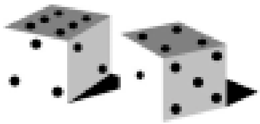


Probabilidade

Prof. Lorí Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
http://www. ufrgs.br/~viali/

Tipos de Modelos

Sistema Real → Modelo → Determinístico
Sistema Real → Modelo → Probabilístico

Modelo Determinnístico

Causas → Efeito

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Modelo Probabilístico

~~Causas~~ → Efeito

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Experimento Aleatório

Experiência para o qual o modelo probabilístico é adequado.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplos

E_1: Joga-se um dado e observa-se o número da face superior.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplos

E_2: Joga-se uma moeda quatro vezes e observa-se a seqüência de caras e coroas ;

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplos

E_3: Uma lâmpada nova é ligada e conta-se o tempo gasto até queimar;

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplos

E_4: Jogam-se dois dados e observa-se o par de valores obtido;

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Espaço Amostra(l)

É o conjunto de resultados de uma experiência aleatória.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplos

S_1 = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplos

S_2 = { cccc, ccck, cckc, ckcc, kccc, cckk, kkcc, ckkc, kcck, ckck, kckc, kkkc, kkck, kckk, ckkk, kkkk}

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplos

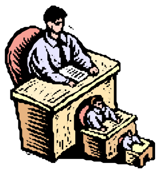
$S_3 = \{ t \in R \,/\, t \geq 0 \}$

Exemplos

$S_4 = \{$ (1, 1), (1, 2),(1,3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) $\}$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Eventos



Um evento é um subconjunto de um espaço amostra.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Ocorrência de um evento

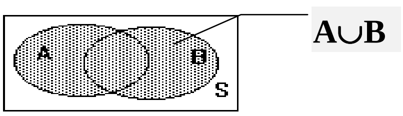
Seja E um experimento com espaço amostra associado S. Diremos que o evento A ocorre se realizado E o resultado é um elemento de A.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Combinação de eventos

Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

A união B, A soma B ou A mais B, se e só se A ocorre ou B ocorre.

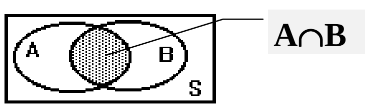


Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Combinação de eventos

Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

A produto B, A vezes B ou A interseção B, se e só se A ocorre e B ocorre.

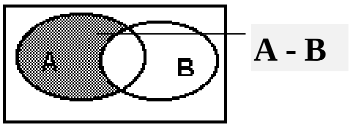


Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Combinação de eventos

Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

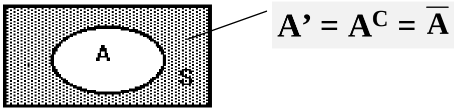
A menos B, A diferença B, se e só se A ocorre e B não ocorre.



Combinação de eventos

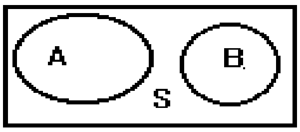
Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

Complementar de A (não A) se e só se A não ocorre.



Eventos mutuamente excludentes

Dois eventos A e B são mutuamente excludentes se não puderem ocorrer juntos.

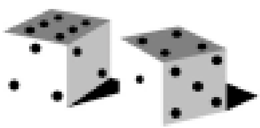


Conceitos de Probilidade

- ♣ CLÁSSICO
- ♥ FREQÜENCIAL
- ♠ AXIOMÁTICO

CLÁSSICO

$$P(A) = \frac{\text{(número de casos favoráveis)}}{\text{(número de casos possíveis)}}$$



Freqüência Relativa

$$fr_A = \frac{\text{(número de vezes que A ocorre)}}{\text{(número de vezes que E é repetido)}}$$

Conceito freqüencial de probabilidade

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} fr_A$$

Conceito Axiomático

P(A) é um número real que deve satisfazer as seguintes propriedades:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(S) = 1$

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

se $A \cap B = \varnothing$

Conseqüências dos Axiomas

(1) $P(\varnothing) = 0$

(2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(3) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Conseqüências dos Axiomas

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(5) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$

$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) +$

$+ P(A \cap B \cap C)$

Probabilidade Condicionada

Definição

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$$

Teorema da multiplicação

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = P(A/B).P(B)$$

Independência

Dois eventos A e B são independentes se a probabilidade de um ocorrer não altera a probabilidade do outro ocorrer, isto é:

Independência

(1) P(A/B) = P(A)

(2) P(B/A) = P(B)

(3) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Partição de um espaço amostra

Diz-se que os conjuntos:

$A_1, A_2, ..., A_n$

eventos de um mesmo espaço amostra S, formam uma partição deste espaço se:

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

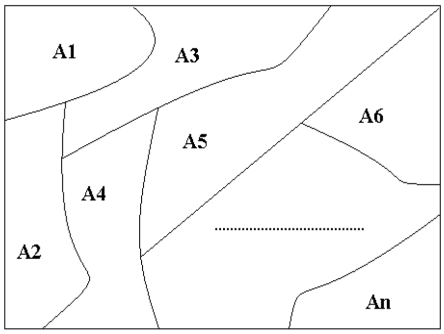
(1) $A_i \cap A_j = \varnothing$, para todo $i \neq j$

(2) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = S$, para todo $i \neq j$

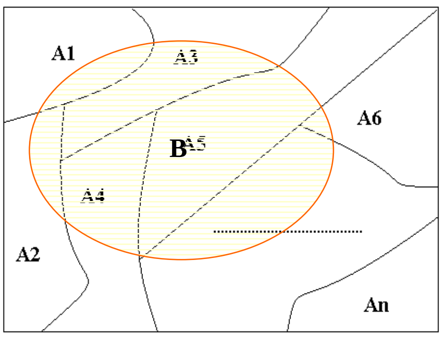
(3) $P(A_i) > 0$, para todo i

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Partição de um espaço amostra



Teorema da probabilidade total



Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

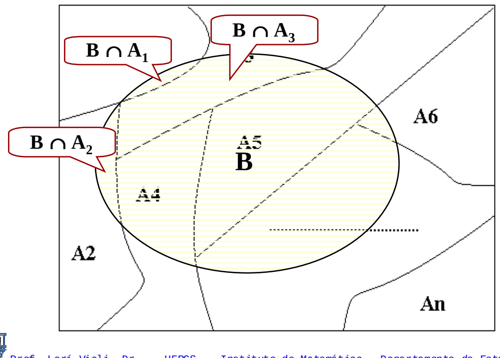
Teorema da probabilidade total

B pode ser escrito como:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ... \cup (B \cap A_n)$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Teorema da probabilidade total



Teorema da probabilidade total

P(B) será então:

$$P(B) = P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_1) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)]$$

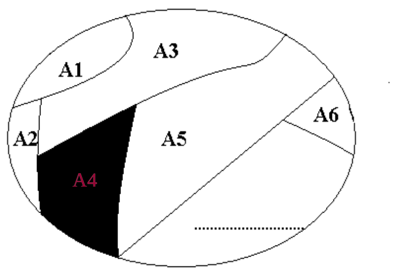
$$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n) =$$

$$= \sum P(B \cap A_i) = \sum P(A_i).P(B/A_i)$$

$$P(B) = \sum P(A_i).P(B/A_i)$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Teorema de Bayes



Teorema de Bayes

Calcula a probabilidade de ocorrência de um dos "A_i" (que formam a partição) dado que ocorreu um evento qualquer "B".

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Teorema de Bayes

Aplicando a expressão da probabilidade condicionada vem:

$$P(A_i /B) = P(A_i \cap B)/ P(B) =$$

$$= P(A_i).P(B/A_i)/ P(B)$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Teorema de Bayes

Na expressão

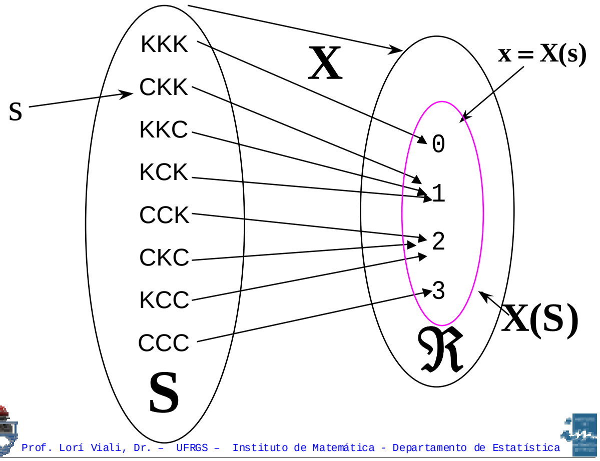
$$P(A_i /B) = P(A_i).P(B/A_i) / P(B)$$

o valor de P(B) é obtido através do Teorema da Probabilidade Total

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Variável

Aleatória



Variável Aleatória

Uma função **X** que associa a cada elemento de S ($s \in S$) um número real $x = X(s)$ é denominada **variável aleatória**.

Tipos de variáveis

Conforme o conjunto de valores – X(S) – uma variável aleatória poderá ser discreta ou contínua.

Variável Discreta (VAD)

Se o conjunto de valores for **finito** ou então **infinito enumerável** a variável é dita discreta.

Variável Contínua (VAC)

Se o conjunto de valores for **infinito não enumerável** então a variável é dita contínua.

Variável Aleatória Discreta

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A função de probabilidade

A função de probabilidade (fp) de uma VAD é a função que associa a cada $\mathbf{x_i \in X(S)}$ o número $\mathbf{f(x_i) = P(X = x_i)}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$\mathbf{f(x_i) \geq 0}$, para todo "i"

$\mathbf{\sum f(x_i) = 1}$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A distribuição de probabilidade

A coleção dos pares $\mathbf{[x_i, f(x_i)]}$ para i = 1, 2, 3, ... é denominada de **distribuição de probabilidade** da VAD X.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplo

Suponha que um par de dados é lançado. Então X = "soma do par" é uma variável aleatória discreta com o seguinte conjunto de valores:

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Como X((a, b)) = a + b, o conjunto de valores de X é dado por:

$\mathbf{X(S) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}}$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A função de probabilidade f(x) = P(X = x), associa a cada x ∈ X(S), um número no intervalo [0; 1] dado por:

$\mathbf{f(x) = P(X = x) = P(X(s) = x) =}$

$\mathbf{= P([x \in X(S) / X(s) = x\})}$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Desta forma:

$f(2) = P(X = 2) = P\{(1,1)\} = 1/36$

$f(3) = P(X = 3) = P\{(1,2), (2, 1)\} = 2/36$

....

$f(11) = P(X=11) = P\{(6, 5), (5, 6)\} = 2/36$

$f(12) = P(X = 12) = P\{(6, 6)\} = 1/36$

A distribuição de probabilidade será:

A distribuição de probabilidade de X será então:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	**1**

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Representação de uma Distribuição de Probabilidade

Através de:

- uma tabela
- uma expressão analítica (fórmula)
- um diagrama

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Tabela

Seja X = "número de caras", obtidas no lançamento de 4 moedas honestas. Então a distribuição de X é a dada ao lado.

x	f(x)
0	1/16
1	4/16
2	6/16
3	4/16
4	1/16
Σ	1

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Expressão Analítica

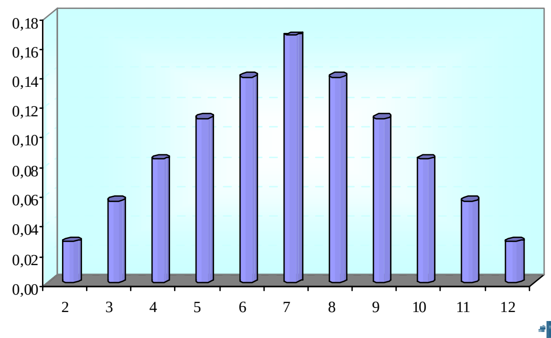
Considere X = "soma do par", no lançamento de dois dados equilibrados, então:

$$\mathbf{f : X(S) \rightarrow \Re}$$

$$x \rightarrow \begin{cases} (x - 1)/36 & \text{se } x \leq 7 \\ (12 - x - 1)/36 & \text{se } x > 7 \end{cases}$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Diagrama



Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

VAD - Caracterização

(a) Expectância, valor esperado

$$\mu = E(X) = \sum x.f(x) = \sum x.P(X = x)$$

(b) Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\sum f(x)(x-\mu)^2} = \sqrt{\sum x^2 f(x) - \mu^2}$$

Modelos Discretos de Probabilidade

- **Bernoulli**
- **Binomial**
- **Hipergeométrica**

Bernoulli

EXPERIMENTO

Qualquer um que corresponda a apenas dois resultados. Estes resultados são anotados por “0” ou “fracasso” e “1” ou “sucesso”. A probabilidade de ocorrência de “sucesso é representada por “p” e a de insucesso por “q = 1 – p”.

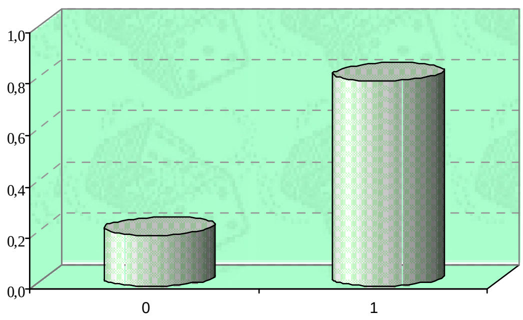
Conjunto de Valores

X(S) = { 0, 1}

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1-p & \text{se } x = 0 \\ p & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

A Função de Probabilidade (fp)



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \sum x.f(x) = 0.q + 1.p = p$$

Variância

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$$

$$= (0^2.q + 1^2.p) - p^2 =$$

$$= p - p^2 = p(1-p) = pq$$

Binomial

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

EXPERIMENTO

Como existem apenas duas situações: A ocorre e A não ocorre, pode-se determinar a probabilidade de A não ocorrer como sendo q = 1 – p.

A VAD definida por X = “número de vezes que A ocorreu nas ‘n’ repetições de E” é denominada BINOMIAL.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Conjunto de Valores

$$X(S) = \{0, 1, 2, 3, ..., n\}$$

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \sum x.f(x) = np$$

Variância

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = npq$$

$$\sigma_X = \sqrt{npq}$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Hipergeométrico

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

EXPERIMENTO

A distribuição Binomial é deduzida com base em "n" repetições de um experimento de maneira independente (isto é, p = constante), ou retiradas com reposição de uma população finita.

EXPERIMENTO

Se a experiência consistir na seleção de objetos, **sem reposição**, de uma população finita, de tamanho "N", onde "r" apresentam uma característica "N – r" não apresentam esta característica, então existirá dependência entre as repetições.

EXPERIMENTO

Neste caso a variável aleatória **X** = "número de objetos com a característica **r** em uma amostra de tamanho **n**", terá uma distribuição denominada de Hipergeométrica.

Conjunto de Valores

x : máx{0, n–N+r)}, ..., mín{r, n}

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = np$$

Desvio Padrão

$$\sigma_X = \sqrt{npq}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \qquad \text{Onde } p = \frac{r}{N}$$

Variável Aleatória Contínua

Seja X uma variável aleatória com conjunto de valores X(S). Se o conjunto de valores for **infinito não enumerável** então a variável é dita **contínua**.

A função densidade de probabilidade

É a função que associa a cada $\mathbf{x \in X(S)}$ um número f(x) que deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$\mathbf{f(x) \geq 0}$$

$$\mathbf{\int f(x).dx}$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

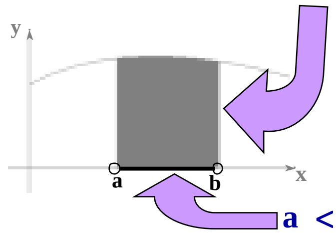
A Distribuição de Probabilidade

A coleção dos pares **(x, f(x))** é denominada de **distribuição de probabilidade** da VAC X.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Cálculo da Probabilidade

$$\mathbf{P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx}$$



a < X < b

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Cálculo da Probabilidade

$$\mathbf{P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx}$$

Isto é, a probabilidade de que X assuma valores entre os números "a" e "b" é a área sob o gráfico de f(x) entre os pontos x = **a** e x = **b**.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Observações:

Se X é uma VAC, então:

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) =$$

$$= P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

VAC - Caracterização

(a) Expectância, valor esperado

$$\mu = E(X) = \int x.f(x)dx$$

(b) Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\int f(x)(x-\mu)^2 dx} = \sqrt{\int x^2 f(x)dx - \mu^2}$$

A função de distribuição

É a função F(x) definida por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

A F(x) é a integral da f(x) até um ponto genérico "**x**".

Cálculo da Probabilidade com a FDA

O uso da FDA é bastante prático no cálculo das probabilidades, pois não é necessário integrar, já que ela é um função que fornece a Integral.

Usando a FDA, teremos sempre três casos possíveis:

$$P(X \leq x) = F(x)$$

$$P(X > x) = 1 - F(x)$$

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Modelos Probabilísticos Contínuos

- **Uniforme**
- **Exponencial**
- **Normal**
  - **t (Student)**
  - **χ^2 (Qui-quadrado)**
  - **F (Snedekor)**

Uniforme

Uma VAC X é uniforme no intervalo [a; b] se assume todos os valores com igual probabilidade. Isto é, se f(x) for:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

A função de distribuição

A função F(x) é dada por:

$$\mathbf{F(x)} = \begin{cases} 0 & \textbf{se } \mathbf{x < a} \\ \dfrac{\mathbf{x-a}}{\mathbf{b-a}} & \textbf{se } \mathbf{a \leq x \leq b} \\ 1 & \textbf{se } \mathbf{x > b} \end{cases}$$

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Variância

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

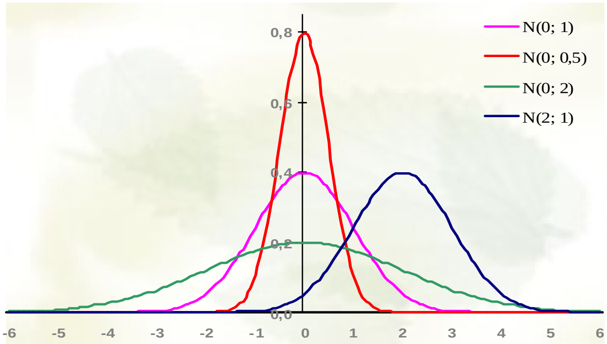
A Distribuição Normal

Uma variável aleatória X tem uma distribuição **normal** se sua fdp for do tipo:

$$\mathbf{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}, \quad \mathbf{x \in \Re}$$

com $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$

Gráficos



Cálculo da Probabilidade

$$P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du = ?$$

A normal não é integrável através do TFC, isto é, não existe F(x) tal que F'(x) = f(x).

Solução do Problema

Utilizar integração numérica. Como não é possível fazer isto com todas as curvas, escolheu-se uma para ser tabelada (integrada numericamente).

A normal padrão

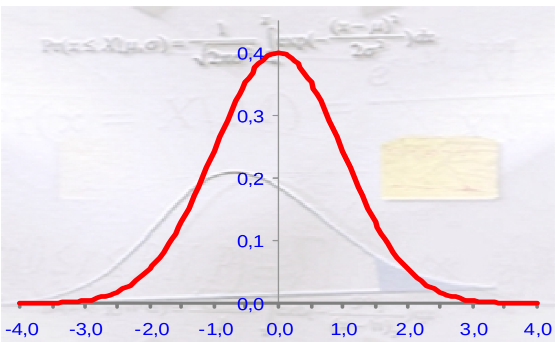
A curva escolhida é a N(0, 1), isto é, com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

Se X é uma N(μ, σ), então:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Será uma N(0; 1)

Distribuição N(0, 1)



Uso da Planilha

$$P(Z \le z) = \Phi(z) = \text{DIST.NORP}(z)$$

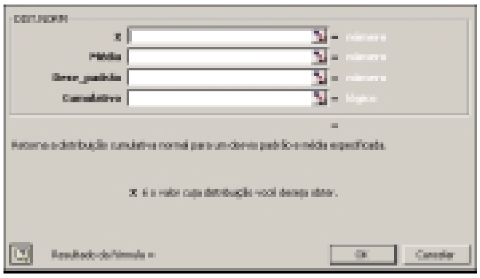
$$P(Z > z) = 1 - P(Z \le z) = 1 - \Phi(z) = \Phi(-z) = \text{DIST.NORP}(-z)$$

$$P(z_1 < Z < z_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \text{DIST.NORMP}(z_2) - \text{DIST.NORMP}(z_1)$$

A normal Qualquer

Se a normal não é a padrão pode-se padronizar ou, então, utilizar a função:

=DIST.NORM(x; μ; σ; 1)



A função Inversa

Uma VAC tem distribuição normal de média 50 e desvio padrão 8. Determinar:

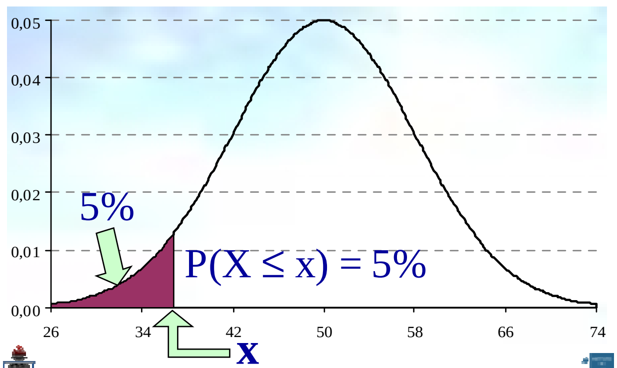
(a) $P(X \leq x) = 5\%$

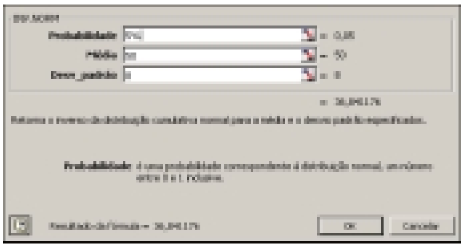
(b) $P(X > x) = 1\%$

Para resolver este tipo de exercício é preciso utilizar a função inversa, isto é:

= INV.NORM(5%; 50; 8) =
= 36,84

Graficamente, tem-se:



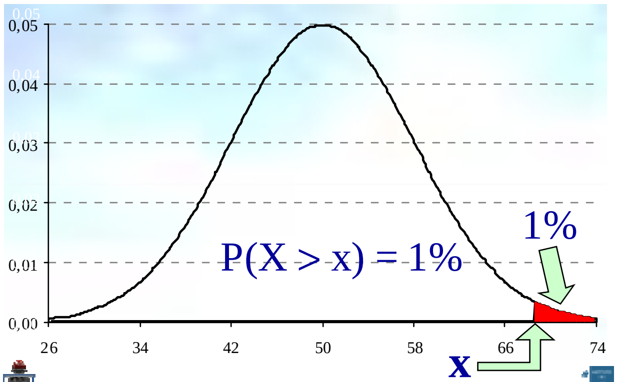


(b) P(X > x) = 1%

Não esquecer que a planilha fornece a área à esquerda, então:

$$P(X > x) = 1\% \Leftrightarrow P(X \le x) = 99\%$$

$$\Leftrightarrow \text{INV.NORM}(99\%;\ 50;\ 8) = 68{,}61$$



Outras Distribuições

t ou de Student

Uma variável aleatória X tem uma distribuição **“t”** ou de **Student** se sua fdp for do tipo:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon + 1}{2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{\upsilon}\right)^{-\frac{\upsilon+1}{2}}}{\sqrt{\pi\upsilon}\,.\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)}$$

para $x \in \Re$

onde Γ é a função dada por

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

para $p > 0$

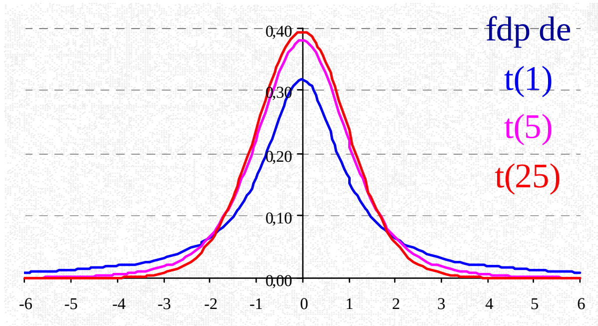
$$\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1)$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

se $n \in Z$

Gráficos



Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Caracterização

Expectância ou Valor esperado

$$\mu = E(X) = 0$$

Variância

$$Var(X) = \frac{\upsilon}{\upsilon - 2}$$

O valor υ é denominado de "Grau de liberdade"

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Planilha

A planilha fornece uma função direta e uma inversa, em relação a área à direita (**unilateral**) ou a soma das caudas (**bilateral**), isto é, a tabela retorna um valor "**t**" tal que **$P(T \geq t) = \alpha$ (unilateral)** ou **$P(|T| \geq t) = \alpha$ (bilateral)**.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

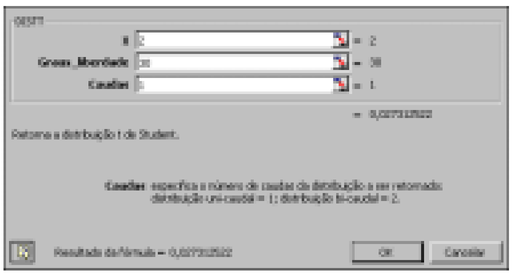
Exemplo:

(a) Dada uma distribuição t (de Student) com parâmetro g.l. = 30, determinar: $P(T \geq 2)$.

(b) O valor "t" tal que $P(|T| \leq t) = 90\%$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

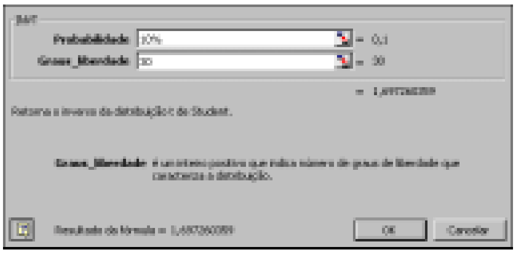
(a)



Então $P(T \geq 2) = 2,73\%$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

(b)



Então O valor "t" tal que $P(|T| \le t) = 90\%$ é $t = 1{,}697$

Qui-Quadrado

Uma variável aleatória X tem uma distribuição **Qui-Quadrado** se sua fdp for do tipo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{\upsilon}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{\upsilon}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

Caracterização

Expectância ou Valor esperado

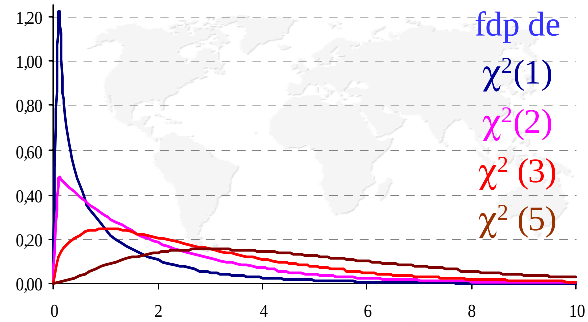
$$E(X) = \upsilon$$

Variância

$$Var(X) = 2\upsilon$$

O valor υ é denominado de "Grau de liberdade"

Gráficos



Planilha

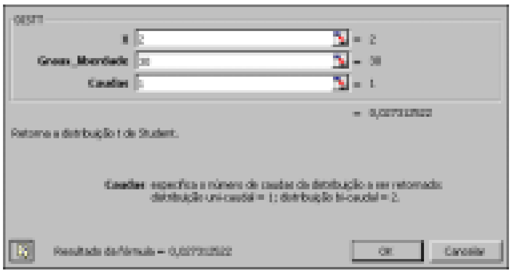
A planilha fornece uma função direta e uma inversa, em relação a área à direita (**unilateral**) ou a soma das caudas (**bilateral**), isto é, a tabela retorna um valor "t" tal que **$P(T \ge t) = \alpha$ (unilateral)** ou **$P(|T| \ge t) = \alpha$ (bilateral)**.

Exemplo:

(a) Dada uma distribuição t (de Student) com parâmetro g.l. = 30, determinar: $P(T \geq 2)$.

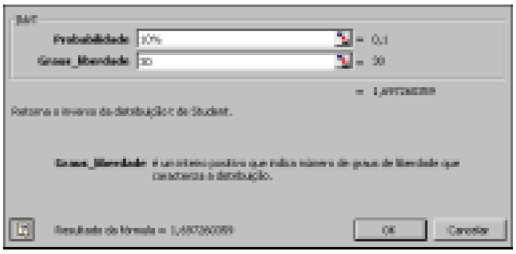
(b) O valor "t" tal que $P(|T| \leq t) = 90\%$

(a)



Então $P(T \geq 2) = 2{,}73\%$

(b)



Então O valor "t" tal que $P(|T| \leq t) = 90\%$ é $t = 1{,}697$

Planilha

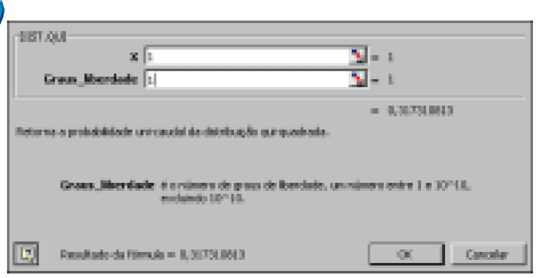
A planilha fornece uma função direta (área á direita) e uma inversa, em relação a área à direita (**unilateral**). Isto é, a planilha retorna um valor "α" tal que **$P(\chi^2 \geq c) = \alpha$ (unilateral),** ou "c" tal que **$P(\chi^2 \geq c) = \alpha$,** no caso da função inversa.

Exemplo:

(a) Dada uma distribuição Qui-Quadrado com parâmetro g.l. = 1, determinar: $P(\chi^2 \geq 1)$.

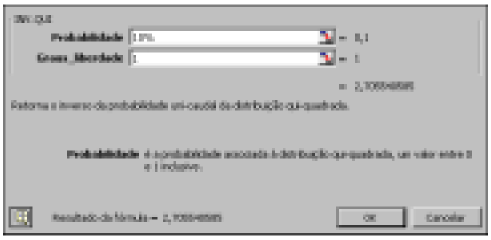
(b) O valor de "c" tal que $P(\chi^2 \leq c) = 90\%$

(a)



Então $P(\chi^2 \geq 1) = 31{,}73\%$

(b)



Então, o valor de "c" tal que, $P(\chi^2 \leq c) = 90\%$ é $c = 2{,}71$.

Snedecor ou F

Uma variável aleatória X tem uma distribuição **"F"** ou de **Snedecor** se sua fdp for do tipo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right) m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} (n+mx)^{-\frac{m+n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Caracterização

Expectância ou Valor esperado

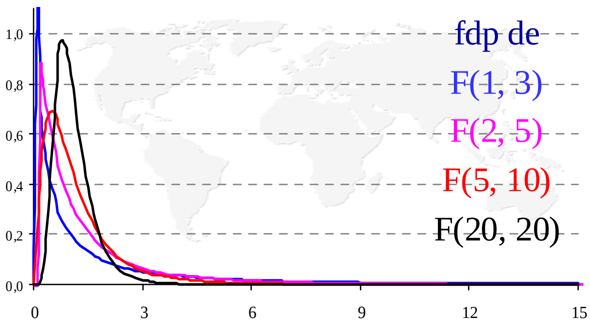
$$E(X) = \frac{m}{m-2}$$

m é o grau de liberdade do numerador e **n** do denominador

Variância

$$Var(X) = \frac{2(m+n-2)\, m^2}{m(n-2)(n-4)}$$

Gráficos



Planilha

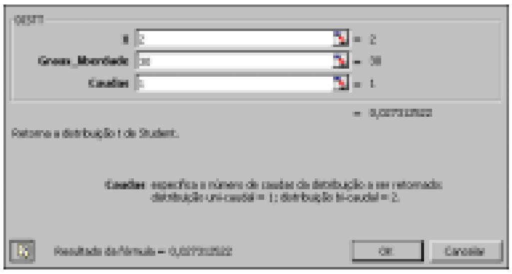
A planilha fornece uma função direta e uma inversa, em relação a área à direita (**unilateral**) ou a soma das caudas (**bilateral**), isto é, a tabela retorna um valor "**t**" tal que $P(T \geq t) = \alpha$ (**unilateral**) ou $P(|T| \geq t) = \alpha$ (**bilateral**).

Exemplo:

(a) Dada uma distribuição t (de Student) com parâmetro g.l. = 30, determinar: $P(T \geq 2)$.

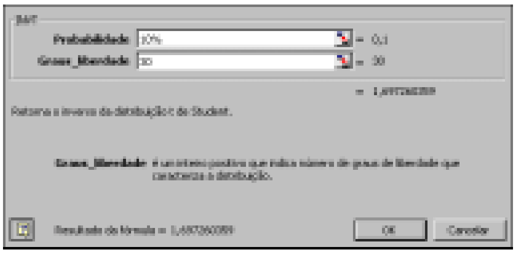
(b) O valor "t" tal que $P(|T| \leq t) = 90\%$

(a)



Então $P(T \geq 2) = 2{,}73\%$

(b)



Então O valor "t" tal que $P(|T| \leq t) = 90\%$ é t = 1,697

Planilha

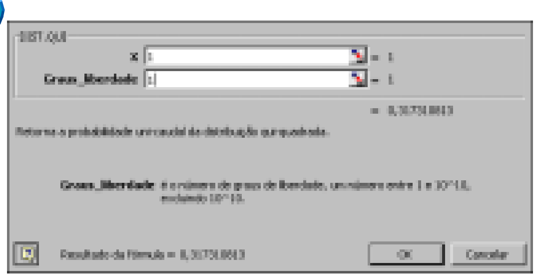
A planilha fornece uma função direta (área á direita) e uma inversa, em relação a área à direita (**unilateral**). Isto é, a planilha retorna um valor "α" tal que **$P(\chi^2 \geq c) = \alpha$ (unilateral)**, ou "c" tal que **$P(\chi^2 \geq c) = \alpha$,** no caso da função inversa.

Exemplo:

(a) Dada uma distribuição Qui-Quadrado com parâmetro g.l. = 1, determinar: $P(\chi^2 \geq 1)$.

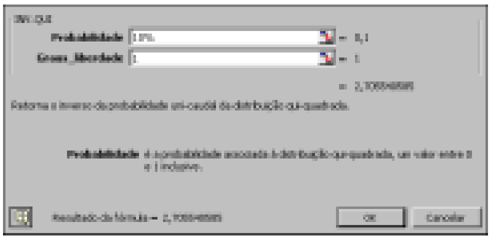
(b) O valor de "c" tal que $P(\chi^2 \leq c) = 90\%$

(a)



Então $P(\chi^2 \geq 1) = 31{,}73\%$

(b)



Então, o valor de “c” tal que, $P(\chi^2 \leq c) = 90\%$ é $c = 2{,}71$.

Planilha

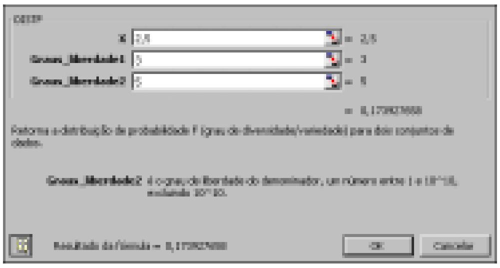
O que é tabelado é a área à direita de cada curva (função direta), isto é, dado um certo valor de “x”, tem-se: **P[F(m, n) ≥ x] = α,** ou dado uma área à direita α pode-se determinar “x” que satisfaz **P[F(m, n) ≥ x] = α** (função inversa).

Exemplo:

(a) Dada uma distribuição F com parâmetros g.l. do numerador = 3 e g.l. do denominador igual a 5, determinar $P(F \geq 2{,}5)$.

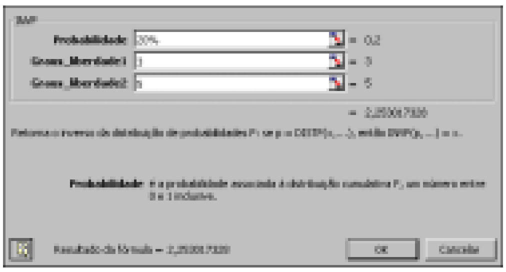
(b) O valor de “f” tal que $P(F \leq f) = 80\%$

(a)



Então $P(F \geq 2{,}5) = 17{,}39\%$

(b)



Então, o valor de “f” tal que, $P(F \leq f) = 80\%$ é $f = 2{,}25$.

Desigualdade de Tchebycheff

Desigualdade

de **Tchebycheff**, Tchebichev ou Chebyshev, 1821 –1894.

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$$

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - 1/k^2$$

Desigualdade de Camp-Meidell

Se a distribuição for unimodal e simétrica, então:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 4/9k^2$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

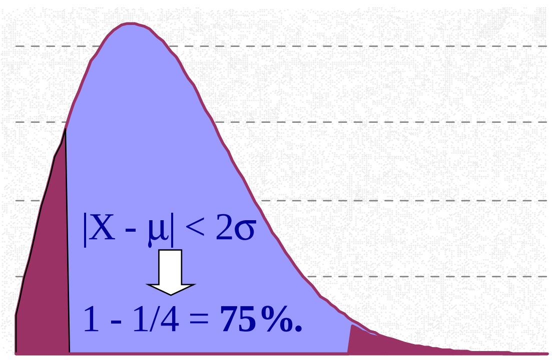
Estas desigualdades fornecem as probabilidades de que os valores de uma VAD/VAC estejam em um intervalo simétrico em torno da média de amplitude igual a 2k desvios padrões.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Assim se k = 2, por exemplo, a desigualdade de **Tchebycheff** estabelece que o percentual de valores da variável aleatória que está compreendida no intervalo $\mu \pm 2\sigma$ é de pelo menos 1 - 1/4 = **75%.**

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Graficamente



Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Na normal este percentual vale exatamente 95,44%. Mas como a normal é simétrica e unimodal, neste caso, um resultado mais próximo é dado pela desigualdade de **Camp-Meidell**, isto é:

$$\mathbf{1 - 4/(9k^2) = 1 - (1/9) = 88{,}89\%.}$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística