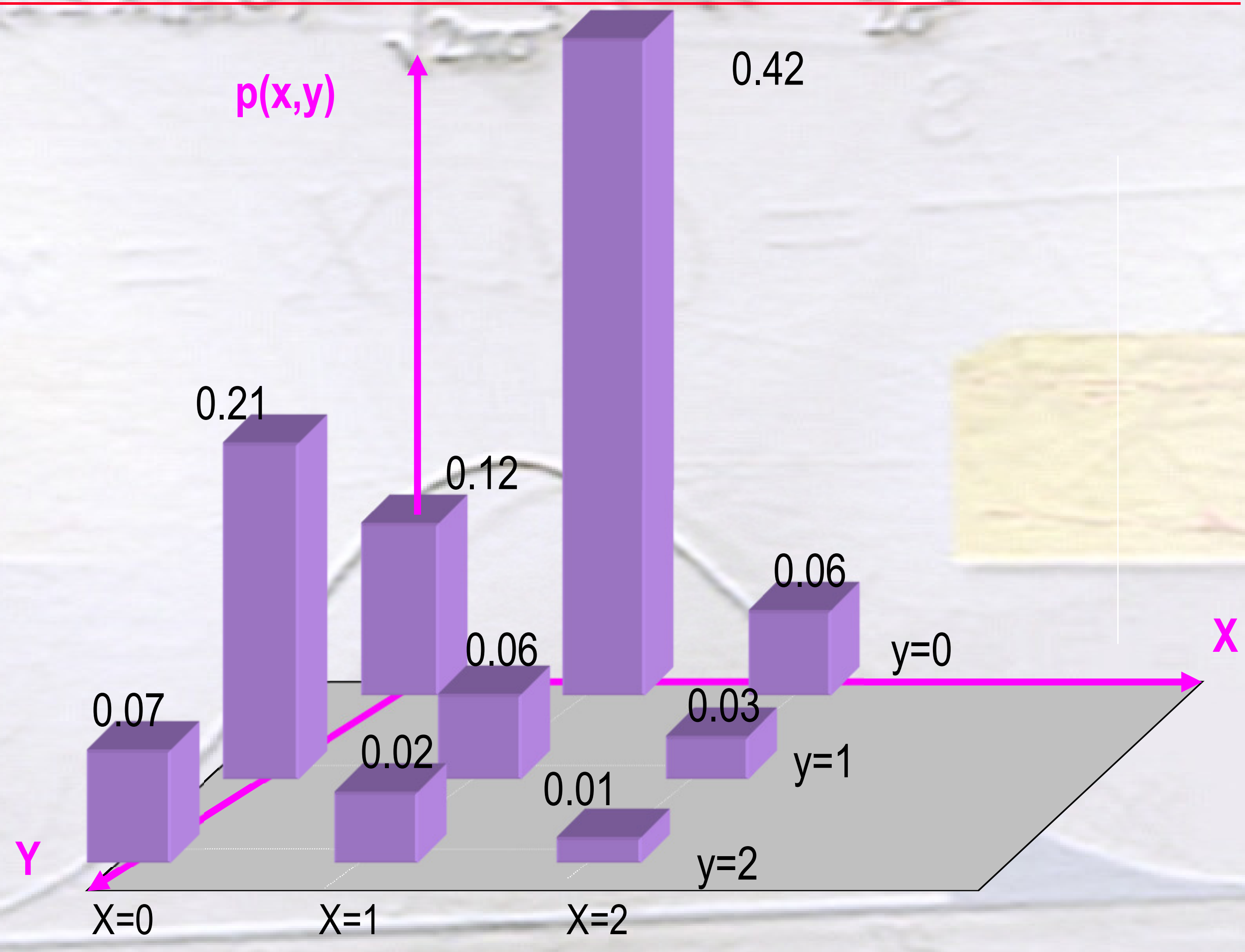
$$= 0{,}2/0{,}40 = 0{,}5.$$

y	$P(y \mid x = 6)$
2	0,5
3	0,5
Σ	1,0

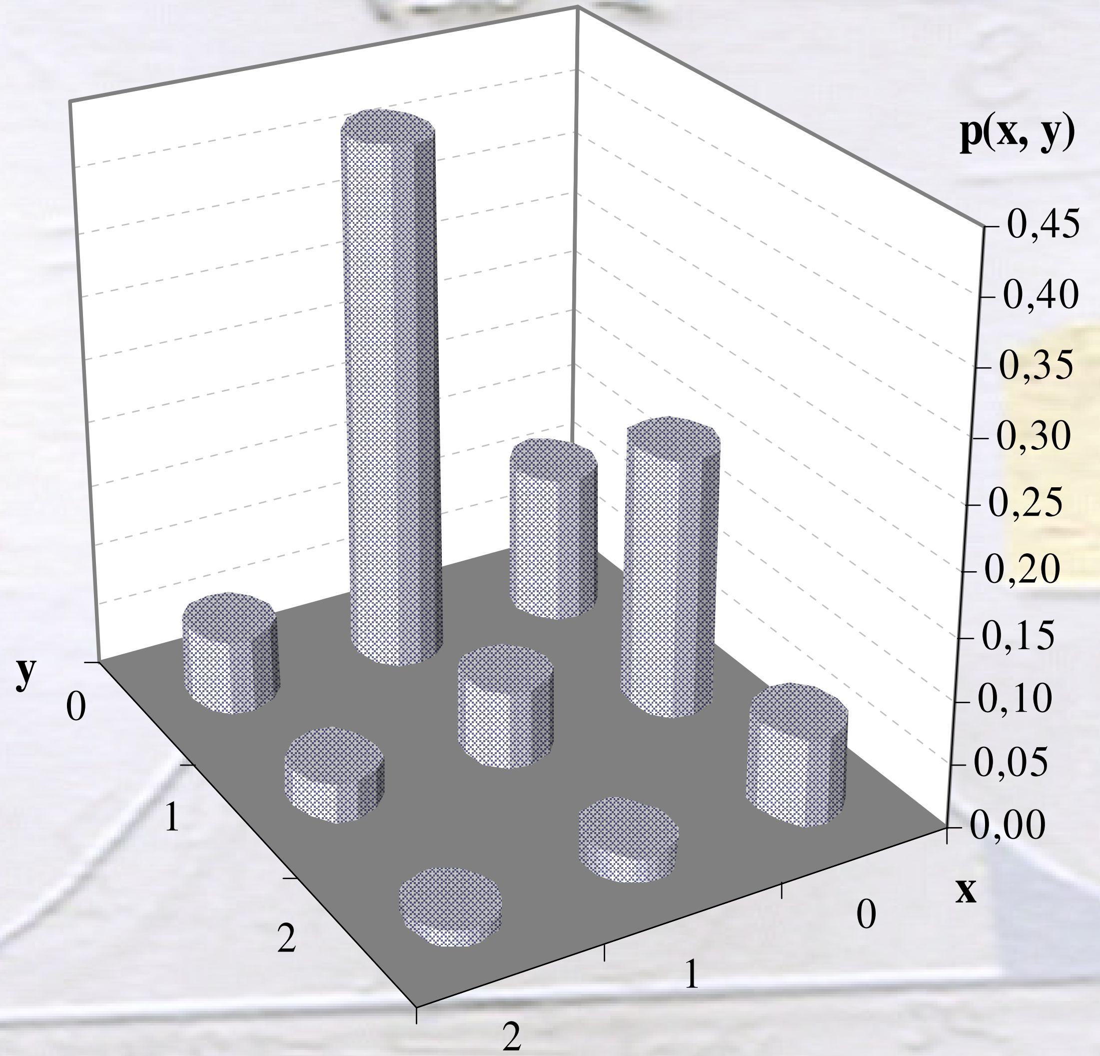
Representação gráfica

Representar graficamente a distribuição bivariada apresentada na tabela abaixo:

Y \ X	0	1	2
0	0,12	0,42	0,06
1	0,21	0,06	0,03
2	0,07	0,02	0,01



p(x,y)
0.42
0.21
0.12
0.06
0.07
0.02
0.06
0.01
0.03
X
Y
y=0
y=1
y=2
X=0
X=1
X=2


p(x, y)
0,45
0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0,00
y
0
1
2
x
0
1
2

Descrevendo a distribuição

- A distribuição conjunta pode ser descrita pela média, variância e desvio padrão de cada uma das variáveis;
- Isto é feito através das distribuições marginais.

Descrevendo a distribuição

Por exemplo, considerando a distribuição representada graficamente, tem-se:

x	**p(x)**	**p(y)**
0	0,4	0,6
1	0,5	0,3
2	0,1	0,1

E(X) = 0,70

V(X) = 0,41

E(Y) = 0,50

V(Y) = 0,45

Ela, pode ainda ser descrita em termos do relacionamento entre as duas variáveis. Para descrever o relacionamento entre as duas variáveis existe a covariância e o coeficiente de correlação.

A covariância

A covariância entre as variáveis aleatórias X e Y é dada por: $COV(X, Y) = E[(X - E(X)(Y - E(Y)].$ Ou seja, é o valor médio do produto dos desvios de X e Y em relação as suas médias.

Se X assumir os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e Y os valores $y_1, y_2, \ldots, y_m$ e $P(X = x_i, Y = y_i) = p(x_i, y_j)$, então a expressão:

$$COV(X, Y) = E[(X - E(X)(Y - E(Y)] =$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y).$$

Pode ser escrita como:

$$\text{COV}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[x_i - E(X)][y_i - E(Y)].p(x_i, y_i) =$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i\, y_i\,.p(x_i, y_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i.p(x_i).\sum_{j=1}^{m} y_j.p(y_j)$$

Exemplo:

Calcular a covariância da distribuição anterior.

$$COV(X, Y) = \Sigma\Sigma(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)p(x, y) =$$

$$= (0 - 0.7)(0 - 0.5)p(0, 0) + \ldots$$

$$+ \ldots +$$

$$= (2 - 0.7)(2 - 0.5)p(2, 2) = \mathbf{-0.15}$$

O Coeficiente de Correlação

A covariância varia no intervalo $(-\infty, +\infty)$ e é, portanto difícil de interpretar. Por isto trabalha-se, em geral, com o coeficiente de correlação, que é calculado da seguinte forma: $\rho = COV(X, Y)/\sigma_X\sigma_Y$.

A grande vantagem da utilização do coeficiente de correlação é que ele varia no intervalo [-1; +1], sendo assim de fácil interpretação.

Quando mais próximo de -1 ou +1 estiver o coeficiente maior é a associação linear entre as variáveis. Um coeficiente próximo de zero, indica ausência de relacionamento linear.

Exemplo:

Para a tabela, do exemplo anterior, o coeficiente de correlação será:

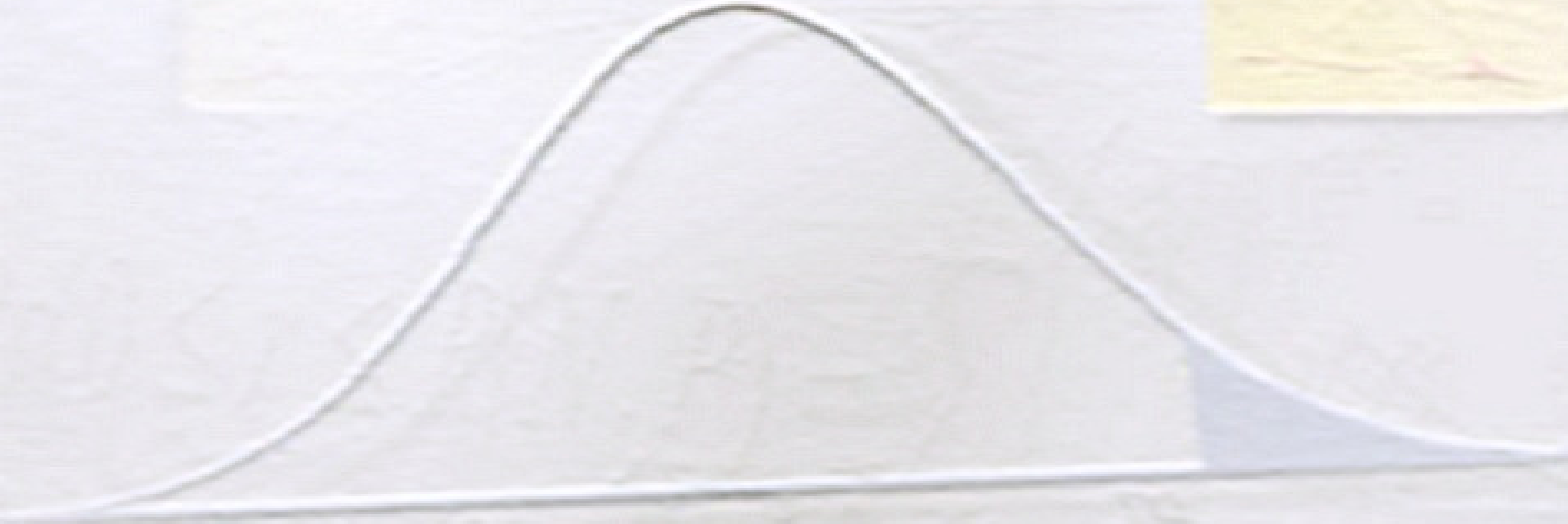
$$\rho = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-0{,}15}{\sqrt{0{,}41.045}} = -0{,}35$$

Estas expressões para o cálculo da covariância e do coeficiente de correlação não são práticas. Existe uma maneira mais simples do obter estes resultados. Antes, porém, é necessário definir mais alguns conceitos.

Funções de Variáveis Aleatórias

- Função de uma variável aleatória;
- Função de duas variáveis aleatórias:
  - Resultado unidimensional;
  - Resultado bidimensional.

01. Variável Aleatória Discreta



Função de uma variável aleatória

Seja X uma variável aleatória discreta com fp $p(x_i)$. Seja $Y = f(x)$. Se X for monótona, então $y_i = f(x_i)$, onde x_i são os valores de X, com probabilidades: $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$

Se X não for monótona, então aos valores possíveis $y_i = f(x_i)$ de Y se associará a probabilidade igual a soma das probabilidades dos valores de X pertencente à imagem inversa de y_i por f.

Exemplo um:

Determinar a distribuição da variável Y = 3X, dada a distribuição de X da tabela:

x	1	3	5
p	0,4	0,1	0,5

Solução:

Como $Y = 3X$ é monótona, a distintos valores de X correspondem distintos valores de Y. Assim:

y	3	9	15
q	0,4	0,1	0,5

Exemplo dois:

Determinar a distribuição da variável $Y = X^2$, se a distribuição de X é a da tabela:

x	-1	-2	1	2
p	0,3	0,1	0,2	0,4

Solução:

Como $Y = X^2$ não é monótona, a correspondência entre os valores de X e de Y não é biunívoca. Então, por definição, a probabilidade de cada y_i será igual a soma das probabilidades dos valores de X correspondendo a y_i, isto é:

$$P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) =$$

$$= 0,3 + 0,2 = 0,5$$

$$P(Y = 4) = P(X = -2) + P(X = 2) =$$

$$= 0,1 + 0,4 = 0,5$$

y	1	4
p	0,5	0,5

02. Funções de duas variáveis aleatórias

O problema consiste em dada a distribuição de probabilidade conjunta de (X, Y), determinar qual é a distribuição de probabilidade de $Z = H(X, Y)$.

Considere a variável Z = H(X, Y), uma função de duas variáveis aleatórias X e Y. Z = Z(s) é também uma variável aleatória, pois:

- Executa-se o experimento **E** obtendo "s";
- Calculam-se os números X(s) e Y(s);
- Calcula-se o número Z = H[X(s), Y(s)].

O valor de Z depende de "s", o resultado original do experimento. Ou seja, Z = Z(s) é uma função que associa um número real Z(s) a todo resultado s ∈ S, em consequência Z é uma variável aleatória.

Se (X, Y) for discreta, o problema é simples. Suponha que (X, Y) seja uma VADB. Então, as seguintes variáveis aleatórias unidimensionais são de interesse:

- $X + Y$;
- $X - Y$
- XY;
- X/Y;
- $\min(X, Y)$;
- $\max(X, Y)$;
- etc.

Exemplo:

Considere a distribuição conjunta da seguinte variável Bidimensional:

X \ Y	0	1	2	3	Σ
0	0,05	0,05	0,10	0,00	**0,20**
1	0,05	0,10	0,25	0,10	**0,50**
2	0,00	0,15	0,10	0,05	**0,30**
Σ	**0,10**	**0,30**	**0,45**	**0,15**	**1,00**

Determinar a distribuição da variável aleatória discreta $U = \min(X, Y)$.

Para obter a distribuição de probabilidade de U adota-se o seguinte procedimento:

- Determina-se os valores possíveis de U.

Neste caso, são: 0, 1, 2.

- Para determinar $P(U = 0)$ deve-se notar que $P(U = 0)$ se e só se, um dos seguintes eventos ocorre: $(X = 0, Y = 0)$ ou $(X = 0, Y = 1)$ ou $(X = 0, Y = 2)$ ou $(X = 0, Y = 3)$ ou $(X = 1, Y = 0)$ ou $(X = 2, Y = 0)$.
- Assim: $P(U = 0) = 0{,}05 + 0{,}05 + 0 + 0{,}05 + 0{,}10 + 0 = 25\%$.

Ilustração da determinação de P(U = 0) =

= P[min (X, Y) = 0].

X \ Y	0	1	2	3	Soma
0	0,05	0,05	0,10	0,00	**0,20**
1	0,05	0,10	0,25	0,10	**0,50**
2	0,00	0,15	0,10	0,05	**0,30**
Soma	**0,10**	**0,30**	**0,45**	**0,15**	**1,00**

As outras probabilidades de U podem ser obtidas de forma semelhante, tendo-se:

$$P(U = 1) = 0{,}10 + 0{,}25 + 0{,}10 + 0{,}15 =$$

$$= 0{,}60 = 60\%.$$

$$P(U = 2) = 0{,}10 + 0{,}05 = 0{,}15 = 15\%.$$

Determinação de P(U = 1) =

= P[min (X, Y) = 1]:

X \ Y	0	1	2	3	Soma
0	0,05	0,05	0,10	0,00	**0,20**
1	0,05	0,10	0,25	0,10	**0,50**
2	0,00	0,15	0,10	0,05	**0,30**
Soma	**0,10**	**0,30**	**0,45**	**0,15**	**1,00**

Distribuição da VAD U = min(X, Y).

u	p(u)
0	0, 25
1	0,60
2	0,15
Σ	**1,00**

Exercício um:

Determinar a distribuição conjunta das variáveis aleatórias X = Número de vogais e Y = número de consoantes de uma palavra selecionada ao acaso da seguinte frase:

"O Grêmio é e sempre será o melhor time Gaúcho".

Solução um:

X \ Y	0	2	3	4	Σ
1	0,4	0,0	0,0	0,0	**0,4**
2	0,0	0,2	0,0	0,2	**0,4**
3	0,0	0,0	0,2	0,0	**0,2**
Σ	**0,4**	**0,2**	**0,2**	**0,2**	**1,0**

Exercício dois:

Com base na distribuição conjunta, determinar as distribuições das seguintes variáveis: XY, $X + Y$, $X - Y$, $\min(X, Y)$ e $\max(X, Y)$.

(x, y)	p(x, y)	xy	x+y	x – y	min	max
(1, 0)	0,4	0	1	1	0	1
(1, 2)	0,0	2	3	-1	1	2
(1, 3)	0,0	3	4	-2	1	3
(1, 4)	0,0	4	5	-3	1	4
(2, 0)	0,0	0	2	2	0	2
(2, 2)	0,2	4	4	0	2	2
(2, 3)	0,0	6	5	-1	2	3
(2, 4)	0,2	8	6	-2	2	4
(3, 0)	0,0	0	3	3	0	3
(3, 2)	0,0	6	5	1	2	3
(3, 3)	0,2	9	6	0	3	3
(3, 4)	0,0	12	7	-1	3	4

Solução:

xy	p(xy)
0	0,4
4	0,2
8	0,2
9	0,2
Σ	**1,00**

x + y	p(x + y)
1	0,4
4	0,2
6	0,4
Σ	**1,00**

x - y	p(x - y)
0	0,4
1	0,4
-2	0,2
Σ	**1,00**

min	p(min)
0	0,4
2	0,4
3	0,2
Σ	**1,00**

Distribuições

max	p(max)
1	0,4
2	0,2
3	0,2
4	0,2
Σ	**1,00**

x	p(x)
1	0,4
2	0,4
3	0,2
Σ	**1,00**

y	p(y)
0	0,4
2	0,2
3	0,2
4	0,2
Σ	**1,00**

Exercício três:

Calcular:

$E(X)$ e $V(Y)$

$E(Y)$ e $V(Y)$

$E(X + Y)$ e $V(X + Y)$

$E(X – Y)$ e $V(X – Y)$

$E(XY)$ e $V(XY)$

Covariância Revisitada

Considerando os resultados anteriores, podemos redefinir a covariância como sendo:

Covariância Revisitada

$$\mathbf{COV(X,Y) =}$$

$$= E[(X - E(X)(Y - E(Y)] =$$

$$= E(XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)] =$$

$$= \quad E(XY) \quad - \quad E(X)E(Y) \quad - \quad E(Y)E(X) \quad +$$

$$E(X)E(Y) = \mathbf{E(XY) - E(X)E(Y)}.$$

Definição:

1. Se COV(X, Y) = 0, então as variáveis X e Y são ditas **Não Correlacionadas**.

2. Duas variáveis aleatórias X e Y são ditas **independentes** se: **p(x, y) = p(x).p(y),** para todos os pares de valores (x, y).

Relações e consequências

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2\mathrm{Cov}(X, Y)$$

$$E(XY) \neq E(X)E(Y) \text{ (em geral)}$$

Relações e consequências

Se X e Y são independentes então:

(i) $COV(X, Y) = 0$;

(ii) $E(XY) = E(X).E(Y)$

(iii) $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$

Observações:

$E(XY) = E(X)E(Y)$ pode ser verdadeira, mas as variáveis X e Y serem dependentes.

Se $Cov(X, Y) = 0$, isto não quer dizer que X e Y são independentes, o contrário sim.

A independência é uma relação mais forte do que a não correlação. Dizer que duas variáveis são não correlacionadas, significa que elas não tem relacionamento linear, enquanto que independência exclui qualquer tipo de relacionamento.

A Covariância

Relembrando:

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

(i) $Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X, Y)$

(ii) $Cov(X + Y, Z + W) = Cov(X, Z) + Cov(X, W) + Cov(Y, Z) + Cov(Y, W).$

O Coeficiente de Variação

(i) $-1 \leq \rho \leq 1$;

(ii) $\rho(X + a, Y + b) = \rho(X , Y)$;

(iii) $\rho(aX, bY) = ab\rho(X , Y)$

(iv) Se $\rho(X , Y) = 1$ ou $\rho(X , Y) = -1$, então $Y = aX + b$ com $a > 0$ ou $a < 0$ respectivamente

Exemplo:

Considere a distribuição conjunta da tabela abaixo.

Y \ X	-1	0	1
-1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

Verifique se X e Y são independentes.

Solução:

As distribuições marginais são:

X \ Y	-1	0	1	Σ
-1	1/8	1/8	1/8	3/8
0	1/8	0	1/8	2/8
1	1/8	1/8	1/8	3/8
Σ	3/8	2/8	3/8	1

X \Y	-1	0	1	Σ
-1	1/8	1/8	1/8	3/8
0	1/8	0	1/8	2/8
1	1/8	1/8	1/8	3/8
Σ	3/8	2/8	3/8	1

As variáveis não são independentes, pois

$$p(1, 1) = 1/8 \neq p(1).q(1) = (3/8)(3/8) = 9/64.$$

Exercício:

Uma urna contém três bolas numeradas: 1, 2 e 3. Duas destas bolas são retiradas ao caso e sejam X = valor da primeira bola retirada e Y = valor da segunda bola retirada.

Determine:

(a) E(XY)

(b) Cov(X, Y)

(c) Var (X + Y) se as retiradas forem:

(i) Com reposição;

(ii) Sem reposição.

Referências:

GRIMMETT, G. R., SITRZAKER, D. R. *Probability and Random Processes*. Oxford (London): Oxford University Press, 1991.

MEYER, Paul L. *Probabilidade: aplicações à estatística*. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

MOOD, Alexander M., GRAYBILL, Franklin A. *Introduccion a la Teoria de la Estadistica*. Madrid: Aguilar, 1969.