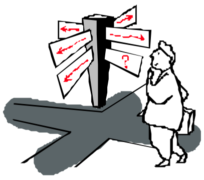


Testes de Hipóteses

Prof. Lorí Viali, Dr.
http://www.ufrgs.br/~viali/
viali@mat.ufrgs.br

Objetivos

Testar o valor hipotético de um parâmetro (testes paramétricos) ou de relacionamentos ou modelos (testes não paramétricos).

Tipos de Testes de Hipóteses

Testes

Paramétricos

Não-paramétricos

Testes não-paramétricos

Um teste não paramétrico testa outras situações que não parâmetros populacionais. Estas situações podem ser relacionamentos, modelos, dependência ou independência e aleatoriedade.

Testes Paramétricos

Envolvem parâmetros populacionais.

Um parâmetro é qualquer medida que descreve uma população.

Os principais parâmetros são:

μ (a média)
σ^2 (a variância)
σ (o desvio padrão)
π (a proporção)

Etapas dos testes paramétricos de hipóteses

(1)

Formular a hipótese nula (H_0)

H_0: $\theta = \theta_0$

Expressar em valores aquilo que deve ser testado;

Esta hipótese é sempre de igualdade;

Deve ser formulada com o objetivo de ser rejeitada.

(2)

Formular a hipótese alternativa (H_1)

(Testes simples)

H_1: $\theta = \theta_1$

(Testes compostos)

H_1: $\theta > \theta_0$ (teste unilateral/unicaudal à direita)

$\theta < \theta_0$ (teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\theta \neq \theta_0$ (teste bilateral/bicaudal) .

(3)

Definir um valor crítico (α)

- Isto envolve definir um ponto de corte a partir do qual a hipótese nula será rejeitada (aceita a hipótese alternativa).
- Esta hipótese é de fato a expressão daquilo que ser quer provar.

(4)
Calcular a estatística teste

- *A estatística teste é obtida através dos dados amostrais, isto é, ela é a evidência amostral;*

- *A forma de cálculo depende do tipo de teste envolvido, isto é, do modelo teórico ou modelo de probabilidade.*

(5)
Tomar uma decisão

- *A estatística teste e o valor crítico são comparados e a decisão de aceitar ou rejeitar a hipótese nula é formulada;*

- *Se for utilizado um software estatístico pode-se trabalhar com a significância do resultado (p-value) ao invés do valor crítico.*

(6)
Formular uma conclusão

- *Expressar em termos do problema (pesquisa) qual foi a conclusão obtida;*

- *Não esquecer que todo resultado baseado em amostras está sujeito a erros e que geralmente apenas um tipo de erro é controlado.*

Em resumo

Conceitos Básicos

Exemplo

Dispõem-se de duas moedas com aparências idênticas, só que uma (M_1) é equilibrada, isto é, P(Cara) = P(Coroa) = 50%, enquanto que a outra (M_2) é viciada de tal forma que favorece cara na proporção de 80%, ou seja, P(Cara) = 80% enquanto que P(Coroa) = 20%.

Supõem-se que uma das moedas é lançada e que com base na variável

X = número de caras,

deve-se decidir qual delas foi lançada. Neste caso o teste a ser feito envolve as seguintes hipóteses:

Hipóteses

H_0: A moeda lançada é a equilibrada (M_1) ($p = 50\%$)

H_1: A moeda lançada é a viciada (M_2) ($p = 80\%$)

p = proporção de caras.

Decisão

Tem-se que tomar a decisão de apontar qual foi a moeda lançada, baseado apenas em uma amostra de, por exemplo, 5 lançamentos. Lembrar que a população de lançamentos possíveis é, neste caso, infinita.

A decisão, é claro, estará sujeita a erros, pois se estará tomando a decisão em condições de incerteza, isto é, baseado em uma amostra de apenas 5 lançamentos das infinitas possibilidades.

A decisão será baseada nas distribuições amostrais das duas moedas.

A tabela mostra as probabilidades de se obter os valores: x = 0, 1, 2, 3, 4 e 5, da variável X = número de caras, em uma amostra de $n = 5$, lançamentos de cada uma das moedas.

Sob H_0 $X \sim B(5; 0,5)$

Assim:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{5}{x} 0,5^x \, 0,5^{5-x} =$$

$$= \binom{5}{x} 0,5^5 = \binom{5}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \binom{5}{x} \Big/ 32$$

Sob H_1 $X \sim B(5; 0,8)$

Assim:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{5}{x} 0,2^x \, 0,8^{5-x} =$$

$$= \binom{5}{x} \left(\frac{4}{5}\right)^x \left(\frac{1}{5}\right)^{5-x} = \binom{5}{x} \frac{4^x}{5^5} = \binom{5}{x} 4^x \Big/ 3125$$

Distribuições amostrais ($n = 5$)

x	P(X = x) sob H_0	P(X = x) sob H_1
0	1/32 → 3,125%	1/3125 → 0,032%
1	5/32 →15,625%	20/3125 → 0,640%
2	10/32 → 31,250%	160/3125 → 5,120%
3	10/32 → 31,250%	640/3125 → 20,480%
4	5/32 → 15,625%	1280/3125 → 40,960%
5	1/32 → 3,125%	1024/3125 → 32,768%
Total	1 → 100%	1→ 100%

Regra de Decisão

Para poder aceitar ou rejeitar H_0 e como conseqüência, rejeitar ou aceitar H_1, é necessário estabelecer uma regra de decisão, isto é, é necessário estabelecer para que valores da variável X iremos rejeitar H_0

Região de Rejeição

Desta forma, estabelecendo-se que se vai rejeitar H_0, se a moeda der um número de caras igual a 4 ou 5, pode-se então determinar as probabilidades de tomar as decisões corretas ou erradas.

Assim o conjunto de valores que levará a rejeição da hipótese nula será denominado de região crítica (RC) e, neste caso, este conjunto é igual a:

$$RC = \{\ 4, 5\}$$

Região de não-rejeição ou aceitação

A faixa restante de valores da variável é denominada de região de aceitação ou de não-rejeição (RA) e, neste caso, este conjunto vale:

$$RA = \{0, 1, 2, 3\}$$

Erro do Tipo I
ou Nível de Significância do Teste

Então se H_0 for rejeitada porque X assumiu o valor 4 ou 5, pode-se estar cometendo um erro.

A probabilidade deste erro é igual a probabilidade de ocorrência destes valores sob H_0, isto é:

α = P(Erro do Tipo I) =

= P(Rejeitar H_0 / H_0 é verdadeira) =

= P(X = 4 ou 5 / p = 0,50) =

= 5/32 + 1/32 = 6/32 = 18,75% =

= Nível de significância do teste.

Erro do Tipo II

O outro tipo de erro possível de ser cometido é aceitar H_0 quando ela é falsa e é denominado de erro do tipo II.

Erro do Tipo II

β= P(Erro do Tipo II) =

= P(Aceitar H_0 / H_0 é falsa) =

P(X = 0, 1 , 2 ou 3 / p = 80%) =

= 1/3125 + 20/3125 + 160/3125 + 640/3125 =

= 821/3125 = 26,27%

β = (1+20+160+640)/3125
821/3125= 26,27%

x	P(X =	
0	1/32 → 3,125%	1/3125 2%
1	5/32 →15,625%	20/3125 0,640%
2	10/32 → 31,250%	160/3125 → 5,120%
3	10/32 → 31,250%	640/3125 → 20,480%
4	5/32 → 15,625%	1280/3125 → 40,960%
5	1/32 → 3,1	1024/3125 → 32,768%
Total	1 → 10	0%

α = 5/32 + 1/32
6/32= 18,75%

Em Resumo

Reali-dade	Decisão	
	Aceitar H_0	Rejeitar H_0
H_0 é verda-deira	**Decisão correta** $1 - \alpha = P(\text{Aceitar } H_0 / H_0 \text{ é verdadeira})$	**Erro do Tipo I** $\alpha = P(\text{Cometer Erro do tipo I}) = P(\text{Rejeitar } H_0 / H_0 \text{ é verdadeira})$ = Nível de significância do teste
H_0 é falsa	**Erro do Tipo II** $\beta = P(\text{Cometer Erro do tipo II}) = P(\text{Aceitar } H_0 / H_0 \text{ é falsa}) = P(\text{Aceitar } H_0 / H_1 \text{ é verdadeira})$	**Decisão correta** $1 - \beta = P(\text{Rejeitar } H_0 / H_0 \text{ é falsa})$ = Poder do teste.

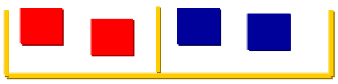
Exemplo 1

Uma urna contém quatro fichas das quais θ são azuis e $4 - \theta$ são vermelhas. Para testar a hipótese nula de que $\theta = 2$ contra a alternativa de $\theta \neq 2$, retiram-se duas fichas ao acaso e sem reposição. Rejeita-se a hipótese nula se as duas fichas forem da mesma cor. Determine o nível de significância e o poder do teste.

Espaço amostra

$$S = \{\underbrace{VV,\ AA}_{\text{Região Crítica}},\ \overbrace{AV,\ VA}^{\text{Região De Não Rejeição}}\}$$

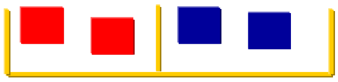
Sob H_0: $\theta = 2$



Cálculo do Erro do Tipo I, i. é, nível de significância do teste

O erro do tipo I é a probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é verdadeira, neste caso ele é a **probabilidade de retirarmos duas fichas da mesma cor, quando a urna tem duas de cada cor.**

Sob H_0: $\theta = 2$



α = P(Erro do Tipo I) =

= P(Rejeitar H_0 / H_0 é verdadeira) =

= P(VV, AA / $\theta = 2$) =

$$= \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{12} + \frac{2}{12} =$$

$$= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = 33{,}33\%$$

Cálculo do Poder do Teste

O poder do teste é a probabilidade de Rejeitar H_0 quando ela é falsa, é uma decisão correta. É calculada sob a região crítica. Neste caso é a $P(VV, AA / H_0 \text{ é falsa})$

MAS

$1-\beta = P(VV, AA / H_0 \text{ é falsa}) =$

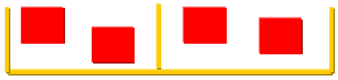
$= P(VV, AA / H_1 \text{ é verdadeira}) =$

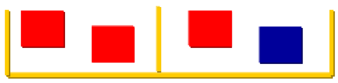
$= P(VV, AA / \theta \neq 2)$.

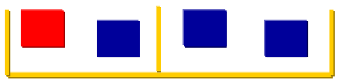
Assim devemos analisar quatro situações:

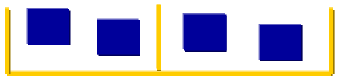
$\theta = 0$, $\theta = 1$, $\theta = 3$ e $\theta = 4$

ISTO É:

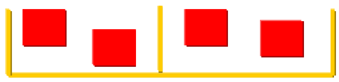
$\theta = 0$ 

$\theta = 1$ 

$\theta = 3$ 

$\theta = 4$ 

$\theta = 0$

Neste caso 

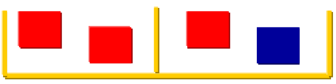
Então:

$1-\beta = P(VV, AA / \theta \neq 2) =$

$= P(VV, AA / \theta = 0) =$

$$= \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{3} + 0 = 1 = 100\%$$

$\theta = 1$

Neste caso 

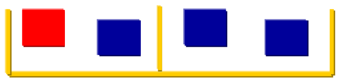
Então:

$1-\beta = P(VV, AA / \theta \neq 2) =$

$= P(VV, AA / \theta = 1) =$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + 0 = \frac{1}{2} = 50\%$$

$\theta = 3$

Neste caso 

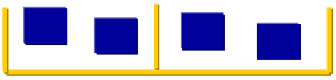
Então:

$1-\beta = P(VV, AA / \theta \neq 2) =$

$= P(VV, AA / \theta = 3) =$

$$= 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} = 50\%$$

$\theta = 4$

Neste caso 

Então:

$$1-\beta = P(VV,\ AA\ /\ \theta \neq 2) =$$

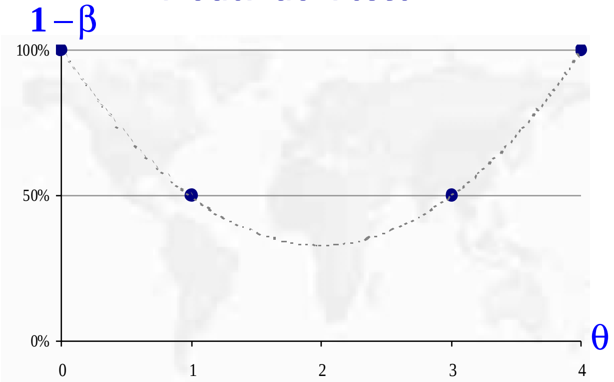
$$= P(VV,\ AA\ /\ \theta = 0) =$$

$$= 0 + \frac{4}{4}.\frac{3}{3} = 1 = 100\%$$

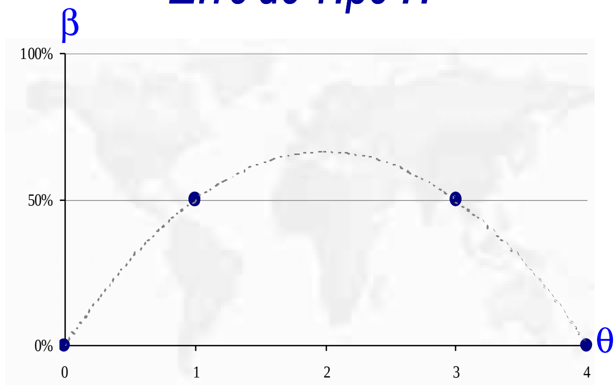
Em Resumo, tem-se:

θ	β	$1-\beta$	α
0	0%	100%	
1	50%	50%	
2	-	-	33,33%
3	50%	50%	
4	0%	100%	

Poder do Teste



Erro do Tipo II



Exemplo 2

Um dado é lançado seis vezes para testar a hipótese nula de que $P(F_1) = 1/6$ contra a alternativa de que $P(F_1) > 1/6$ Rejeita-se a hipótese nula se X = "número de faces um for maior ou igual a quatro". Determinar o nível de significância e o poder do teste.

Espaço amostra

Região De Rejeição (Crítica)

$S = \{\underbrace{0, 1, 2, 3}, \overbrace{4, 5, 6}\}$

Região de Não Rejeição

$H_0: p = 1/6$

$H_0: p > 1/6$

Cálculo do Erro do Tipo I, i. é, nível de significância do teste

O erro do tipo *I* é a probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é verdadeira, neste caso ele é a probabilidade de obtermos $X \geq 4$, quando $n = 6$ e $p = 1/6$.

Sob H_0: $p = 1/6$

α = P(Erro do Tipo *I*) =

= P(Rejeitar H_0 / H_0 é verdadeira) =

= P($X \geq 4$/ $p = 1/6$) =

$$= \binom{6}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^0 =$$

$$= \frac{15.25}{6^6} + \frac{6.5}{6^6} + \frac{1}{6^6} = \frac{406}{6^6} = 0,87\%$$

Cálculo do Poder do Teste

O poder do teste é a probabilidade de Rejeitar H_0 quando ela é falsa, é uma decisão correta. É calculada sob a região crítica. Neste caso é P($X \geq 4$/ H_0 é falsa)

MAS

$1-\beta$ = P($X \geq 4$ / H_0 é falsa) =

= P($X \geq 4$ / H_1 é verdadeira) =

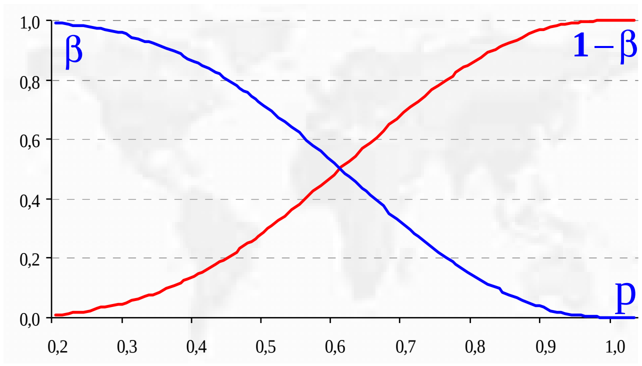
= P($X \geq 4$ / $p > 1/6$).

Neste caso, o poder do teste é uma função de p. Vamos avaliar esta função para alguns valores de "p".

Poder do teste para p > 1/6

p	1- β	p	1- β	p	1- β
0,20	1,70	0,55	44,15	0,90	98,41
0,25	3,76	0,60	54,43	0,95	99,78
0,30	7,05	0,65	64,71	1,00	100,00
0,35	11,74	0,70	74,43		
0,40	17,92	0,75	83,06		
0,45	25,53	0,80	90,11		
0,50	34,37	0,85	95,27		

Poder do Teste x Erro do Tipo II



Testes para

- Uma amostra
  - Média
  - Proporção
  - Variância
- Duas amostras
  - Dependentes
    - Diferença de médias
  - Independentes
    - Diferença de médias
    - Diferença de proporções
    - Igualdade de variâncias
- Mais de duas amostras
  - Dependentes
    - ANOVA com medidas repetidas
  - Independentes
    - ANOVA

Testes para uma Amostra

Média (μ)

Proporção (π)

Variância (σ^2)

Teste para a média

H_0: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu > \mu_0$ (teste unilateral/unicaudal à direita)

$\mu < \mu_0$(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\mu \neq \mu_0$ (teste bilateral/bicaudal) .

(a) variância conhecida

Neste caso a variável teste é:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$Z > z_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$Z < z_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|Z| > z_c$

(teste bilateral/bicaudal) .

Onde z_c é tal que:

$\Phi(z_c) = 1 - \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$\Phi(z_c) = \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\Phi(z_c) = \alpha/2$ ou $\Phi(z_c) = 1 - \alpha/2$

(teste bilateral/bicaudal) .

Exemplo

A experiência passada mostrou que as notas de Probabilidade e Estatística, estão normalmente distribuídas com média $\mu = 5{,}5$ e desvio padrão $\sigma = 2{,}0$. Uma turma de $n = 64$ alunos deste semestre apresentou uma média de 5,9. Teste a hipótese de este resultado mostra uma melhora de rendimento a uma significância de 5%.

Solução:

Hipóteses:	Dados:
H_0: $\mu = 5{,}5$	$\sigma = 2{,}0 \quad n = 64$
H_1: $\mu > 5{,}5$	$\bar{x} = 5{,}9 \quad \alpha = 5\%$

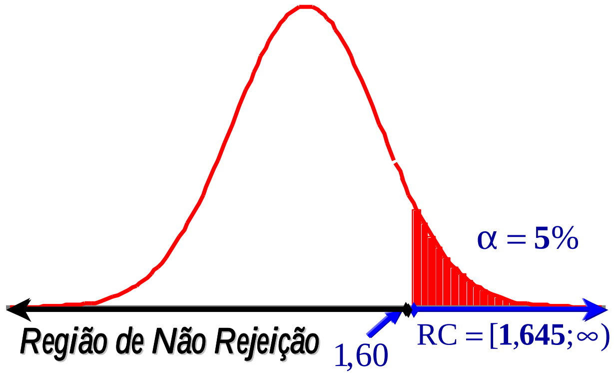
Trata-se de um teste unilateral à direita com σ conhecido.

A variável teste é:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Então:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{5{,}9 - 5{,}5}{2{,}0/\sqrt{64}} = \frac{0{,}4}{2{,}0/8} = \frac{3{,}2}{2{,}0} = 1{,}60$$



A significância do resultado obtido (1,60), isto é, o valor-p é $P(Z > 1{,}60) = P(Z > 1{,}60) = 1 - \Phi(1{,}60) = \Phi(-1{,}60) = 5{,}48\%$.

Como a significância do resultado (5,48%) é maior que a significância do teste (5%) não é possível rejeitar a hipótese nula.

(b) variância desconhecida

Neste caso a variável teste é:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$t_{n-1} > t_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$t_{n-1} < t_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|t_{n-1}| > t_c$

(teste bilateral/bicaudal) .

Onde t_c é tal que:

$P(t < t_c) = 1 - \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$P(t < t_c) = \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$P(t < t_c) = \alpha/2$ ou $P(t > t_c) = \alpha/2$

(teste bilateral/bicaudal) .

Exemplo

Suponha que a sua empresa comprou um lote de lâmpadas. Você precisa testar, a 5% de significância, a afirmação do fabricante de que a duração média das lâmpadas é maior que 800 horas.

Para isto você usa uma amostra de 36 lâmpadas e encontra uma média 820 horas com desvio de 70 horas. Isto confirma a afirmação do fabricante?

Solução:

Hipóteses:

H_0: $\mu = 800$ horas

H_1: $\mu > 800$ horas

Dados:

$n = 36$

$\bar{x} = 820$ horas

$s = 70$ horas

$\alpha = 5\%$

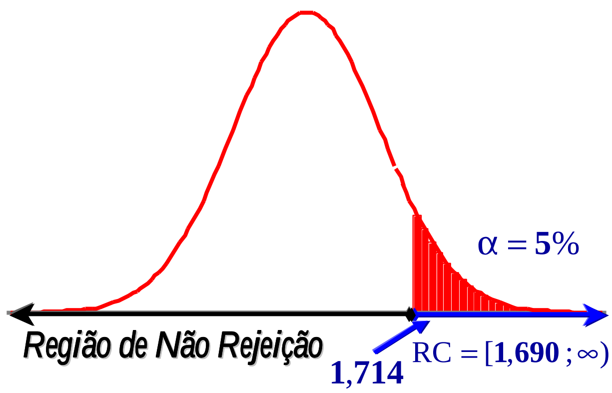
Trata-se de um teste unilateral à direita com σ desconhecido.

A variável teste é:

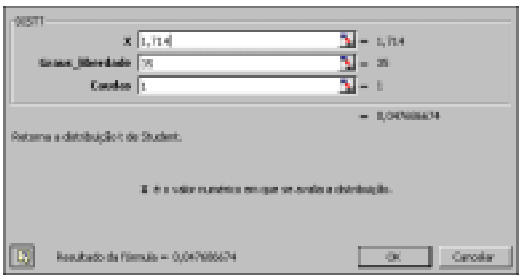
$$t_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

Então:

$$t_{35} = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{820 - 800}{70/\sqrt{36}} = \frac{20}{70/6} = \frac{120}{70} = 1{,}714$$



A significância do resultado obtido (1,714), isto é, o valor-p é $P(T_{35} > 1{,}714) = DISTT(1{,}714; 35; 1) = 4{,}77\%$



Como a significância do resultado (4,77%) é menor que a significância do teste (5%) é possível rejeitar a hipótese nula.

Teste para a proporção

$H_0: \pi = \pi_0$

$H_1: \pi > \pi_0$ (teste unilateral/unicaudal à direita)

$\pi < \pi_0$ (teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\pi \neq \pi_0$ (teste bilateral/bicaudal) .

Neste caso a variável teste é:

$$Z = \frac{P - \mu_P}{\sigma_P} = \frac{P - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$Z > z_0$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$Z < z_0$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|Z| > z_0$

(teste bilateral/bicaudal) .

Exemplo

Afirma-se que 40% dos alunos de uma universidade são fumantes. Uma amostra de 225 estudantes selecionados ao acaso mostrou que apenas 72 eram fumantes. Teste a 1% a hipótese de que a afirmação foi exagerada.

Solução:

Hipóteses:

H_0: π = 40%

H_1: π < 40%

Dados:

$f = 72$

$n = 225$

$p = 72/225 = 32\%$

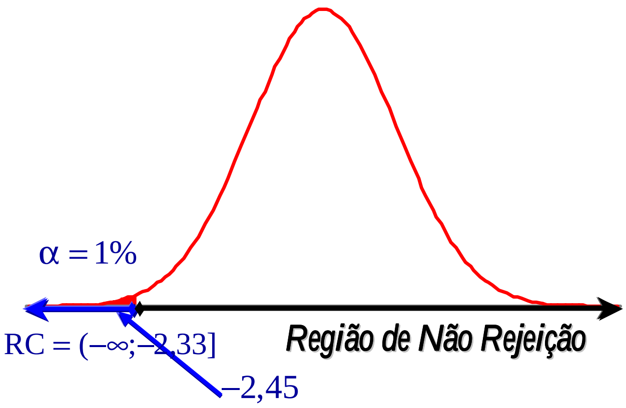
$\alpha = 1\%$

Trata-se de um teste unilateral à esquerda para a proporção. A variável teste é:

$$Z = \frac{P - \mu_P}{\sigma_P} = \frac{P - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$$

Então:

$$Z = \frac{P - \mu_P}{\sigma_P} = \frac{0,32 - 0,40}{\sqrt{\frac{0,40(1-0,40)}{225}}} = \frac{-0,08}{0,0326} = -2,45$$



A significância do resultado obtido (-2,45), isto é, o valor-p é:

$p = P(Z < -2,45) = \Phi(-2,45) = 0,71\%$.

*Como a significância do resultado (0,71%) é menor que a significância do teste (1%) **é possível** rejeitar a hipótese nula.*

Teste para a variância

H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$

H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$\sigma^2 < \sigma_0^2$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

(teste bilateral/bicaudal) .

Neste caso a variável teste é:

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$\chi^2_{n-1} > \chi^2_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$\chi^2_{n-1} < \chi^2_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\chi^2_{n-1} > \chi^2_c$ ou $\chi^2_{n-1} < \chi^2_c$

(teste bilateral/bicaudal) .

Onde χ^2_c é tal que:

$$P(\chi^2_{n-1} > \chi^2_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$P(\chi^2_{n-1} < \chi^2_c) = 1 - \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$P(\chi^2_{n-1} < \chi^2_c) = \alpha/2 \text{ ou } P(\chi^2_{n-1} > \chi^2_c) = \alpha/2$$

(teste bilateral/bicaudal) .

Exemplo

O fabricante de uma certa marca de surdina de carro divulga que as suas peças tem uma variância de 0,8 anos. Uma amostra aleatória de **16** *peças mostrou uma variância de* **um** *ano. Utilizando uma significância de 5%, teste se a variância de todas as peças é superior a 0,8 anos.*

Solução:

Hipóteses:

$H_0: \sigma^2 = 0,8$ anos

$H_1: \sigma^2 > 0,8$ anos

Dados:

$n = 16$

$s = 1$ ano

$\alpha = 5\%$

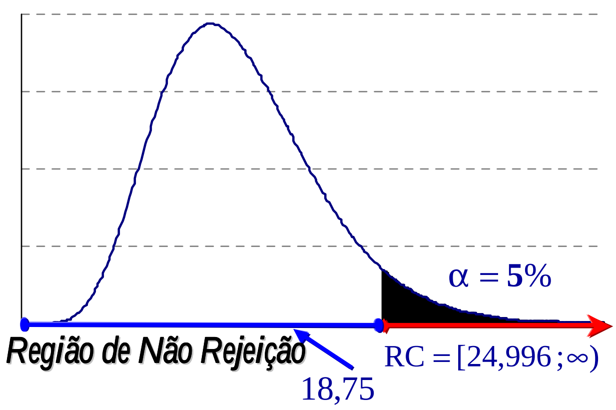
Trata-se de um teste unilateral à direita para a variância.

A variável teste é:

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

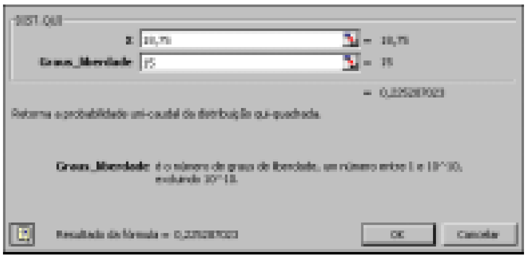
Então:

$$\chi^2_{15} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(16-1).1}{0,8} = \frac{15}{0,8} = 18,75$$



OPÇÃO:

A significância do resultado obtido (18,75), isto é, o valor-p, para este caso, vale: $P(\chi^2_{15} > 18{,}75)$ = *DIST.QUI(18,75; 15) = 22,53%*



Como a significância do resultado obtido (22,59%) é maior que a significância do teste (5%) não é possível rejeitar a hipótese nula.

Testes para duas Amostras

Amostras

- Dependentes
  - Teste "t" para amostras emparelhadas
- Independentes
  - Variâncias Conhecidas
    - Teste "z"
  - Variâncias Desconhecidas
    - Supostas iguais
    - Supostas diferentes

(a) Independentes

Diferença entre duas médias

$$(\mu_1 - \mu_2 = \Delta)$$

Diferença entre duas proporções

$$(\pi_1 - \pi_2 = \Delta)$$

Igualdade entre duas variâncias

$$(\sigma^2_X = \sigma^2_Y)$$

Teste para a diferença entre duas médias

(a) variâncias conhecidas

Neste caso a variável teste é:

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_{\bar{X}-\bar{Y}}}{\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$Z > z_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$Z < z_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|Z| > z_c$

(teste bilateral/bicaudal) .

Onde z_c é tal que:

$\Phi(z_c) = 1 - \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$\Phi(z_c) = \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\Phi(z_c) = \alpha/2$ ou $\Phi(z_c) = 1 - \alpha/2$

(teste bilateral/bicaudal) .

Exemplo

*Uma grande empresa quer comprar peças de dois fornecedores diferentes. O fornecedor "**A**" alega que a durabilidade é de 1000 horas com desvio de 120 horas, enquanto que o fornecedor "**B**" diz que a duração média é de 1050 horas com desvio padrão de **140** horas.*

*Para testar se a durabilidade de "**B**" é realmente maior, duas amostras de tamanho **n = m = 64**, de cada um dos fornecedores, foram obtidas. A duração média da amostra **A** foi de **995** horas e a **B** foi de **1025**. Qual a conclusão a 5% de significância?*

Solução:

Hipóteses:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_0: $\mu_1 < \mu_2$

Dados:

$n = m = 64$

$\sigma_1 = 120$; $\sigma_2 = 140$

$\overline{X} = 995$ e $\overline{Y} = 1025$

$\alpha = 5\%$

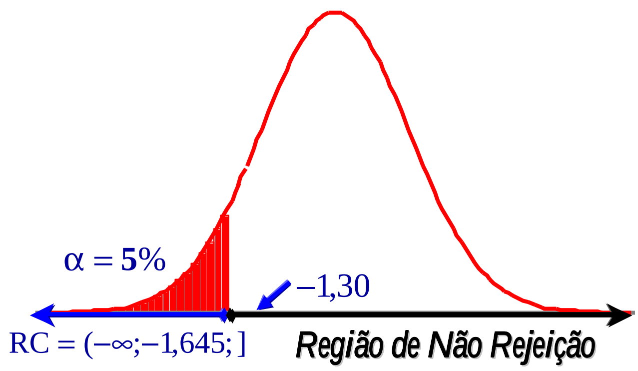
Trata-se de um teste unilateral à esquerda com σ_1 e σ_2 conhecidos.

A variável teste é:

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \mu_{\overline{X}-\overline{Y}}}{\sigma_{\overline{X}-\overline{Y}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}$$

Então:

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} = \frac{995 - 1025 - 0}{\sqrt{\frac{120^2}{64} + \frac{140^2}{64}}} = -1{,}30$$



A significância do resultado obtido (-1,30), isto é, o valor-p é: p = P(Z < -1,30) = Φ(-1,30) = DIST.NORMP(-1,30) = 9,68%.

Como a significância do resultado (9,68%) é maior que a significância do teste (5%) não é possível rejeitar a hipótese nula.

(6) variâncias desconhecidas

(i) supostamente iguais

Neste caso a variável teste é:

$$t_\upsilon = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \mu_{\overline{X}-\overline{Y}}}{\hat{\sigma}_{\overline{X}-\overline{Y}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta}{s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

Onde s é dado por:

$$s = \sqrt{\frac{(n-1)\,s_X^2 + (m-1)\,s_Y^2}{n+m-2}}$$

e v é dado por: $n + m - 2$

E x e m p l o

Um relatório da defesa do consumidor mostrou que um teste com **oito** pneus da marca ***A*** apresentaram uma vida média de **37500 km** com um desvio padrão de **3500 km** e que **doze** de uma marca concorrente ***B***, testados nas mesmas condições, tiveram uma durabilidade média de **41400 km** com variabilidade de **4200 km**.

Supondo que as **variâncias populacionais sejam as mesmas** e admitindo uma **significância de 5%**, verifique se é possível afirmar que as duas marcas **diferem** quanto a durabilidade média. E se a significância fosse **1%** qual seria a conclusão?

S o l u ç ã o : Dados:

Hipóteses:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_0: $\mu_1 \neq \mu_2$

$n = 8;\ m = 12$

$s_A = 3500;\ s_B = 4200$

$\overline{X} = 37500;\ \overline{Y} = 41400$

$\alpha = 5\%;\ \ \sigma_A^2 = \sigma_B^2$

Trata-se de um teste "t" bilateral com σ_1 e σ_2 supostamente iguais.

A variável teste é:

$$t_{n+m-2} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \mu_{\overline{X}-\overline{Y}}}{\hat{\sigma}_{\overline{X}-\overline{Y}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta}{s.\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

Onde:

$$s = \sqrt{\frac{(n-1)S_A^2 + (m-1)S_B^2}{n+m-2}}$$

$$s = \sqrt{\frac{7.3700^2 + 11.4200^2}{8+12-2}} = 4012{,}9651$$

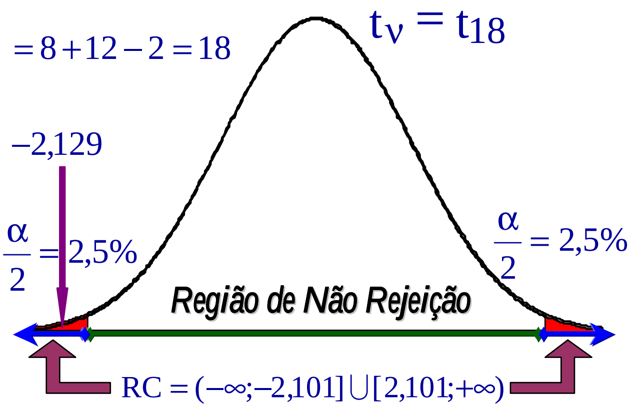
Então:

$$t_{18} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{S.\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} = \frac{37500 - 41300 - 0}{4012{,}9651\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{12}}} =$$

$$= -2{,}129$$

$$\nu = n + m - 2 =$$

$$= 8 + 12 - 2 = 18$$



DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $t = -2{,}129 \notin RC$ ou $-2{,}129 > -2{,}878$, ***Aceito H_0****, isto é, a 1% de significância* ***não*** *posso afirmar que a vida média das duas marcas difere.*

(b) variâncias desconhecidas

(ii) supostamente desiguais

Neste caso a variável teste é:

$$t_\upsilon = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_{\bar{X}-\bar{Y}}}{\hat{\sigma}_{\bar{X}-\bar{Y}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}}$$

Onde v é dado por:

$$\upsilon = \frac{\left(\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_X^2}{n}\right)^2}{n-1} + \frac{\left(\frac{S_Y^2}{m}\right)^2}{m-1}}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$t_v > t_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$t_v < t_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|t_v| > t_c$

(teste bilateral/bicaudal) .

Onde t_c é tal que:

$P(t_v < t_c) = 1 - \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$P(t_v < t_c) = \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$P(t_v < t_c) = \alpha/2$ ou $P(t_v > t_c) = \alpha/2$

(teste bilateral/bicaudal) .

Exemplo

Uma empresa fabrica transistores do tipo A e do tipo B. A marca **A**, mais cara, é supostamente **pelo menos 60** horas mais durável do que a marca **B**. Um usuário quer saber se vale a pena pagar mais pela marca A e resolve testar se, de fato, ela é mais durável.

Testa **20** itens de **A** encontrando uma vida média de **1000 horas** com desvio de **60 horas**, enquanto que **20** itens da marca **B** apresentam uma vida média de **910 horas** com desvio de **40 horas**. Qual a conclusão a **5%** de significância?

Solução:

Hipóteses:

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 60$

$H_0: \mu_1 - \mu_2 > 60$

Dados:

$n = m = 20$

$s_A = 60; \; s_B = 40$

$\overline{X} = 1000; \overline{Y} = 910$

$\alpha = 5\% \; ; \; \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$

Trata-se de um teste "t" unilateral à direita com σ_1 e σ_2 supostamente desiguais.

A variável teste é:

$$t_\upsilon = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \mu_{\overline{X}-\overline{Y}}}{\hat{\sigma}_{\overline{X}-\overline{Y}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m}}}$$

Onde:

$$\upsilon = \frac{\left(\frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m}\right)^2}{\frac{\left(s_X^2/n\right)^2}{n-1} + \frac{\left(s_Y^2/m\right)^2}{m-1}}$$

$$t_\upsilon = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m}}} = \frac{1000 - 910 - 60}{\sqrt{\frac{60^2}{20} + \frac{40^2}{20}}} = 1{,}861$$

E:

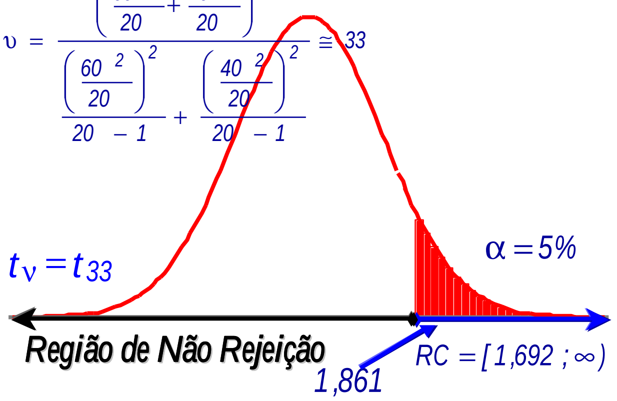
$$\upsilon = \frac{\left(\frac{60^2}{20} + \frac{40^2}{20}\right)^2}{\frac{\left(\frac{60^2}{20}\right)^2}{20-1} + \frac{\left(\frac{40^2}{20}\right)^2}{20-1}} \cong 33$$

O valor crítico t_c é tal que: $P(T_{33} > t_c) =$ $= \alpha = 0{,}05 = 5\%$. *Então $t_c = T^{-1}(0{,}95) = 1{,}692$.*
Assim RC = [1,692; + ∞)

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $t = 1{,}861 \in RC$ ou $1{,}861 > 1{,}692$, **Rejeito H_0**, *isto é, a 5% de significância posso afirmar que a vida média da marca é pelo menos 60 horas maior que a marca B.*

$$\upsilon = \frac{\left(\frac{60^2}{20} + \frac{40^2}{20}\right)^2}{\frac{\left(\frac{60^2}{20}\right)^2}{20-1} + \frac{\left(\frac{40^2}{20}\right)^2}{20-1}} \cong 33$$



Teste para a diferença entre duas proporções

$H_0: \pi_1 - \pi_2 = \Delta$

$H_1: \pi_1 - \pi_2 > \Delta$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$\pi_1 - \pi_2 < \Delta$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\pi_1 - \pi_2 \neq \Delta$

(teste bilateral/bicaudal) .

Neste caso a variável teste é:

$$Z = \frac{P_1 - P_2 - \mu_{P_1 - P_2}}{\hat{\sigma}_{P_1 - P_2}} = \frac{P_1 - P_2 - \Delta}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n} + \frac{P_2(1-P_2)}{m}}}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$Z > z_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$Z < z_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|Z| > z_c$

(teste bilateral/bicaudal) .

Onde z_c é tal que:

$\Phi(z_c) = 1 - \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$\Phi(z_c) = \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\Phi(z_c) = \alpha/2$ ou $\Phi(z_c) = 1 - \alpha/2$

(teste bilateral/bicaudal) .

Exemplo

A reitoria de uma grande universidade entrevistou 600 alunos, 350 mulheres e 250 homens, para colher a opinião sobre a troca do sistema de avaliação da universidade. Da amostra 140 mulheres e 115 homens estavam a favor. Teste a 5% se existe diferença significativa de opinião entre homens e mulheres.

Solução:

Hipóteses:

H_0: $\pi_1 = \pi_2$

H_0: $\pi_1 \neq \pi_2$

Dados:

$n = 350$; $m = 250$

$p_1 = 140/350 = 40\%$

$p_2 = 115/250 = 46\%$

$\alpha = 5\%$;

Trata-se de um teste bilateral para a proporção.

A variável teste é:

$$Z = \frac{P_1 - P_2 - \Delta}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n} + \frac{P_2(1-P_2)}{m}}} =$$

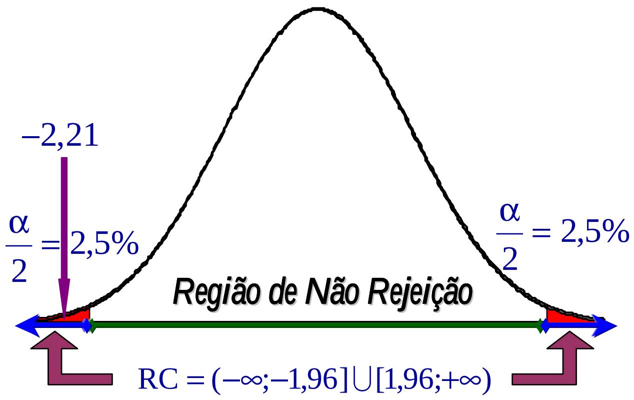
$$= \frac{0{,}40 - 0{,}46 - 0}{\sqrt{\frac{0{,}40(1-0{,}40)}{350} + \frac{0{,}46(1-0{,}46)}{250}}} =$$

$$= \frac{-0{,}06}{0{,}02718} = -2{,}21$$

O valor crítico z_c é tal que: $P(|Z| > z_c) = \alpha = 0{,}05 = 5\%$. Então $z_c = \Phi^{-1}(0{,}05) = -1{,}96$. Assim RC = $(-\infty; -1{,}96] \cup [1{,}96; +\infty)$

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $z = -2{,}21 \in RC$ ou $-2{,}21 < -1{,}96$, **Rejeito H_0**, isto é, a 5% de significância posso afirmar que as opiniões diferem entre homens e mulheres.



Teste para a igualdade entre duas variâncias

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ (teste unilateral/unicaudal à direita)

$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ (teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (teste bilateral/bicaudal) .

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$F_{n-1,m-1} > f_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$F_{n-1,m-1} < f_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$F_{n-1,m-1} > f_c$ ou $F_{n-1,m-1} < f_c$

(teste bilateral/bicaudal) .

Neste caso a variável teste é:

$$F_{n-1,\,m-1} = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

Onde $F_{n-1;m-1}$ é tal que:

$P(F_{n-1,\,m-1} > F_c) = \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$P(F_{n-1,\,m-1} < F_c) = \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$P(F_{n-1,\,m-1} > F_c) = \alpha/2$ ou $P(F_{n-1,\,m-1} < F_c) = \alpha/2$

(teste bilateral/bicaudal) .

Exemplo

O desvio padrão de uma dimensão particular de um componente de metal é satisfatório para a montagem do componente. Um novo fornecedor está sendo considerado e ele será preferível se o desvio padrão é menor do que o do atual fornecedor. Uma amostra de 100 itens de cada fornecedor é obtido.

Fornecedor atual: $s_1^2 = 0{,}0058$

Novo fornecedor: $s_2^2 = 0{,}0041$

A empresa deve trocar de fornecedor se for considerado uma significância de 5%?

Solução:

Hipóteses:

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_0: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Dados:

$n = m = 100$

$s_1^2 = 0{,}0058$

$s_2^2 = 0{,}0041$

$\alpha = 5\%$

Trata-se de um teste unilateral à direita para a igualdade de variâncias.

A variável teste é:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Que apresenta uma distribuição F com "n – 1" g.l. no numerador e "m – 1" g.l. no denominador.

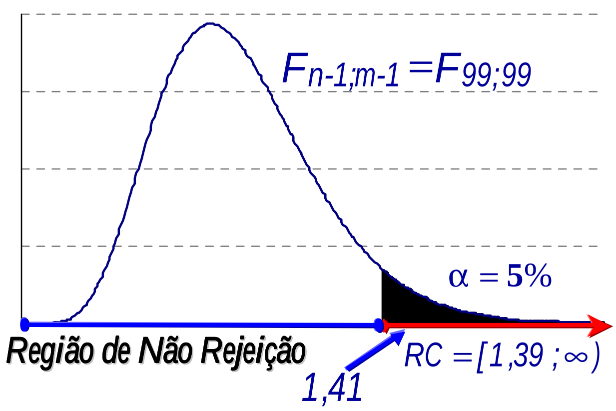
Então:

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0{,}0058}{0{,}0041} = 1{,}41$$

O valor crítico f_c é tal que: $P(|F| > f_c) = \alpha = 0{,}05 = 5\%$. Então $f_c = F^{-1}(0{,}05) = 1{,}39$. Assim RC = $[1{,}39; +\infty)$

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $f = 1{,}41 \in$ RC ou $1{,}41 < 1{,}39$, **Rejeito H_0**, isto é, a 5% de significância posso afirmar que a variância do fornecedor atual é maior do que a do novo fornecedor.



(6) Dependentes (Emparelhadas)

Teste para a média

$H_0: \mu_D = \Delta$

$H_1: \mu_D > \Delta$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$\mu_D < \Delta$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\mu_D \neq \Delta$

(teste bilateral/bicaudal) .

Neste caso a variável teste é:

$$t_\upsilon = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}} = \frac{\bar{D} - \Delta}{S_D / \sqrt{n}}$$

Onde :

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - n\bar{d}^2}{n-1}}$$

e v é dado por: $n - 1 = m - 1$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$t_{n-1} > t_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$t_{n-1} < t_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|t_{n-1}| > t_c$

(teste bilateral/bicaudal) .

Onde t_c é tal que:

$P(t_{n-1} < t_c) = 1 - \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$P(t_{n-1} < t_c) = \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$P(t_{n-1} < t_c) = \alpha/2$ ou $P(t_{n-1} > t_c) = \alpha/2$

(teste bilateral/bicaudal)

Exemplo

Um laboratório possui dois equipamentos de precisão. O diretor suspeita que existe uma pequena diferença de calibração entre os dois (ele não sabe em qual deles) de modo que um tende a dar leituras um pouco maiores do que o outro.

Ele propõe testar os dois aparelhos através da leitura de 10 medidas (tabela na próxima lâmina) em cada um dos aparelhos. Faça o teste adequado a uma significância de 5%.

Aparelho A	Aparelho B
12,2	12,5
12,1	12,2
10,55	10,57
13,33	13,32
11,42	11,47
10,30	10,30
12,32	12,36
13,27	13,29
11,93	11,91
12,50	12,61

Solução:

Hipóteses:

$H_0: \mu_D = 0$

$H_1: \mu_D \neq 0$

Dados:

$n = m = 10$

$\alpha = 5\%$

Uma vez que as amostras não são independentes, trata-se do teste "t" para amostras emparelhadas.

A variável teste é:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}} = \frac{\bar{D} - \Delta}{s_D / \sqrt{n}}$$

Onde:

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - n\bar{d}^2}{n-1}}$$

A	B	d_i	d_i^2
12,2	12,5	0,30	0,0900
12,1	12,2	0,10	0,0100
10,55	10,57	0,02	0,0004
13,33	13,31	-0,02	0,0004
11,42	11,44	0,02	0,0004
10,30	10,30	0,00	0,0000
12,32	12,36	0,04	0,0016
13,27	13,29	0,02	0,0004
11,93	11,90	-0,03	0,0009
12,50	12,61	0,11	0,0121
--	--	0,56	0,1162

Tem-se: $\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{0,56}{10} = 0,0560$

$$s = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - n\bar{d}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,1162 - 10.0,0560^2}{10-1}} = 0,0971$$

A variável teste é:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{D} - \Delta}{s_D / \sqrt{n}} = \frac{0,056 - 0}{0,0971 / \sqrt{10}} = \frac{0,056.\sqrt{10}}{0,0971} = 1,824$$

O valor crítico z_c é tal que: $P(|T| > t_c) = \alpha$ = 0,05 = 5%. Então t_c = $T^{-1}(0,05)$ = = 2,262. Assim RC = [2,262; + ∞]

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como t = 1,824 $\notin$ RC ou 1,824 < 2,262, **Aceito H_0**, *isto é, a 5% de significância* **não** *se pode afirmar que as leituras são diferentes.*