# Amostragem & Estimação

**Prof. Lorí Viali, Dr.**
**viali@mat.ufrgs.br**
**http://www.ufrgs.br/~viali/**

## População

Uma coleção de todos os possíveis elementos, objetos ou medidas de interesse.



## Censo

Um levantamento efetuado sobre toda uma população é denominado de **levantamento censitário** ou simplesmente **censo**.



## Amostra

Um subconjunto finito de uma população de interesse.



## Amostragem

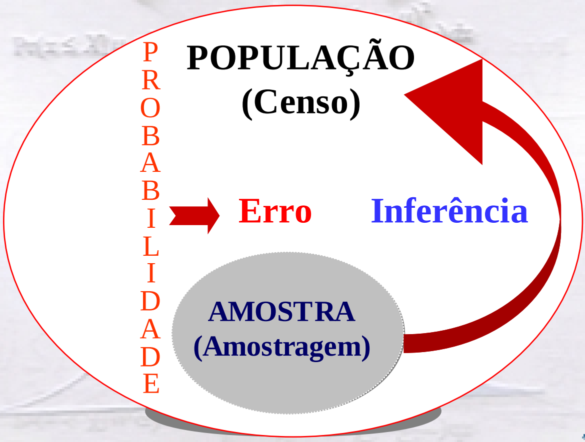
O processo de escolha de uma amostra da população é denominado de **amostragem**.



Método de se inferir sobre uma população a partir do conhecimento de pelo menos uma amostra dessa população.

Estudo das relações teóricas existentes entre uma população e as amostras dela extraídas.








**Tipos de Amostragem**

- **Probabilística**
- **Não Probabilística**



## Amostragem Probabilística

**Todos os elementos da população têm probabilidade conhecida (e diferente de zero) de fazer parte da amostra.**

## Métodos de Amostragem Probabilística

- Aleatória Simples
- Sistemática
- Estratificada
- Por Conglomerados



## Amostragem Ao Acaso (aa) ou Aleatória Simples (aas)

Uma amostra é dita "**aleatória simples**" ou "**ao acaso**" se todos os elementos da população tiverem a **mesma** probabilidade de pertencer a amostra

## Total de Amostras

A A S

**Com** Reposição $k = N^n$

**Sem** Reposição

**Não Ordenadas** $k = \binom{N}{n}$

**Ordenadas** $k = A_N^n$



## Estimador, Estimativa e Parâmetro

Uma característica da população é denominada de parâmetro.

Um estimador é uma característica da amostra.

Uma estimativa é um valor particular de um estimador.



## Principais Parâmetros

$\mu$ → **A MÉDIA**

$\sigma^2$ → **A VARIÂNCIA**

$\sigma$ → **O DESVIO PADRÃO**

$\pi$ → **A PROPORÇÃO**



## Principais Estimadores

$\overline{X}$ → **A MÉDIA**

$S^2$ → **A VARIÂNCIA**

$S$ → **O DESVIO PADRÃO**

$P$ → **A PROPORÇÃO**



## Distribuições Amostrais

**POPULAÇÃO**

$\theta$

$\hat{\theta}_1$ **Amostra 1**

$\hat{\theta}_2$ **Amostra 2**

..... .................

$\hat{\theta}_k$ **Amostra k**



## Distribuições Amostrais

A distribuição de probabilidade de um estimador (variável aleatória) é denominada de distribuição amostral desse estimador.

## Distribuição Amostral da Média
### Características

**Média** → $\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = \mu$

**Erro padrão** →

**COM Reposição** $\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

**SEM Reposição** $\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$

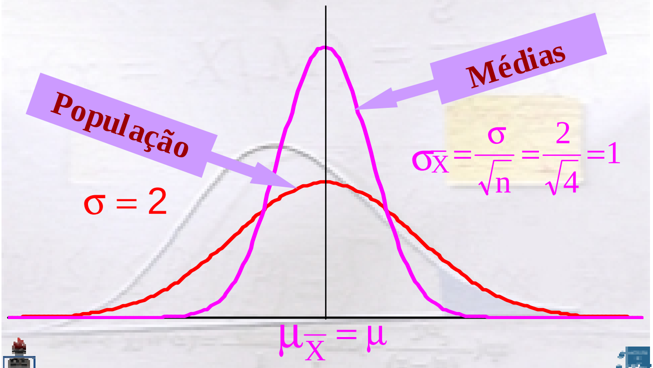


## Forma da Distribuição Amostral da Média

Se uma amostra aleatória de tamanho "n" for retirada de uma população X com uma distribuição N(μ; σ), então a distribuição de $\bar{X}$, média da amostra, tem uma distribuição $N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$



## Distribuição Amostral da Média



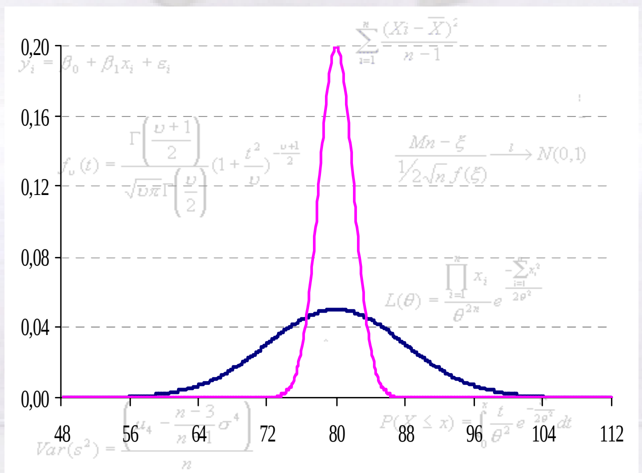



## Exemplo:

Uma amostra de n = 16 elementos é retirada de uma população N(80; 8). Determine:

$$P(76 < \bar{X} < 85)$$






## Solução:

Tem-se: μ = 80, σ = 8

Sabe-se que:

$\mu_{\bar{X}} = 80$ e

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{16}} = 2$$

$$P(76 < \overline{X} < 85) =$$

= DIST.NORM(85; 80; 8; 1) –

- DIST.NORM(76; 80; 8; 1) =

= 73,40% - 30,85 = 42,55%

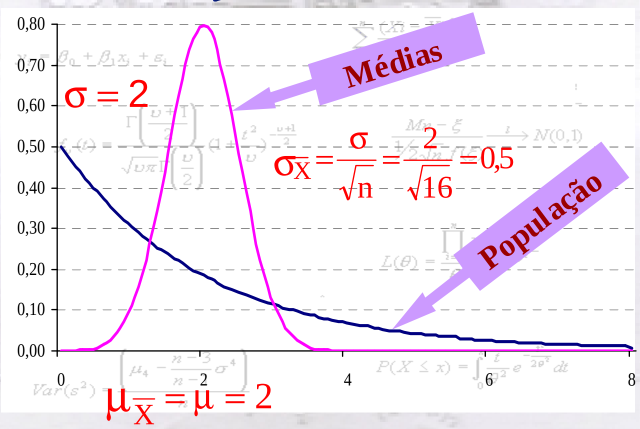


## Forma da Distribuição Amostral da Média

Se uma amostra aleatória de tamanho "**n > 30**" for retirada de uma população com **qualquer** distribuição de média $\mu$ e desvio padrão $\sigma$, então a distribuição de $\overline{X}$, média da amostra, tem uma distribuição aproximadamente $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



## Distribuição Amostral da Média






## Exemplo:

Uma amostra de "n" elementos é retirada de uma população N(80; 4). Determine "n" de forma que:

$$P(\overline{X} < 79) = 1{,}50\,\%$$



## Solução:

Tem-se: $\mu = 80$, $\sigma = 4$

Sabe-se que:

$$\mu_{\overline{X}} = 80 \quad \text{e}$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n}}$$



## Então:

$$P(\overline{X} < 79) =$$

$$= P\left(\frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} < \frac{79 - 80}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right) =$$

$$= P(Z < -\frac{\sqrt{n}}{4}) = \Phi(-\frac{\sqrt{n}}{4}) = 1{,}50\,\%$$

$= \text{INV.NORMP}(1{,}5\%) = -2{,}17$

Assim:

$$-\frac{\sqrt{n}}{4} = -2{,}17$$

$$\sqrt{n} = 2{,}17.4 = 8{,}68$$

$$n \geq (8{,}68)^2 \cong 76$$



## Distribuição Amostral da Proporção

### Características

**Média** $\mu_P = E(P) = \pi$

**Erro padrão**

**COM Reposição** $\sigma_P = \sqrt{\dfrac{\pi(1-\pi)}{n}}$

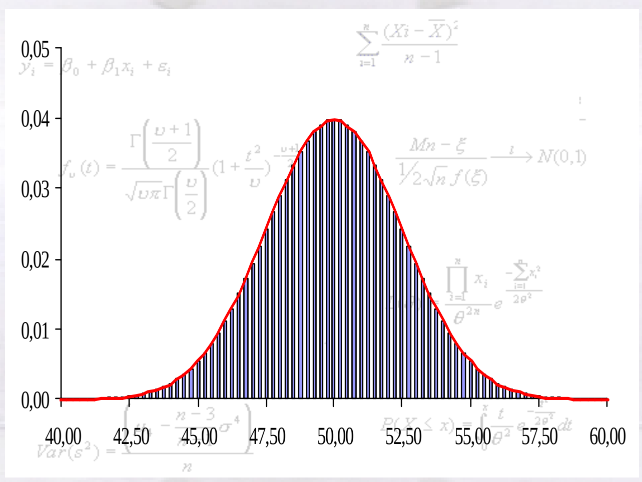
**SEM Reposição** $\sigma_P = \sqrt{\dfrac{\pi(1-\pi)}{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$



## Forma da Distribuição Amostral da Proporção

Se uma amostra aleatória de tamanho “**n > 100**” for retirada de uma população com proporção **$\pi$**, então a distribuição de **P**, **proporção na amostra**, tem uma distribuição aproximadamente $N(\pi, \sqrt{\dfrac{\pi(1-\pi)}{n}})$






## Exemplo:

Uma amostra de n = 400 eleitores é retirada da população que prefere o candidato Zigoto com $\pi$ = 50% Determine:

$$P(47\% < P < 54\%)$$



## Solução:

Tem-se: $\pi = 50\%$

Sabe-se que: $\mu_P = \pi = 50\%$

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}45\ (1 - 0{,}45)}{400}} =$$

$$= 0{,}025 = 2{,}50\ \%$$

## Então:

$P(47 < P < 54) =$

= DIST.NORM(54; 50; 2,5; 1) –

- DIST.NORM(47; 50; 2,5; 1) =

= 94,52% - 11,51 = 83,01%



## Distribuição Amostral da Variância

### Características

Amostragem **com** reposição

**Média** ⇒ $\mu_{S^2} = E(S^2) = \sigma^2$

**Erro padrão** ⇒ $\sigma_{S^2} = \sqrt{\dfrac{2\sigma^4}{n-1}} = \sigma^2\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$



## Forma da Distribuição Amostral da Variância

Se uma amostra aleatória de tamanho "**n**" (grande) for retirada de uma população com variância $\boldsymbol{\sigma^2}$, então a distribuição de **$S^2$**, **variância da amostra**, tem uma distribuição aproximadamente $\chi^2$ com "n-1" g.l., a menos de uma constante.



## Distribuição Amostral da Variância

### Isto é:

$$S^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2_{n-1}$$

**Este resultado é conhecido como Teorema de Fisher**



## Exemplo:

Uma amostra de **n = 81** elementos é retirada de uma população com variância $\boldsymbol{\sigma^2 = 10}$. Determine a probabilidade de que $P(S^2 > 15)$.



## Solução:

Tem-se:

$n = 81$

$\sigma^2 = 10$

Sabe-se que:

$$S^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2_{n-1}$$

Então:

$$P(S^2 > 15) = P[\frac{\sigma^2}{(n-1)}\chi^2_{n-1} > 15] =$$

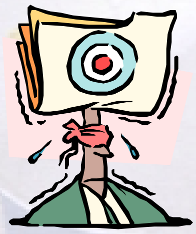
$$= P[\chi^2_{n-1} > \frac{15.(n-1)}{\sigma^2}] =$$

$$= P(\chi^2_{80} > \frac{15.80)}{10}) = P(\chi^2_{80} > \frac{15.80)}{10}) =$$

$$P(\chi^2_{80} > 120) = \text{DIST.QUI}(120; 80) = 0{,}25\%$$



# Estimação

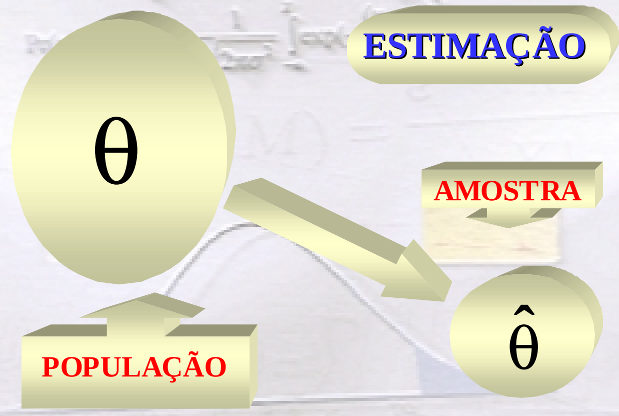




# Estimação

Uma A estimação tem por objetivo fornecer informações sobre parâmetros populacionais, tendo como base uma amostra aleatória extraída da população de interesse.








Tipos de Estimação

- **Por Ponto**
- **Por intervalo**



**ESTIMAÇÃO POR PONTO**

**A estimativa por ponto é feita através de um único valor.**

**ESTIMAÇÃO POR INTERVALO**

**A estimativa por intervalo, fornece um conjunto de valores.**

# Estimação por Ponto



As características básicas de um estimador são:

A média: $\mu_{\hat{\theta}} = E(\hat{\theta})$

A Variância: $\sigma^2_{\hat{\theta}} = V(\hat{\theta}) =$

$$= E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 =$$

$$= E(\hat{\theta}^2) - E(\hat{\theta})^2$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Através da média, pode-se saber em torno de que valor o estimador está variando. O ideal é que ele varie em torno do parâmetro $\theta$.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Através da raiz quadrada da variância tem-se uma idéia do erro cometido na estimação, isto é, o valor

$$\sigma_{\hat{\theta}} = \sqrt{V(\hat{\theta})}$$

é denominado de erro padrão de $\theta$.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A terceira informação necessária é a distribuição do estimador, isto é, qual o modelo teórico (probabilístico) do estimador.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

**OUTROS CONCEITOS IMPORTANTES**

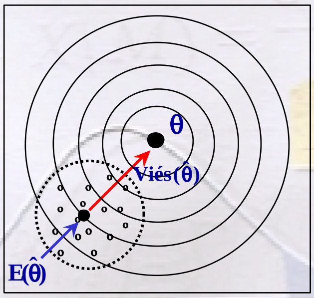
Viés: $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$

EQM: $EQM(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$

$$EQM(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = V(\hat{\theta}) + B(\hat{\theta})^2$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

## Erro Quadrado Médio






# Propriedades dos Estimadores



Seja $(X_1, X_2, ..., X_n)$ uma amostra aleatória de uma variável (população) X, com um parâmetro de interesse $\theta$. Seja $\hat{\theta}$ uma função da amostra (estimativa de $\theta$).



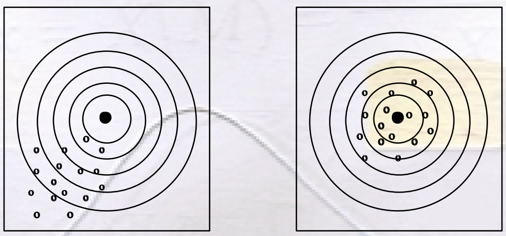
## Não Tendenciosidade

Um estimador é dito **não-tendencioso**, **não-viciado**, **sem viés** ou **imparcial** se:

$$\mu_{\hat{\theta}} = E(\hat{\theta}) = \theta$$



## Tendenciosidade



**Tendencioso** **Não tendencioso**



# Métodos de Estimação

- Momentos
- Mínimos Quadrados
- Máxima Verossimilhança
- MELNT (Melhor Estimativa Linear Não Tendenciosa)
- Bayes



## Métodos dos Momentos

É o mais antigo dos métodos para determinar estimadores (Pearson, 1894). Baseia-se no princípio de que se deve estimar o **momento de uma distribuição populacional** pelo **momento correspondente da amostra**.



Desta forma a **média populacional** deve ser estimada pela **média amostral**, a **variância populacional** pela **variância amostral** e assim por diante.

Este método produz estimadores que são consistentes e assintoticamente normais.



# Exemplos



A média da amostra $\overline{x}$ é um estimador não-viciado de $\mu$, isto é:

$$\mu_{\overline{X}} = E(\overline{X}) = \mu$$



A proporção amostral "P" é um estimador não-viciado de $\pi$, isto é:

$$\mu_{P} = E(P) = \pi$$

A variância da amostra "$S^2$" é um estimador viciado de $\sigma^2$, isto é:

$$\mu_{S^2} = E(S^2) \neq \sigma^2$$



A variância da amostra "$S^2$", calculada com "**n-1**" **no denominador** é um estimador não viciado de $\sigma^2$, isto é:

$$\boldsymbol{\mu_{S^2} = E(S^2) = \sigma^2}$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

## Consistência

Um estimador **não viciado** é dito **consistente** se:

$$\lim_{n \to \infty} V(\hat{\theta}) = 0$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

## Exemplos

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A média da amostra $\overline{x}$ é um estimador consistente de $\mu$, isto é:

$$\lim_{n \to \infty} V(\overline{X}) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A proporção amostral "P" é um estimador consistente de $\pi$, isto é:

$$\lim_{n \to \infty} V(P) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} = 0$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A variância da amostra "$S^2$" é um estimador consistente de $\sigma^2$, isto é:

$$\lim_{n \to \infty} V(S^2) = \lim_{n \to \infty} \frac{2\sigma^4}{n-1} = 0$$

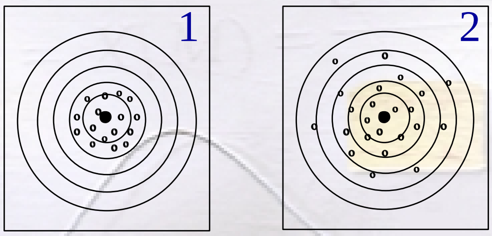


# Eficiência

Dados dois estimadores **não-tendenciosos** de um mesmo parâmetro, o **mais eficiente** é o que apresenta menor variância.



# Eficiência




O estimador **"1"** é mais eficiente que o **"2"**



# Exemplo



A média (simples) da amostra $\bar{x}$ é um estimador mais eficiente de $\mu$, do que **qualquer** média ponderada.



# Exercício um

Com base na distribuição da velocidades de uma amostra de **120** carros andando na estrada POA/Osório, determine estimativas da:

**(a) velocidade média**

**(b) variabilidade da velocidade**

**(c) da proporção de carros acima dos 100 km/h**



**(d) Estimativas dos erros padrão da:**

**(i) Média**

**(ii) Proporção**

**(iii) Variância**



| Velocidades | Freqüência |
|---|---|
| 80 ├── 85 | 8 |
| 85 ├── 90 | 13 |
| 90 ├── 95 | 24 |
| 95 ├── 100 | 33 |
| 100 ├── 105 | 29 |
| 105 ├── 110 | 13 |
| Total | 120 |



| Velocidades | Freqüência | $x_i$ | $f_ix_i$ |
|---|---|---|---|
| 80 ├── 85 | 8 | 82,5 | 660,0 |
| 85 ├── 90 | 13 | 87,5 | 1137,5 |
| 90 ├── 95 | 24 | 92,5 | 2220,0 |
| 95 ├── 100 | 33 | 97,5 | 3217,5 |
| 100 ├── 105 | 29 | 102,5 | 2972,5 |
| 105 ├── 110 | 13 | 107,5 | 13,97,5 |
| Total | 120 | — | **11605** |

## A média

A melhor estimativa da média é dada pela média da amostra. Assim:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{11605}{120} = 96{,}71 \quad km/h$$



| Velocidades | Freqüência | $x_i$ | $f_i x_i^2$ |
|---|---|---|---|
| 80 ├── 85 | 8 | 82,5 | 54450,00 |
| 85 ├── 90 | 13 | 87,5 | 99531,25 |
| 90 ├── 95 | 24 | 92,5 | 205350,00 |
| 95 ├── 100 | 33 | 97,5 | 313706,25 |
| 100 ├── 105 | 29 | 102,5 | 304681,25 |
| 105 ├── 110 | 13 | 107,5 | 150231,25 |
| Total | 120 | — | **1127950** |

## O desvio padrão

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2 - n\,\overline{x}^2}{n-1}} =$$

$$\sqrt{\frac{1127950 - 120.(96,7083)^2}{120-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{5649,7917}{119}} = \sqrt{47,4772} \cong 6,89 \text{ km/h}$$



## A proporção

A melhor estimativa de π é dada pela proporção amostral (p):

$$p = \frac{f}{n} = \frac{(29+13)}{120} =$$

$$= \frac{42}{120} = 0,35 = 35\%$$



O erro padrão da média é dado por:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Então uma estimativa do erro é dada por:

$$\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n}} =$$

$$\sqrt{\frac{47,4772}{120}} = 0,63 \text{ km/h}$$



O erro padrão da proporção é dado por:

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{\pi.(1-\pi)}{n}}$$

Então uma estimativa do erro é dada por:

$$\hat{\sigma}_P = \sqrt{\frac{\hat{\pi}.(1-\hat{\pi})}{n}} = \sqrt{\frac{p.(1-p)}{n}} =$$

$$\sqrt{\frac{0,35.0,65}{120}} = 0,0435 = 4,35\%$$



O erro padrão da variância é dado por:

$$\sigma_{S^2} = \sigma^2\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

Então uma estimativa do erro é dada por:

$$\hat{\sigma}_{S^2} = \hat{\sigma}^2\sqrt{\frac{2}{n-1}} = s^2\sqrt{\frac{2}{n-1}} =$$

$$= 47,4772\sqrt{\frac{2}{120-1}} = 6,15 \text{ (km/h)}^2$$



# Estimação por Intervalo

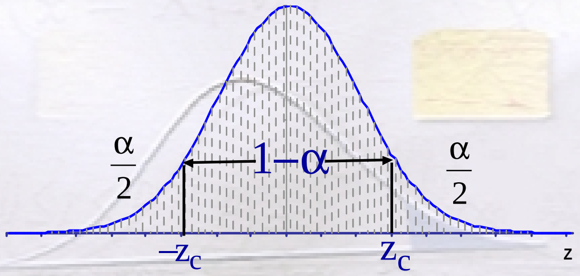
# (A)

# Da Média



## Supondo σ conhecido

$$P(-z_c < Z < z_c) = 1 - \alpha$$




Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

**De** $P(-z_c < Z < z_c) = 1 - \alpha$

**Tem-se:**

$$P\left(-z_c < \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} < z_c\right) = 1 - \alpha$$

$$P(-z_c \cdot \sigma_{\overline{X}} < \overline{X} - \mu < z_c \cdot \sigma_{\overline{X}}) = 1 - \alpha$$

$$P(-\overline{X} - z_c \cdot \sigma_{\overline{X}} < -\mu < -\overline{X} + z_c \cdot \sigma_{\overline{X}}) = 1 - \alpha$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

**Assim:**

$$P(-\overline{X} - z_c \cdot \sigma_{\overline{X}} < -\mu < -\overline{X} + z_c \cdot \sigma_{\overline{X}}) = 1 - \alpha$$

$$P(\overline{X} - z_c \cdot \sigma_{\overline{X}} < \mu < \overline{X} + z_c \cdot \sigma_{\overline{X}}) = 1 - \alpha$$

Então, o IC de “1 – α” para **μ** é calculado por:

$$\overline{\mathbf{X}} \pm \varepsilon_{\overline{X}} \qquad \varepsilon_{\overline{X}} = \mathbf{z_c}\sigma_{\overline{x}} \qquad \sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\mathbf{n}}}$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

# Exemplo

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Com base na distribuição das velocidades de uma amostra de **120** carros andando na estrada POA/Osório, e supondo que o desvio padrão populacional é igual a seis km/h determine uma estimativa para a velocidade média, com uma confiabilidade de 95%.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

## Tem-se:

$$\overline{X} \pm \varepsilon_{\overline{X}} \qquad \varepsilon_{\overline{X}} = z_c \sigma_{\overline{X}} \qquad \sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

**Mas:** $z_c = 1{,}96$

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{120}} = 0{,}5477$$

$$\varepsilon_{\overline{X}} = 1{,}96 . 0{,}5477 = 1{,}07$$



O IC de "1 – α" para μ é calculado por:

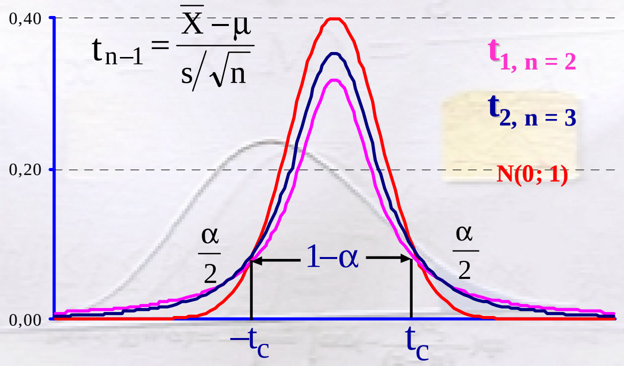
$$\left[\overline{X} - \varepsilon_{\overline{X}};\ \overline{X} + \varepsilon_{\overline{X}}\right]$$

$$\left[96{,}71 - 1{,}07;\ \ 96{,}71 + 1{,}07\right]$$

$$\left[95{,}64;\ 97{,}78\right]$$



## σ desconhecido




## De $P(-t_c < t < t_c) = 1 - \alpha$

## Tem-se:

$$P\left(-t_c < \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\hat{\sigma}_{\overline{X}}} < t_c\right) = 1 - \alpha$$

$$P(-t_c \cdot \hat{\sigma}_{\overline{X}} < \overline{X} - \mu < t_c \cdot \hat{\sigma}_{\overline{X}}) = 1 - \alpha$$

$$P(-\overline{X} - t_c \cdot \hat{\sigma}_{\overline{X}} < -\mu < -\overline{X} + z_t \cdot \hat{\sigma}_{\overline{X}}) = 1 - \alpha$$



## Assim:

$$P(-\overline{X} - t_c \cdot \hat{\sigma}_{\overline{X}} < -\mu < -\overline{X} + t_c \cdot \hat{\sigma}_{\overline{X}}) = 1 - \alpha$$

$$P(\overline{X} - t_c \cdot \hat{\sigma}_{\overline{X}} < \mu < \overline{X} + t_c \cdot \hat{\sigma}_{\overline{X}}) = 1 - \alpha$$

Então, o IC de "1 – α" para **μ**, se σ for desconhecido é calculado por:

$$\overline{X} \pm \hat{\varepsilon}_{\overline{X}} \qquad \hat{\varepsilon}_{\overline{X}} = t_c \hat{\sigma}_{\overline{X}} \qquad \hat{\sigma}_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$



# Exemplo

Com base na distribuição das velocidades de uma amostra de **120** carros andando na estrada POA/Osório, determine uma estimativa para a **velocidade média**, com uma confiabilidade de 95%.



**Tem-se:**

$$\overline{X} \pm \hat{\varepsilon}_{\overline{X}} \qquad \hat{\varepsilon}_{\overline{X}} = t_c \hat{\sigma}_{\overline{X}} \qquad \hat{\sigma}_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

**Mas:** $t_c = 1{,}98$

$$\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{47{,}4772}{120}} = 0{,}6290$$

$$\hat{\varepsilon}_{\overline{X}} = 1{,}98.0{,}6290 = 1{,}25$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

O IC de "1 – α" para μ é calculado por:

$$\left[\overline{X} - \hat{\varepsilon}_{\overline{X}}\,;\ \overline{X} + \hat{\varepsilon}_{\overline{X}}\right]$$

$$\left[96{,}71 - 1{,}25\,;\ 96{,}71 + 1{,}25\right]$$

$$\left[95{,}46\,;\ 97{,}96\right]$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

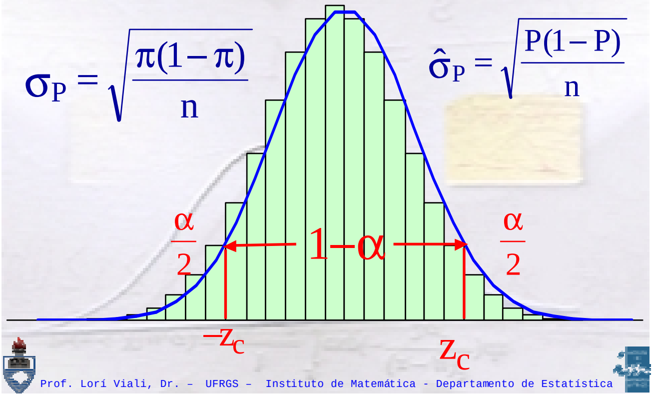
# (B)

# Da Proporção

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

$$P(-z_c < Z < z_c) = 1 - \alpha$$

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} \qquad \hat{\sigma}_P = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$




Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

**De** $P(-z_c < Z < z_c) = 1 - \alpha$

**Tem-se:**

$$P\left(-z_c < \frac{\overline{X} - \mu_P}{\sigma_P} < z_c\right) = 1 - \alpha$$

$$P(-z_c \cdot \sigma_P < P - \mu < z_c \cdot \sigma_P) = 1 - \alpha$$

$$P(-P - z_c \cdot \sigma_P < -\mu < -P + z_c \cdot \sigma_P) = 1 - \alpha$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

## Assim:

$$P(-P - z_c \cdot \sigma_P < -\mu < -P + z_c \cdot \sigma_P) = 1 - \alpha$$

$$P(P - z_c \cdot \sigma_P < \mu < P + z_c \cdot \sigma_P) = 1 - \alpha$$

Então, o IC de "1 – α" para **π** é calculado por:

$$P \pm \hat{\varepsilon}_P \qquad \hat{\varepsilon}_P = z_c \hat{\sigma}_P \qquad \hat{\sigma}_P = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$



## Exemplo



Com base na distribuição das velocidades de uma amostra de **120** carros andando na estrada POA/Osório, determine uma estimativa para a **proporção de carros com velocidade acima de 100 km/h**, com uma confiabilidade de 95%.



## Tem-se:

$$P \pm \hat{\varepsilon}_P \qquad \hat{\varepsilon}_P = z_c \hat{\sigma}_P \qquad \hat{\sigma}_P = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

**Mas:** $z_c = 1{,}96$

$$\hat{\sigma}_P = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}35.(1-0{,}35)}{120}} = 4{,}3541\%$$

$$\hat{\varepsilon}_{\overline{X}} = 1{,}96.4{,}3541 = 8{,}53\%$$



O IC de "1 – α" para **π** é calculado por:

$$[P - \hat{\varepsilon}_P;\ P + \hat{\varepsilon}_P]$$

$$[35\% - 8{,}53\%;\ \ 35\% + 8{,}53\%]$$

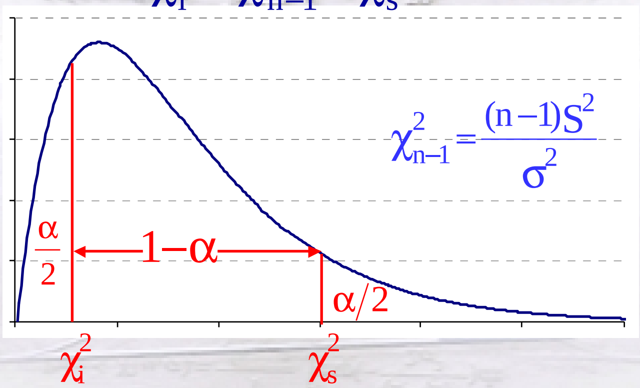
$$[26{,}47\%;\ \ 43{,}53\%]$$



## (C)

## Da Variância (Desvio Padrão)

$$P(\chi_i^2 < \chi_{n-1}^2 < \chi_s^2) = 1 - \alpha$$




**De** $P(\chi_i^2 < \chi_{n-1}^2 < \chi_s^2) = 1 - \alpha$

**Tem-se:**

$$P\left(\chi_i^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_s^2\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{1}{\chi_s^2} < \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} < \frac{1}{\chi_1^2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_s^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}\right) = 1 - \alpha$$



Então o IC de "1 – α" para **σ²** é calculado por:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_s^2}; \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}\right]$$



Então o IC de "1 – α" para **σ** é calculado por:

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_s^2}}; \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}}\right]$$



**Exemplo**



Com base na distribuição das velocidades de uma amostra de **120** carros andando na estrada POA/Osório, determine uma estimativa para a **variabilidade da velocidade**, com uma confiabilidade de 95%.

**Tem-se:**

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_s^2}};\ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}}\right]$$

**Mas:**

$$\chi_i^2 = 94{,}81$$

$$\chi_s^2 = 145{,}46$$



O IC de "1 – α" para **σ** é calculado por:

$$\left[\sqrt{\frac{119.47{,}4772}{145{,}46}};\ \sqrt{\frac{119.47{,}4772}{94{,}81}}\right]$$

$$[6{,}23;\ 7{,}72]$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

# Dimensionamento da Amostra

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

É desejável um IC com alta confiabilidade (1 - α) e pequena amplitude (ε) . Isto requer uma amostra suficientemente grande, pois, para "n" fixo, confiança e precisão varia inversamente.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A seguir os tamanhos mínimos necessários de amostras para estimar os principais parâmetros dentro de uma **confiabilidade** (1 – α) e uma **precisão** (ε) especificados.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Para estimar a média de uma população, supondo σ conhecido

$$\varepsilon = z_c \sigma_{\bar{x}} = z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{\sigma . z_c}{\varepsilon}$$

$$n \geq \left(\frac{\sigma . z_c}{\varepsilon}\right)^2$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Para estimar a média de uma população, com σ conhecido

$$\varepsilon = t_c s_{\bar{x}} = t_c \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{s \cdot t_c}{\varepsilon}$$

$$n \geq \left(\frac{s \cdot t_c}{\varepsilon}\right)^2$$

$t_c$ será obtido através de uma amostra piloto n'



Para estimar a proporção populacional.

$$\varepsilon = z_c \sigma_{\bar{x}} = z_c \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{z_c}{\varepsilon} \sqrt{P(1-P)}$$

$$n \geq \left(\frac{z_c}{\varepsilon}\right)^2 P(1-P)$$

"p" será estimado através de uma amostra piloto n'



# Exemplo

Qual o tamanho mínimo de uma amostra para estimarmos a proporção de defeituosos de uma máquina com uma precisão de 3% e uma confiabilidade de 95%. Se **(a)** nada se sabe sobre esta proporção **(b)** ela não é superior a 10%.



# Solução

**(a)**

$$n \geq \left(\frac{z_c}{\varepsilon}\right)^2 P(1-P)$$

$$n \geq \left(\frac{1,96}{0,03}\right)^2 0,50 \cdot 0,5$$

$$n \geq 1068$$



# Solução

**(b)**

$$n \geq \left(\frac{z_c}{\varepsilon}\right)^2 P(1-P)$$

$$n \geq \left(\frac{1,96}{0,03}\right)^2 0,1 \cdot 0,9$$

$$n \geq 385$$