

Testes de Hipóteses

Prof. Lorí Viali, Dr.

<http://www.ufrgs.br/~viali/>

viali@mat.ufrgs.br

Objetivos

Testar o valor hipotético de um parâmetro (testes paramétricos) ou de relacionamentos ou modelos (testes não paramétricos).



Tipos de Testes de Hipóteses



Paramétricos

Testes

Não-paramétricos



Testes não-paramétricos

Um teste não paramétrico testa outras situações que não parâmetros populacionais. Estas situações podem ser relacionamentos, modelos, dependência ou independência e aleatoriedade.



Testes

Paramétricos



*Envolvem parâmetros
populacionais.*

*Um parâmetro é qualquer
medida que descreve uma
população.*



Os principais parâmetros são:

μ *(a média)*

σ^2 *(a variância)*

σ *(o desvio padrão)*

π *(a proporção)*



Etapas dos testes paramétricos de hipóteses



(1)

Formular a hipótese nula (H_0)

$$H_0: \theta = \theta_0$$

Expressar em valores aquilo que deve ser testado;

Esta hipótese é sempre de igualdade;

Deve ser formulada com o objetivo de ser rejeitada.



(2)

Formular a hipótese alternativa (H_1)
(Testes simples)

$$H_1: \theta = \theta_1$$

(Testes compostos)

$H_1: \theta > \theta_0$ (teste unilateral/unicaudal à direita)

$\theta < \theta_0$ (teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\theta \neq \theta_0$ (teste bilateral/bicaudal) .



(3)

Definir um valor crítico (α)

- *Isto envolve definir um ponto de corte a partir do qual a hipótese nula será rejeitada (aceita a hipótese alternativa).*
- *Esta hipótese é de fato a expressão daquilo que se quer provar.*



(4)

Calcular a estatística teste

- *A estatística teste é obtida através dos dados amostrais, isto é, ela é a evidência amostral;*
- *A forma de cálculo depende do tipo de teste envolvido, isto é, do modelo teórico ou modelo de probabilidade.*



(5)

Tomar uma decisão

- *A estatística teste e o valor crítico são comparados e a decisão de aceitar ou rejeitar a hipótese nula é formulada;*
- *Se for utilizado um software estatístico pode-se trabalhar com a significância do resultado (p -value) ao invés do valor crítico.*



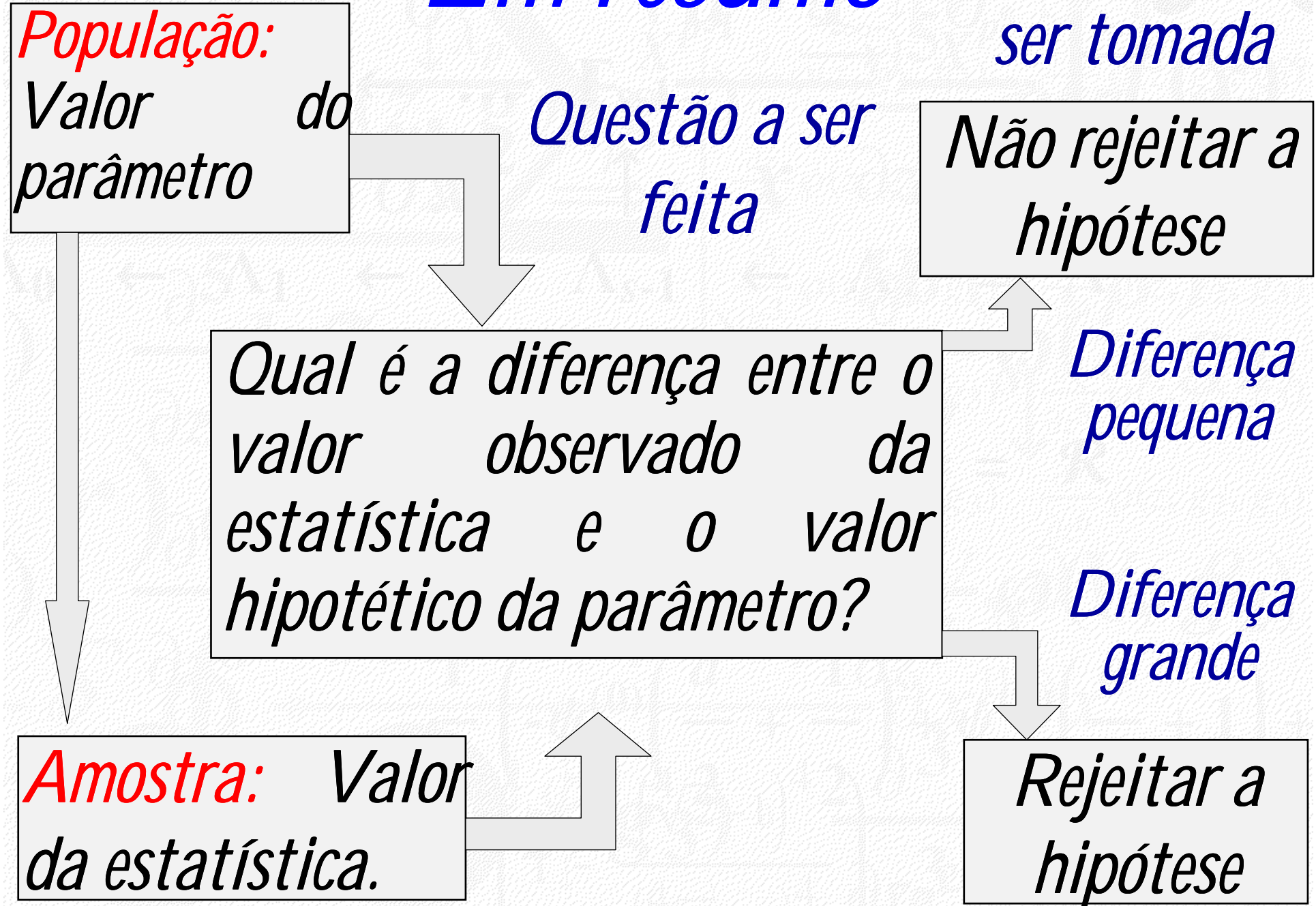
(6)

Formular uma conclusão

- *Expressar em termos do problema (pesquisa) qual foi a conclusão obtida;*
- *Não esquecer que todo resultado baseado em amostras está sujeito a erros e que geralmente apenas um tipo de erro é controlado.*



Em resumo



Conceitos Básicos



Exemplo

Dispõem-se de duas moedas com aparências idênticas, só que uma (M_1) é equilibrada, isto é, $P(\text{Cara}) = P(\text{Coroa}) = 50\%$, enquanto que a outra (M_2) é viciada de tal forma que favorece cara na proporção de 80%, ou seja, $P(\text{Cara}) = 80\%$ enquanto que $P(\text{Coroa}) = 20\%$.



Supõem-se que uma das moedas é lançada e que com base na variável

X = número de caras,

deve-se decidir qual delas foi lançada. Neste caso o teste a ser feito envolve as seguintes hipóteses:



Hipóteses

H_0 : *A moeda lançada é a equilibrada (M_1)*
($p = 50\%$)

H_1 : *A moeda lançada é a viciada (M_2)*
($p = 80\%$)

$p = \text{proporção de caras.}$



Decisão

Tem-se que tomar a decisão de apontar qual foi a moeda lançada, baseado apenas em uma amostra de, por exemplo, 5 lançamentos. Lembrar que a população de lançamentos possíveis é, neste caso, infinita.



A decisão, é claro, estará sujeita a erros, pois se estará tomando a decisão em condições de incerteza, isto é, baseado em uma amostra de apenas 5 lançamentos das infinitas possibilidades.



A decisão será baseada nas distribuições amostrais das duas moedas.

A tabela mostra as probabilidades de se obter os valores: $x = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5 , da variável $X =$ número de caras, em uma amostra de $n = 5$, lançamentos de cada uma das moedas.



Sob H_0 $X \sim B(5; 0,5)$

Assim:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{5}{x} 0,5^x 0,5^{5-x} = \\ &= \binom{5}{x} 0,5^5 = \binom{5}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \binom{5}{x} / 32 \end{aligned}$$



Sob H_1 $X \sim B(5; 0,8)$

Assim:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{5}{x} 0,2^x 0,8^{5-x} = \\ &= \binom{5}{x} \left(\frac{4}{5}\right)^x \left(\frac{1}{5}\right)^{5-x} = \binom{5}{x} \frac{4^x}{5^5} = \binom{5}{x} 4^x / 3125 \end{aligned}$$



Distribuições amostrais ($n = 5$)

x	$P(X = x) \text{ sob } H_0$	$P(X = x) \text{ sob } H_1$
0	$1/32 \rightarrow 3,125\%$	$1/3125 \rightarrow 0,032\%$
1	$5/32 \rightarrow 15,625\%$	$20/3125 \rightarrow 0,640\%$
2	$10/32 \rightarrow 31,250\%$	$160/3125 \rightarrow 5,120\%$
3	$10/32 \rightarrow 31,250\%$	$640/3125 \rightarrow 20,480\%$
4	$5/32 \rightarrow 15,625\%$	$1280/3125 \rightarrow 40,960\%$
5	$1/32 \rightarrow 3,125\%$	$1024/3125 \rightarrow 32,768\%$
<i>Total</i>	$1 \rightarrow 100\%$	$1 \rightarrow 100\%$

Regra de Decisão

Para poder aceitar ou rejeitar H_0 e como consequência, rejeitar ou aceitar H_1 , é necessário estabelecer uma regra de decisão, isto é, é necessário estabelecer para que valores da variável X iremos rejeitar H_0



Região de Rejeição

Desta forma, estabelecendo-se que se vai rejeitar H_0 , se a moeda der um número de caras igual a 4 ou 5, pode-se então determinar as probabilidades de tomar as decisões corretas ou erradas.



*Assim o conjunto de valores que levará a **rejeição** da hipótese nula será denominado de **região crítica** (**RC**) e, neste caso, este conjunto é igual a:*

$$RC = \{ 4, 5 \}$$



Região de não-rejeição ou aceitação

A faixa restante de valores da variável é denominada de região de aceitação ou de não-rejeição (RA) e, neste caso, este conjunto vale:

$$RA = \{0, 1, 2, 3\}$$



*Erro do Tipo I
ou Nível de Significância do Teste*
*Então se H_0 for rejeitada porque X
assumiu o valor 4 ou 5, pode-se estar
cometendo um erro.*

*A probabilidade deste erro é igual a
probabilidade de ocorrência destes valores
sob H_0 , isto é:*



$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{Erro do Tipo I}) = \\ &= P(\text{Rejeitar } H_0 / H_0 \text{ é verdadeira}) = \\ &= P(X = 4 \text{ ou } 5 / p = 0,50) = \\ &= 5/32 + 1/32 = 6/32 = 18,75\% = \\ &= \text{Nível de significância do teste.}\end{aligned}$$



Erro do Tipo II

*O outro tipo de erro possível de ser cometido é aceitar H_0 quando ela é falsa e é denominado de **erro do tipo II**.*



Erro do Tipo II

$$\beta = P(\text{Erro do Tipo II}) =$$

$$= P(\text{Aceitar } H_0 / H_0 \text{ é falsa}) =$$

$$P(X = 0, 1, 2 \text{ ou } 3 / p = 80\%) =$$

$$= 1/3125 + 20/3125 + 160/3125 + 640/3125 =$$

$$= 821/3125 = 26,27\%$$



$$\beta = (1+20+160+640)/3125$$

$$821/3125 = 26,27\%$$

x	$P(X =$		
0	$1/32 \rightarrow 3,125\%$	$1/3125$	$0,032\%$
1	$5/32 \rightarrow 15,625\%$	$20/3125$	$0,640\%$
2	$10/32 \rightarrow 31,250\%$	$160/3125 \rightarrow 5,120\%$	
3	$10/32 \rightarrow 31,250\%$	$640/3125 \rightarrow 20,480\%$	
4	$5/32 \rightarrow 15,625\%$	$1280/3125 \rightarrow 40,960\%$	
5	$1/32 \rightarrow 3,125\%$	$1024/3125 \rightarrow 32,768\%$	
Total	$1 \rightarrow 10$		100%

$$\alpha = 5/32 + 1/32$$

$$6/32 = 18,75\%$$

Em Resumo



<i>Realidade</i>	<i>Decisão</i>	
	<i>Aceitar H_0</i>	<i>Rejeitar H_0</i>
<i>H_0 é verdadeira</i>	<p><i>Decisão correta</i></p> <p>$1 - \alpha = P(\text{Aceitar } H_0 / H_0 \text{ é verdadeira})$</p>	<p><i>Erro do Tipo I</i></p> <p>$\alpha = P(\text{Cometer Erro do tipo I}) = P(\text{Rejeitar } H_0 / H_0 \text{ é verdadeira}) = \text{Nível de significância do teste}$</p>
<i>H_0 é falsa</i>	<p><i>Erro do Tipo II</i></p> <p>$\beta = P(\text{Cometer Erro do tipo II}) = P(\text{Aceitar } H_0 / H_0 \text{ é falsa}) = P(\text{Aceitar } H_0 / H_1 \text{ é verdadeira})$</p>	<p><i>Decisão correta</i></p> <p>$1 - \beta = P(\text{Rejeitar } H_0 / H_0 \text{ é falsa}) = \text{Poder do teste.}$</p>

Exemplo

1



*Uma urna contém quatro fichas das quais θ são azuis e $4 - \theta$ são **vermelhas**. Para testar a hipótese nula de que $\theta = 2$ contra a alternativa de $\theta \neq 2$, retiram-se duas fichas ao acaso e sem reposição. Rejeita-se a hipótese nula se as duas fichas forem da mesma cor. Determine o nível de significância e o poder do teste.*



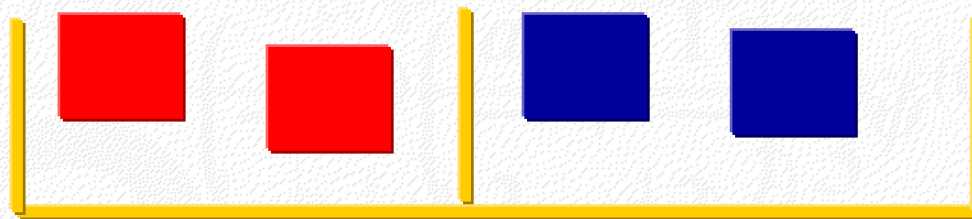
Espaço amostra

$$S = \{ \underbrace{VV, AA}_{\text{Região Crítica}}, \underbrace{AV, VA}_{\text{Região De Não Rejeição}} \}$$

*Região De
Não Rejeição*

*Região
Crítica*

Sob $H_0: \theta = 2$

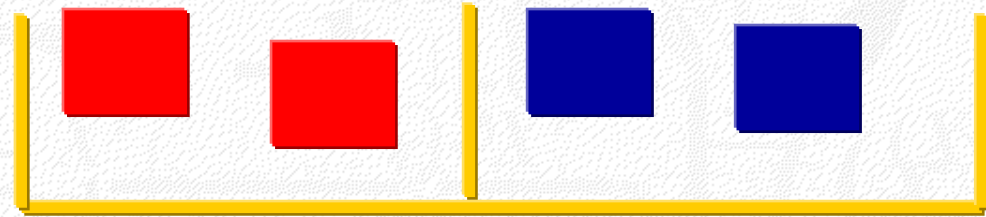


Cálculo do Erro do Tipo I, i. é, nível de significância do teste

O erro do tipo I é a probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é verdadeira, neste caso ele é a probabilidade de retirarmos duas fichas da mesma cor, quando a urna tem duas de cada cor.



Sob $H_0: \theta = 2$



$$\alpha = P(\text{Erro do Tipo I}) = \\ = P(\text{Rejeitar } H_0 / H_0 \text{ é verdadeira}) =$$

$$= P(VV, AA / \theta = 2) =$$

$$= \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{12} + \frac{2}{12} =$$

$$= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = 33,33\%$$



Cálculo do Poder do Teste

O poder do teste é a probabilidade de Rejeitar H_0 quando ela é falsa, é uma decisão correta. É calculada sob a região crítica. Neste caso é a $P(\text{VV}, AA / H_0 \text{ é falsa})$



MAS

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= P(\text{VV}, AA / H_0 \text{ é falsa}) = \\ &= P(\text{VV}, AA / H_1 \text{ é verdadeira}) = \\ &= P(\text{VV}, AA / \theta \neq 2). \end{aligned}$$

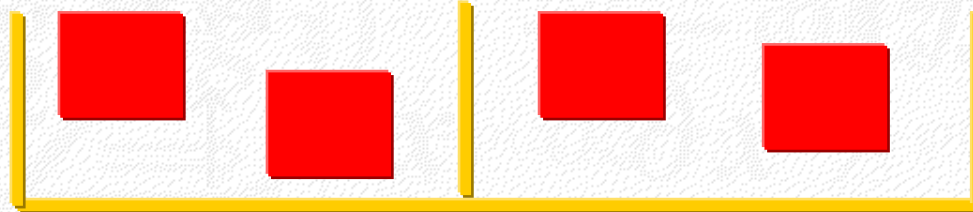
Assim devemos analisar quatro situações:

$$\theta = 0, \theta = 1, \theta = 3 \text{ e } \theta = 4$$

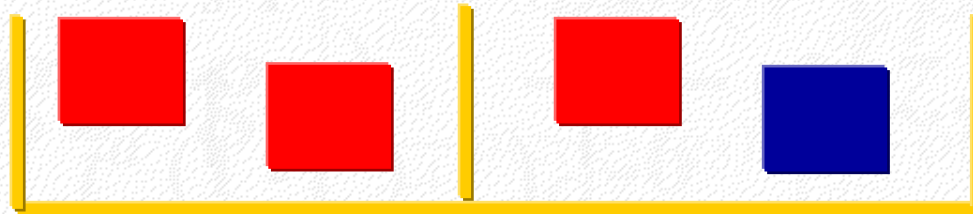


ISTO É:

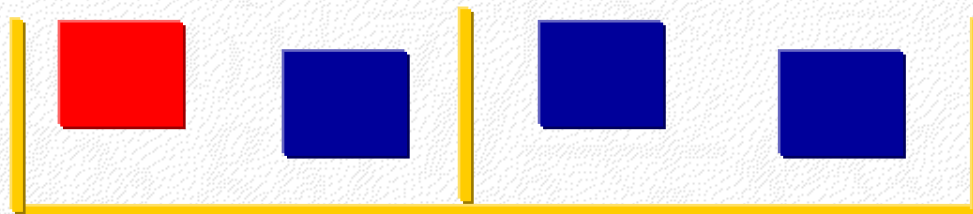
$$\theta = 0$$



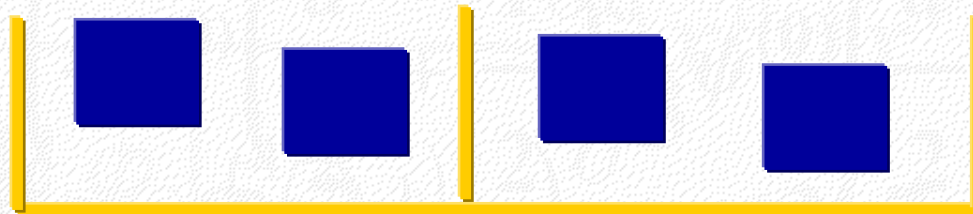
$$\theta = 1$$



$$\theta = 3$$

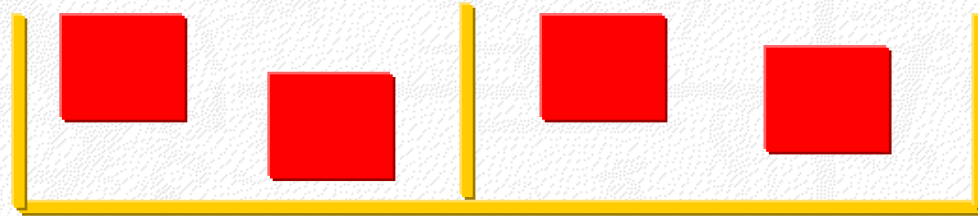


$$\theta = 4$$



$$\theta = 0$$

Neste caso



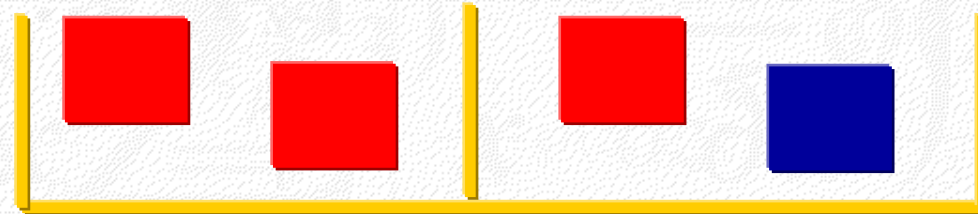
Então:

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= P(\text{VV}, \text{AA} / \theta \neq 2) = \\ &= P(\text{VV}, \text{AA} / \theta = 0) = \\ &= \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{3} + 0 = 1 = 100\% \end{aligned}$$



$$\theta = 1$$

Neste caso



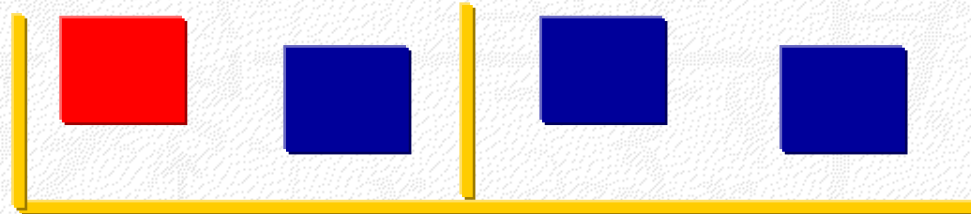
Então:

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= P(\text{VV}, AA / \theta \neq 2) = \\ &= P(\text{VV}, AA / \theta = 1) = \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + 0 = \frac{1}{2} = 50\% \end{aligned}$$



$$\theta = 3$$

Neste caso



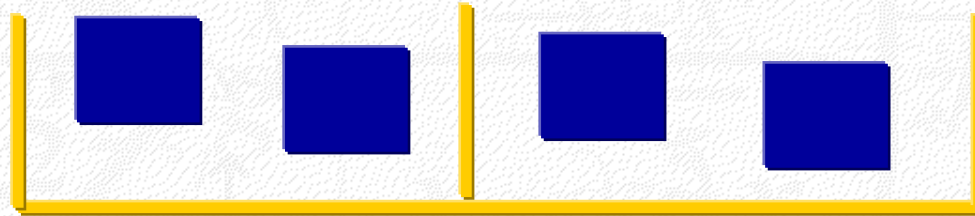
Então:

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= P(\text{VV}, AA / \theta \neq 2) = \\ &= P(\text{VV}, AA / \theta = 3) = \\ &= 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} = 50\% \end{aligned}$$



$$\theta = 4$$

Neste caso



Então:

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= P(\text{VV}, AA / \theta \neq 2) = \\ &= P(\text{VV}, AA / \theta = 0) = \\ &= 0 + \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{3} = 1 = 100\% \end{aligned}$$

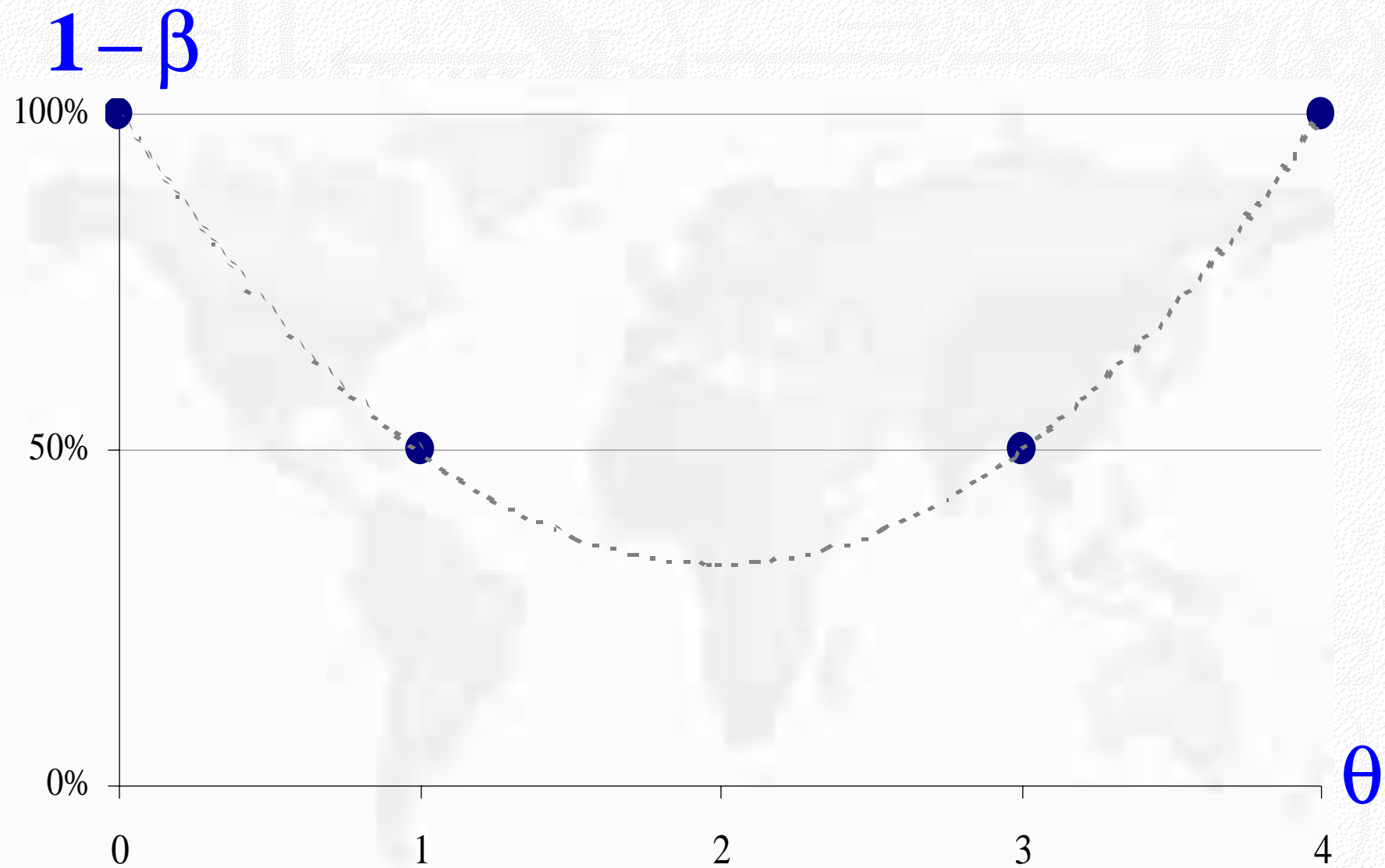


Em Resumo, tem-se:

θ	β	$1 - \beta$	α
0	0%	100%	
1	50%	50%	
2	-	-	33,33%
3	50%	50%	
4	0%	100%	

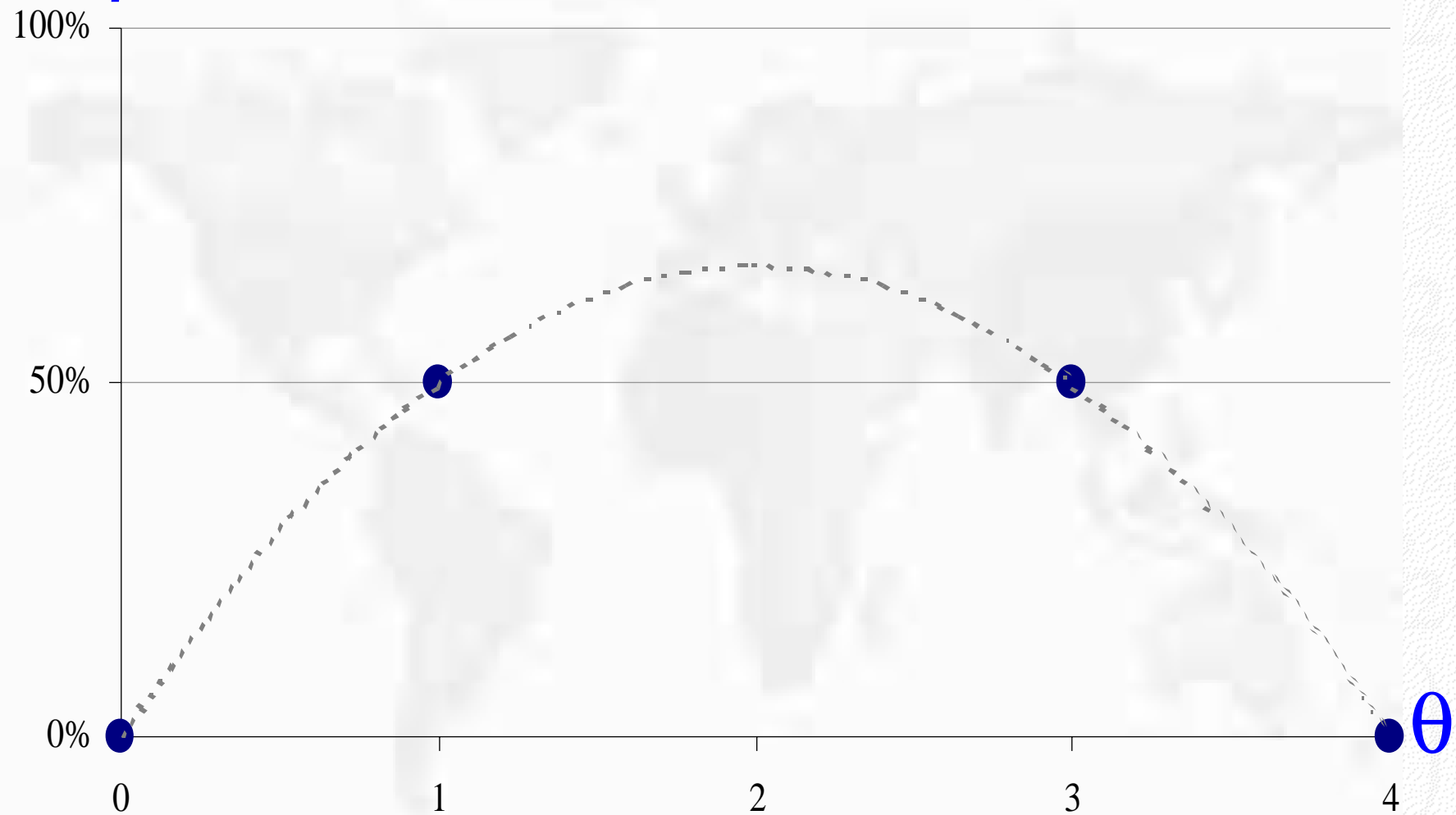


Poder do Teste



Erro do Tipo II

β



Exemplo 2



Um dado é lançado seis vezes para testar a hipótese nula de que $P(F_1) = 1/6$ contra a alternativa de que $P(F_1) > 1/6$. Rejeita-se a hipótese nula se $X =$ “número de faces um for maior ou igual a quatro”. Determinar o nível de significância e o poder do teste.



Espaço amostra

*Região De
Rejeição (Crítica)*

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

*Região de Não
Rejeição*

$$H_0: p = 1/6$$

$$H_0: p > 1/6$$



Cálculo do Erro do Tipo I, i. é, nível de significância do teste

O erro do tipo I é a probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é verdadeira, neste caso ele é a probabilidade de obtermos $X \geq 4$, quando $n = 6$ e $p = 1/6$.



Sob $H_0: p = 1/6$

$\alpha = P(\text{Erro do Tipo I}) =$

$= P(\text{Rejeitar } H_0 / H_0 \text{ é verdadeira}) =$

$= P(X \geq 4 / p = 1/6) =$

$$= \binom{6}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{6}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{6}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^6 \left(\frac{5}{6}\right)^0 =$$

$$= \frac{15.25}{6^6} + \frac{6.5}{6^6} + \frac{1}{6^6} = \frac{406}{6^6} = 0,87\%$$



Cálculo do Poder do Teste

O poder do teste é a probabilidade de Rejeitar H_0 quando ela é falsa, é uma decisão correta. É calculada sob a região crítica. Neste caso é $P(X \geq 4 / H_0 \text{ é falsa})$



MAS

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= P(X \geq 4 / H_0 \text{ é falsa}) = \\ &= P(X \geq 4 / H_1 \text{ é verdadeira}) = \\ &= P(X \geq 4 / p > 1/6). \end{aligned}$$

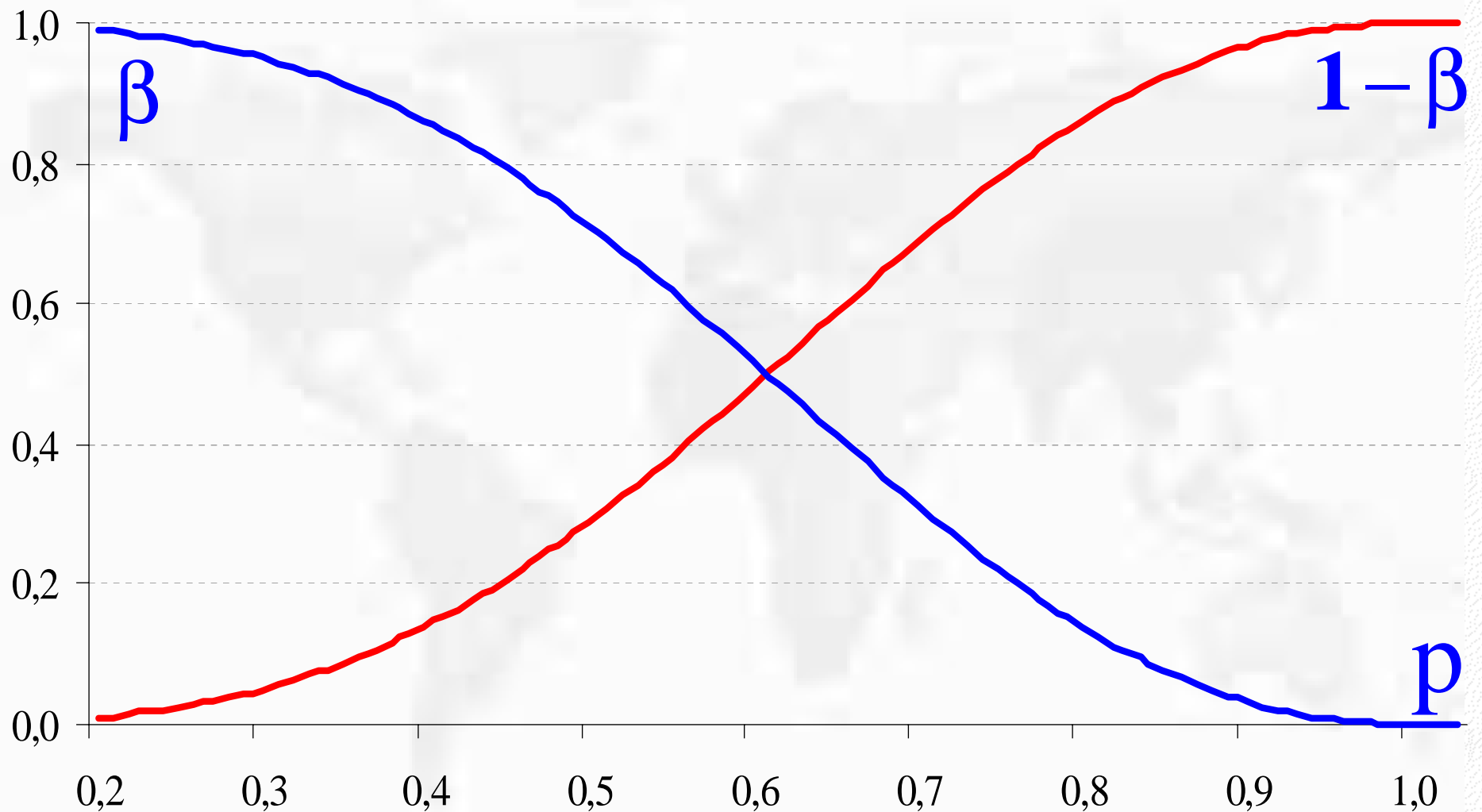
Neste caso, o poder do teste é uma função de p . Vamos avaliar esta função para alguns valores de “ p ”.



Poder do teste para $p > 1/6$

p	$1-\beta$	p	$1-\beta$	p	$1-\beta$
0,20	1,70	0,55	44,15	0,90	98,41
0,25	3,76	0,60	54,43	0,95	99,78
0,30	7,05	0,65	64,71	1,00	100,00
0,35	11,74	0,70	74,43		
0,40	17,92	0,75	83,06		
0,45	25,53	0,80	90,11		
0,50	34,37	0,85	95,27		

Poder do Teste x Erro do Tipo II



Testes para

Uma amostra

Média

Proporção

Variância

Duas amostras

Dependentes

Diferença de médias

Independentes

Diferença de médias

Diferença de proporções

Igualdade de variâncias

Mais de duas amostras

Dependentes

ANOVA com medidas repetidas

Independentes

ANOVA



Testes para uma Amostra



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Média (μ)

Proporção (π)

Variância (σ^2)



Teste para a média

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0 \text{ (teste unilateral/unicaudal à direita)}$$

$$\mu < \mu_0 \text{ (teste unilateral/unicaudal à esquerda)}$$

$$\mu \neq \mu_0 \text{ (teste bilateral/bicaudal)}.$$



(a) variância conhecida

Neste caso a variável teste é:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$



Rejeita-se a Hipótese nula se:

$$Z > z_c$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$Z < z_c$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$|Z| > z_c$$

(teste bilateral/bicaudal) .



Onde z_c é tal que:

$$\Phi(z_c) = 1 - \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$\Phi(z_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$\Phi(z_c) = \alpha/2 \text{ ou } \Phi(z_c) = 1 - \alpha/2$$

(teste bilateral/bicaudal) .



Exemplo



A experiência passada mostrou que as notas de Probabilidade e Estatística, estão normalmente distribuídas com média $\mu = 5,5$ e desvio padrão $\sigma = 2,0$. Uma turma de $n = 64$ alunos deste semestre apresentou uma média de 5,9. Teste a hipótese de este resultado mostra uma melhora de rendimento a uma significância de 5%.



Solução:

Hipóteses:

$$H_0: \mu = 5,5$$

$$H_1: \mu > 5,5$$

Dados:

$$\sigma = 2,0 \quad n = 64$$

$$\bar{X} = 5,9 \quad \alpha = 5\%$$

Trata-se de um teste unilateral à direita com σ conhecido.



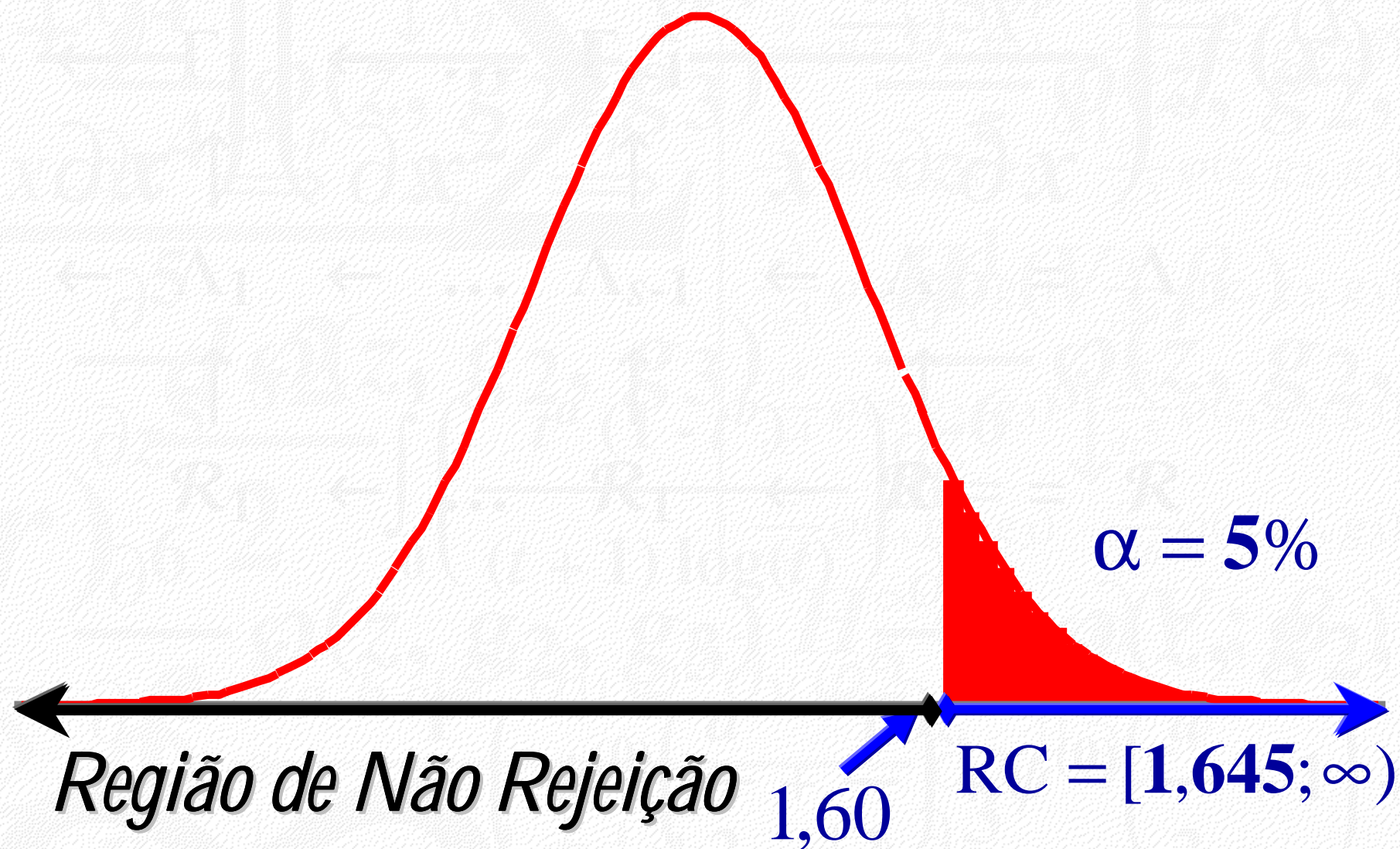
A variável teste é:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Então:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{5,9 - 5,5}{2,0 / \sqrt{64}} = \frac{0,4}{2,0 / 8} = \frac{3,2}{2,0} = 1,60$$





A significância do resultado obtido (1,60), isto é, o valor-p é $P(Z > 1,60) = P(Z > 1,60) = 1 - \Phi(1,60) = \Phi(-1,60) = 5,48\%$.

Como a significância do resultado (5,48%) é maior que a significância do teste (5%) não é possível rejeitar a hipótese nula.



(6) variância desconhecida

Neste caso a variável teste é:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$



Rejeita-se a Hipótese nula se:

$$t_{n-1} > t_c$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$t_{n-1} < t_c$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$|t_{n-1}| > t_c$$

(teste bilateral/bicaudal) .



Onde t_c é tal que:

$$P(t < t_c) = 1 - \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$P(t < t_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$P(t < t_c) = \alpha/2 \text{ ou } P(t > t_c) = \alpha/2$$

(teste bilateral/bicaudal) .



Exemplo



Suponha que a sua empresa comprou um lote de lâmpadas. Você precisa testar, a 5% de significância, a afirmação do fabricante de que a duração média das lâmpadas é maior que 800 horas.

Para isto você usa uma amostra de 36 lâmpadas e encontra uma média 820 horas com desvio de 70 horas. Isto confirma a afirmação do fabricante?



Solução:

Hipóteses:

$$H_0: \mu = 800 \text{ horas}$$

$$H_1: \mu > 800 \text{ horas}$$

Dados:

$$n = 36$$

$$\bar{X} = 820 \text{ horas}$$

$$s = 70 \text{ horas}$$

$$\alpha = 5\%$$

Trata-se de um teste unilateral à direita com σ desconhecido.



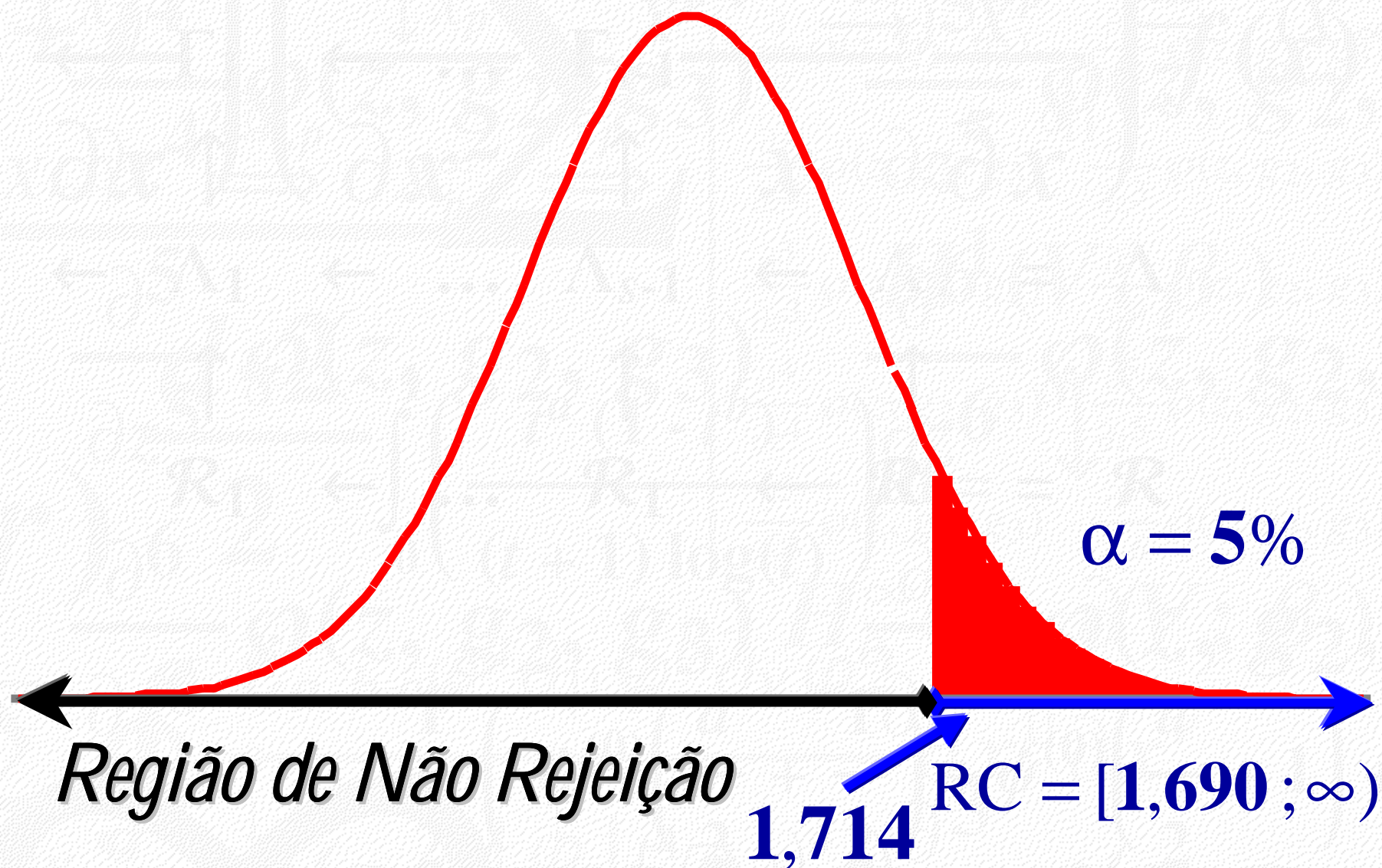
A variável teste é:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

Então:

$$t_{35} = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{820 - 800}{70/\sqrt{36}} = \frac{20}{70/6} = \frac{120}{70} = 1,714$$





*A significância do resultado
obtido (1,714), isto é, o valor-p é
 $P(T_{35} > 1,714) = DISTT(1,714; 35; 1)$
 $= 4,77\%$*



DISTT

X	1,714	=	1,714
Graus_liberdade	35	=	35
Caudas	1	=	1

= 0,047686674

Retorna a distribuição t de Student.

X é o valor numérico em que se avalia a distribuição.

Resultado da fórmula = 0,047686674

OK Cancelar

Como a significância do resultado (4,77%) é menor que a significância do teste (5%) é possível rejeitar a hipótese nula.



Teste para a proporção

$$H_0: \pi = \pi_0$$

$$H_1: \pi > \pi_0 \text{ (teste unilateral/unicaudal à direita)}$$

$$\pi < \pi_0 \text{ (teste unilateral/unicaudal à esquerda)}$$

$$\pi \neq \pi_0 \text{ (teste bilateral/bicaudal).}$$



Neste caso a variável teste é:

$$Z = \frac{P - \mu_P}{\sigma_P} = \frac{P - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1 - \pi)}{n}}}$$



Rejeita-se a Hipótese nula se:

$$Z > z_0$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$Z < z_0$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$|Z| > z_0$$

(teste bilateral/bicaudal).



Exemplo



Afirma-se que 40% dos alunos de uma universidade são fumantes. Uma amostra de 225 estudantes selecionados ao acaso mostrou que apenas 72 eram fumantes. Teste a 1% a hipótese de que a afirmação foi exagerada.



Solução:

Hipóteses:

$$H_0: \pi = 40\%$$

$$H_1: \pi < 40\%$$

Dados:

$$f = 72$$

$$n = 225$$

$$p = 72/225 = 32\%$$

$$\alpha = 1\%$$

Trata-se de um teste unilateral à esquerda para a proporção. A variável teste é:

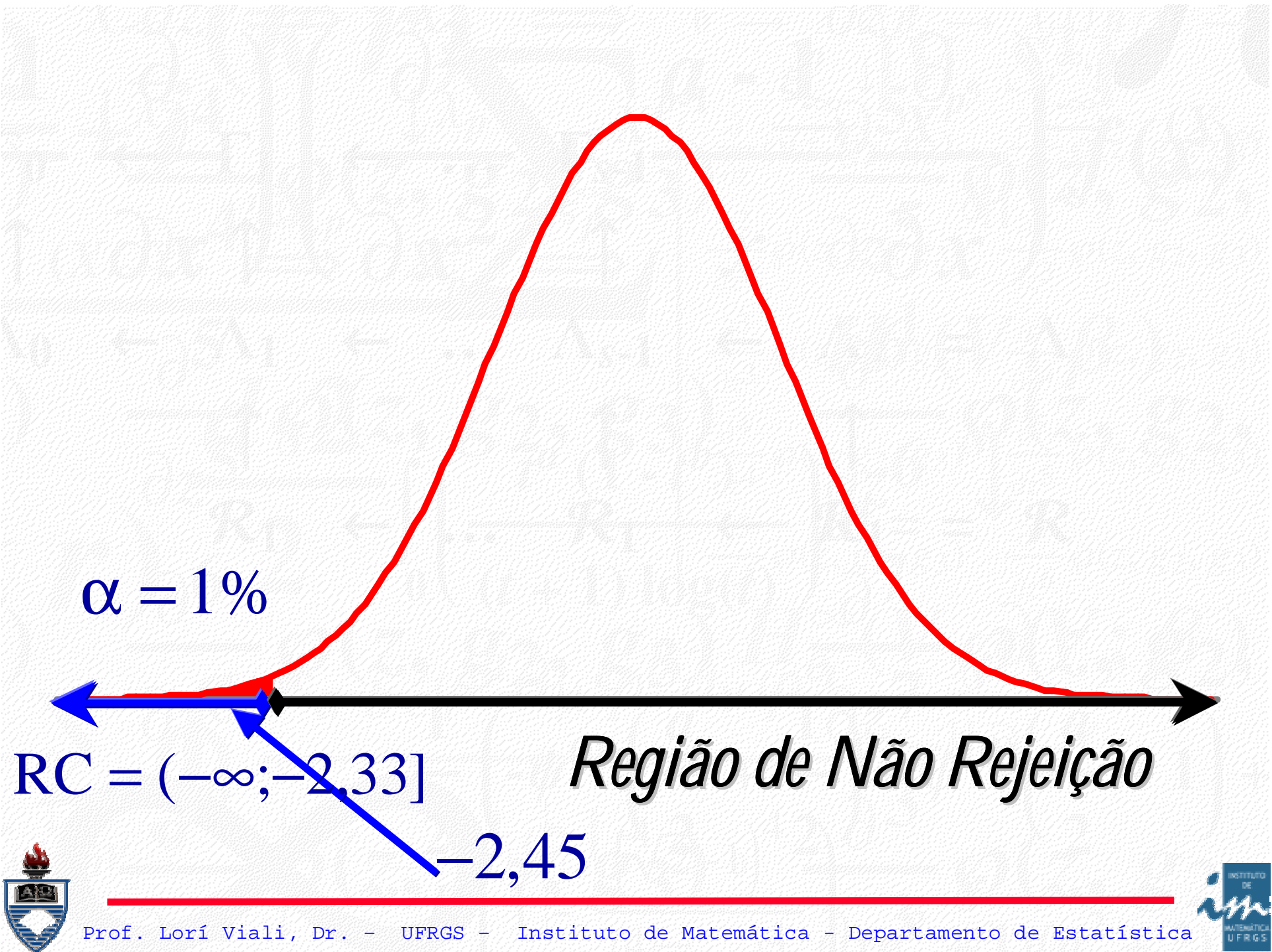


$$Z = \frac{P - \mu_p}{\sigma_p} = \frac{P - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1 - \pi)}{n}}}$$

Então:

$$Z = \frac{P - \mu_p}{\sigma_p} = \frac{0,32 - 0,40}{\sqrt{\frac{0,40(1 - 0,40)}{225}}} = \frac{-0,08}{0,0326} = -2,45$$





A significância do resultado obtido (-2,45), isto é, o valor-p é:

$$p = P(Z < -2,45) = \Phi(-2,45) = 0,71\%.$$

Como a significância do resultado (0,71%) é menor que a significância do teste (1%) é possível rejeitar a hipótese nula.



Teste para a variância

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$\sigma^2 < \sigma_0^2$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

(teste bilateral/bicaudal) .



Neste caso a variável teste é:

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$



Rejeita-se a Hipótese nula se:

$$\chi^2_{n-1} > \chi^2_c$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$\chi^2_{n-1} < \chi^2_c$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$\chi^2_{n-1} > \chi^2_c \text{ ou } \chi^2_{n-1} < \chi^2_c$$

(teste bilateral/bicaudal) .



Onde χ^2_c é tal que:

$$P(\chi^2_{n-1} > \chi^2_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$P(\chi^2_{n-1} < \chi^2_c) = 1 - \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$P(\chi^2_{n-1} < \chi^2_c) = \alpha/2 \text{ ou } P(\chi^2_{n-1} > \chi^2_c) = \alpha/2$$

(teste bilateral/bicaudal).



Exemplo



O fabricante de uma certa marca de surdina de carro divulga que as suas peças tem uma variância de 0,8 anos. Uma amostra aleatória de 16 peças mostrou uma variância de um ano. Utilizando uma significância de 5%, teste se a variância de todas as peças é superior a 0,8 anos.



Solução:

Hipóteses:

$$H_0: \sigma^2 = 0,8 \text{ anos}$$

$$H_1: \sigma^2 > 0,8 \text{ anos}$$

Dados:

$$n = 16$$

$$s = 1 \text{ ano}$$

$$\alpha = 5\%$$

Trata-se de um teste unilateral à direita para a variância.



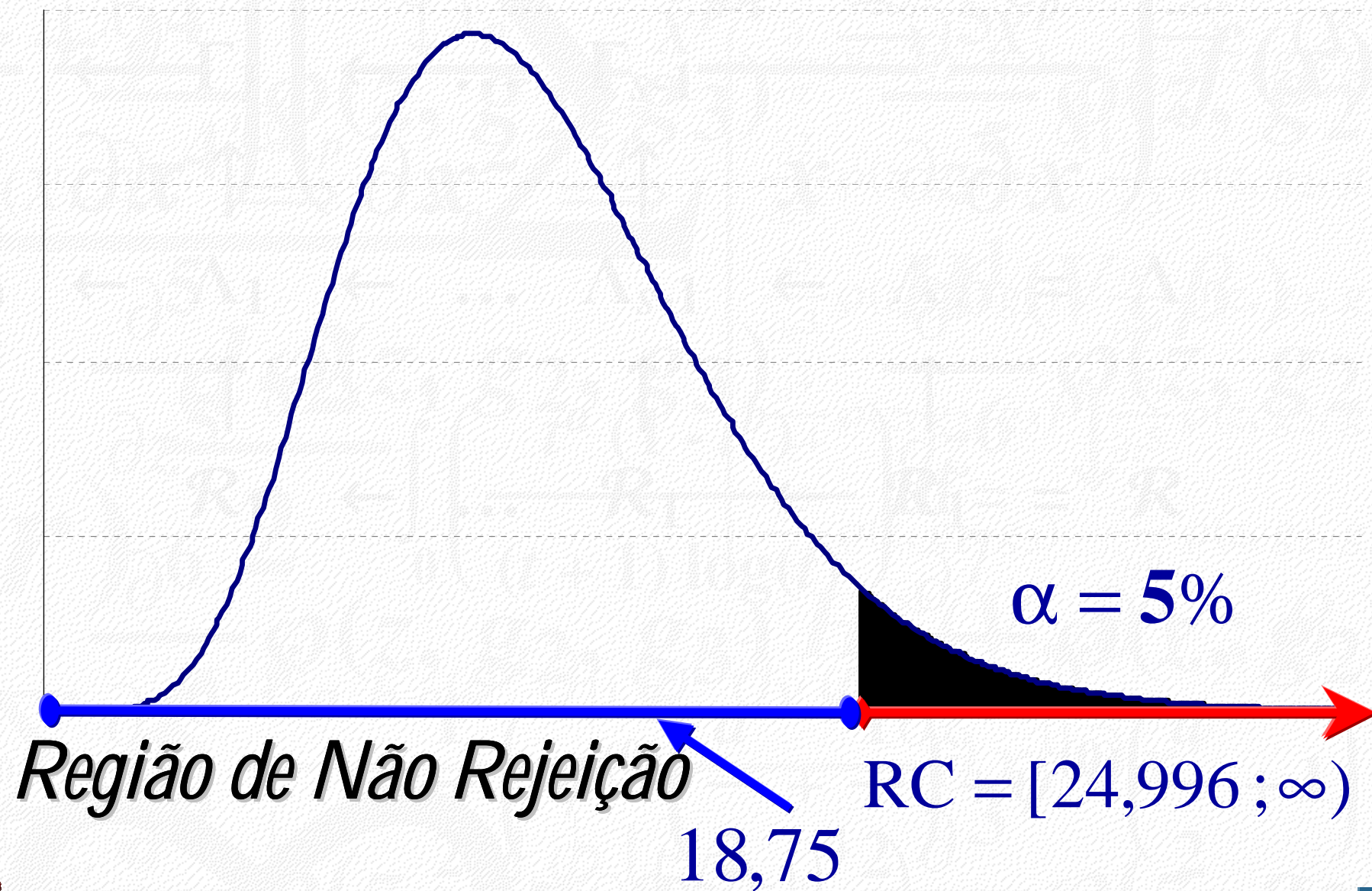
A variável teste é:

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

Então:

$$\chi^2_{15} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(16-1).1}{0,8} = \frac{15}{0,8} = 18,75$$





OPÇÃO:

A significância do resultado obtido (18,75), isto é, o valor-p, para este caso, vale: $P(\chi^2_{15} > 18,75) = \text{DIST.QUI}(18,75; 15) = 22,53\%$




DIST.QUI

X	18,75	=	18,75
Graus_liberdade	15	=	15

= 0,225287023

Retorna a probabilidade uni-caudal da distribuição qui-quadrada.

Graus_liberdade é o número de graus de liberdade, um número entre 1 e 10^{10} , excluindo 10^{10} .

 Resultado da fórmula = 0,225287023

OK Cancelar

Como a significância do resultado obtido (22,59%) é maior que a significância do teste (5%) não é possível rejeitar a hipótese nula.



Testes para duas Amostras



A m o s t r a s

Dependentes

Teste "t" para amostras emparelhadas

*Variâncias
Conhecidas*

Teste "z"

Independentes

*Variâncias
Desconhecidas*

*Supostas
iguais*

*Supostas
diferentes*



(a)

Independentes



Diferença entre duas médias

$$(\mu_1 - \mu_2 = \Delta)$$

Diferença entre duas proporções

$$(\pi_1 - \pi_2 = \Delta)$$

Igualdade entre duas variâncias

$$(\sigma_X^2 = \sigma_Y^2)$$



Teste para a diferença entre duas médias



(a) variâncias conhecidas

Neste caso a variável teste é:

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_{\bar{X} - \bar{Y}}}{\sigma_{\bar{X} - \bar{Y}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}$$



Rejeita-se a Hipótese nula se:

$$Z > z_c$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$Z < z_c$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$|Z| > z_c$$

(teste bilateral/bicaudal) .



Onde z_c é tal que:

$$\Phi(z_c) = 1 - \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$\Phi(z_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$\Phi(z_c) = \alpha/2 \text{ ou } \Phi(z_c) = 1 - \alpha/2$$

(teste bilateral/bicaudal) .



Exemplo



Uma grande empresa quer comprar peças de dois fornecedores diferentes. O fornecedor "A" alega que a durabilidade é de 1000 horas com desvio de 120 horas, enquanto que o fornecedor "B" diz que a duração média é de 1050 horas com desvio padrão de 140 horas.



Para testar se a durabilidade de “B” é realmente maior, duas amostras de tamanho $n = m = 64$, de cada um dos fornecedores, foram obtidas. A duração média da amostra A foi de 995 horas e a B foi de 1025. Qual a conclusão a 5% de significância?



Solução:

Dados:

Hipóteses:

$$n = m = 64$$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$\sigma_1 = 120; \quad \sigma_2 = 140$$

$$H_0: \mu_1 < \mu_2$$

$$\bar{X} = 995 \text{ e } \bar{Y} = 1025$$

$$\alpha = 5\%$$

Trata-se de um teste unilateral à esquerda com σ_1 e σ_2 conhecidos.



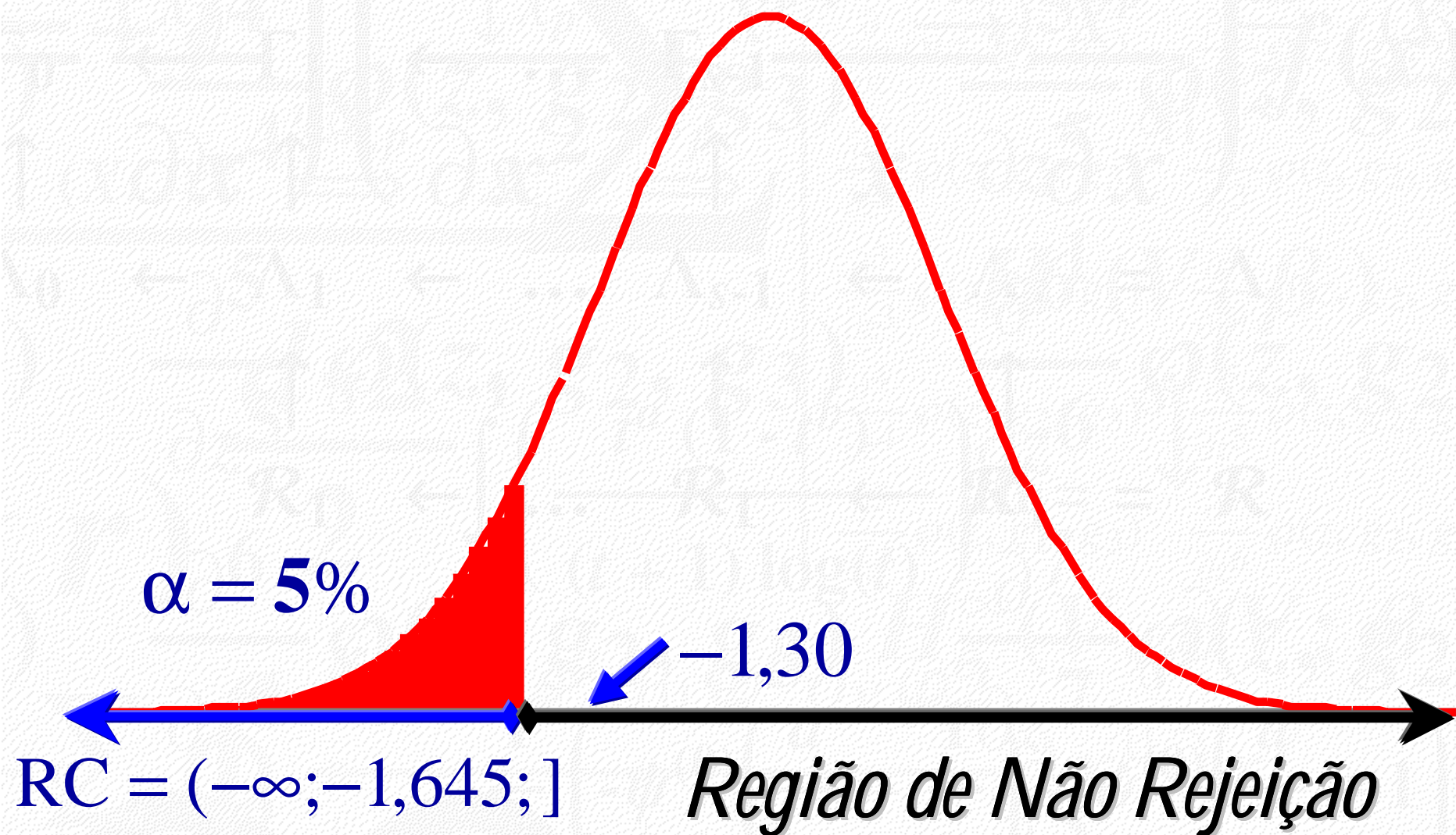
A variável teste é:

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_{\bar{X} - \bar{Y}}}{\sigma_{\bar{X} - \bar{Y}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}$$

Então:

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} = \frac{995 - 1025 - 0}{\sqrt{\frac{120^2}{64} + \frac{140^2}{64}}} = -1,30$$





A significância do resultado obtido (-1,30), isto é, o valor-p é: $p = P(Z < -1,30) = \Phi(-1,30) = \text{DIST.NORMMP}(-1,30) = 9,68\%$.

Como a significância do resultado (9,68%) é maior que a significância do teste (5%) não é possível rejeitar a hipótese nula.



(b) variâncias desconhecidas
(i) supostamente iguais

Neste caso a variável teste é:

$$t_v = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_{\bar{X} - \bar{Y}}}{\hat{\sigma}_{\bar{X} - \bar{Y}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$



Onde s é dado por:

$$s = \sqrt{\frac{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}{n+m-2}}$$

e v é dado por: $n + m - 2$



Exemplo



Um relatório da defesa do consumidor mostrou que um teste com oito pneus da marca A apresentaram uma vida média de 37500 km com um desvio padrão de 3500 km e que doze de uma marca concorrente B, testados nas mesmas condições, tiveram uma durabilidade média de 41400 km com variabilidade de 4200 km.



Supondo que as variâncias populacionais sejam as mesmas e admitindo uma significância de 5%, verifique se é possível afirmar que as duas marcas diferem quanto a durabilidade média. E se a significância fosse 1% qual seria a conclusão?



Solução: Dados:

Hipóteses:

$$n = 8; m = 12$$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$s_A = 3500; s_B = 4200$$

$$H_0: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$\bar{X} = 37500; \bar{Y} = 41400$$

$$\alpha = 5\% ; \sigma_A^2 = \sigma_B^2$$

*Trata-se de um teste "t" bilateral
com σ_1 e σ_2 supostamente iguais.*



A variável teste é:

$$t_{n+m-2} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_{\bar{X}-\bar{Y}}}{\hat{\sigma}_{\bar{X}-\bar{Y}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

Onde:

$$s = \sqrt{\frac{(n-1)S_A^2 + (m-1)S_B^2}{n+m-2}}$$



$$s = \sqrt{\frac{7 \cdot 3700^2 + 11 \cdot 4200^2}{8 + 12 - 2}} = 4012,9651$$

Então:

$$t_{18} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{S \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = \frac{37500 - 41300 - 0}{4012,9651 \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{12}}} =$$

$$= -2,129$$



$$v = n + m - 2 =$$

$$= 8 + 12 - 2 = 18$$

$$t_v = t_{18}$$

-2,129

$\frac{\alpha}{2} = 2,5\%$

$\frac{\alpha}{2} = 2,5\%$

Região de Não Rejeição

$$RC = (-\infty; -2,101] \cup [2,101; +\infty)$$



DECISÃO e CONCLUSÃO:

*Como $t = -2,129 \notin RC$ ou $-2,129 > -2,878$,
Aceito H_0 , isto é, a 1% de significância não
posso afirmar que a vida média das duas
marcas difere.*



- (b) variâncias desconhecidas*
(ii) supostamente desiguais

Neste caso a variável teste é:

$$t_v = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_{\bar{X} - \bar{Y}}}{\hat{\sigma}_{\bar{X} - \bar{Y}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}}}$$



Onde v é dado por:

$$v = \frac{\left(\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m} \right)^2}{\frac{\left(\frac{s_x^2}{n} \right)^2}{n-1} + \frac{\left(\frac{s_y^2}{m} \right)^2}{m-1}}$$



Rejeita-se a Hipótese nula se:

$$t_v > t_c$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$t_v < t_c$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$|t_v| > t_c$$

(teste bilateral/bicaudal) .



Onde t_c é tal que:

$$P(t_v < t_c) = 1 - \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$P(t_v < t_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$P(t_v < t_c) = \alpha/2 \text{ ou } P(t_v > t_c) = \alpha/2$$

(teste bilateral/bicaudal) .



Exemplo



Uma empresa fabrica transistores do tipo A e do tipo B. A marca A, mais cara, é supostamente pelo menos 60 horas mais durável do que a marca B. Um usuário quer saber se vale a pena pagar mais pela marca A e resolve testar se, de fato, ela é mais durável.



Testa 20 itens de A encontrando uma vida média de 1000 horas com desvio de 60 horas, enquanto que 20 itens da marca B apresentam uma vida média de 910 horas com desvio de 40 horas. Qual a conclusão a 5% de significância?



Solução:

Hipóteses:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 60$$

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 > 60$$

Dados:

$$n = m = 20$$

$$s_A = 60; s_B = 40$$

$$\bar{X} = 1000; \bar{Y} = 910$$

$$\alpha = 5\% ; \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$$

*Trata-se de um teste "t"
unilateral à direita com σ_1 e σ_2
supostamente desiguais.*



A variável teste é:

$$t_v = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_{\bar{X} - \bar{Y}}}{\hat{\sigma}_{\bar{X} - \bar{Y}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m}}}$$

Onde:

$$v = \frac{\left(\frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m} \right)^2}{\frac{(s_X^2/n)^2}{n-1} + \frac{(s_Y^2/m)^2}{m-1}}$$



$$t_v = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m}}} = \frac{1000 - 910 - 60}{\sqrt{\frac{60^2}{20} + \frac{40^2}{20}}} = 1,861$$

E:

$$v = \frac{\left(\frac{60^2}{20} + \frac{40^2}{20} \right)^2}{\frac{\left(\frac{60^2}{20} \right)^2}{20 - 1} + \frac{\left(\frac{40^2}{20} \right)^2}{20 - 1}} \cong 33$$



O valor crítico t_c é tal que: $P(T_{33} > t_c) = \alpha = 0,05 = 5\%$. Então $t_c = T^{-1}(0,95) = 1,692$. Assim $RC = [1,692; +\infty)$

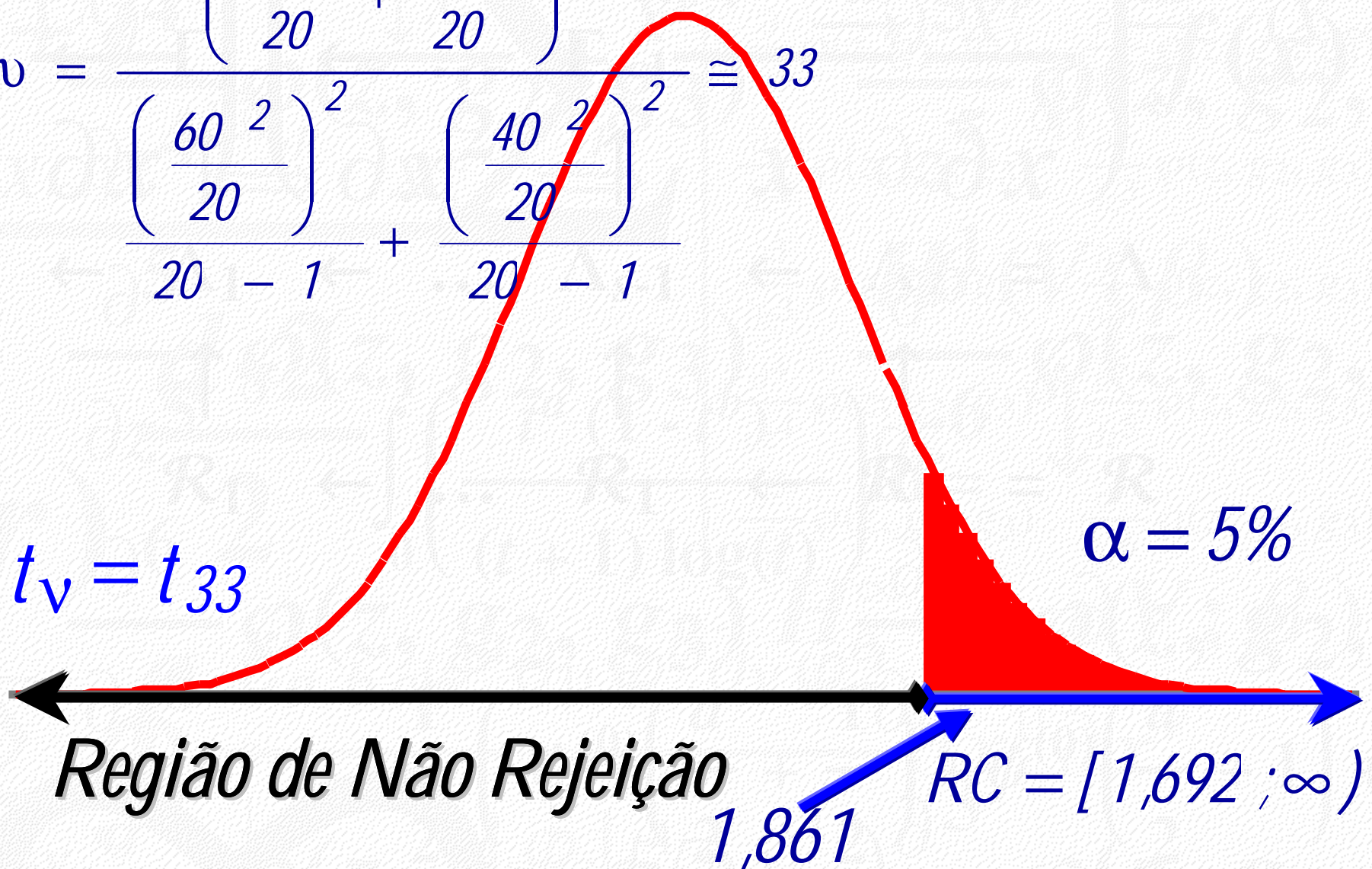
DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $t = 1,861 \in RC$ ou $1,861 > 1,692$, Rejeito H_0 , isto é, a 5% de significância posso afirmar que a vida média da marca é pelo menos 60 horas maior que a marca B.



$$v = \frac{\left(\frac{60^2}{20} + \frac{40^2}{20} \right)^2}{\frac{\left(\frac{60^2}{20} \right)^2}{20 - 1} + \frac{\left(\frac{40^2}{20} \right)^2}{20 - 1}} \cong 33$$

$$t_v = t_{33}$$



Teste para a diferença entre duas proporções

$$H_0: \pi_1 - \pi_2 = \Delta$$

$$H_1: \pi_1 - \pi_2 > \Delta$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$\pi_1 - \pi_2 < \Delta$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$\pi_1 - \pi_2 \neq \Delta$$

(teste bilateral/bicaudal).



Neste caso a variável teste é:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{P_1 - P_2 - \mu_{P_1 - P_2}}{\hat{\sigma}_{P_1 - P_2}} = \\ &= \frac{P_1 - P_2 - \Delta}{\sqrt{\frac{P_1(1 - P_1)}{n} + \frac{P_2(1 - P_2)}{m}}} \end{aligned}$$



Rejeita-se a Hipótese nula se:

$$Z > z_c$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$Z < z_c$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$|Z| > z_c$$

(teste bilateral/bicaudal) .



Onde z_c é tal que:

$$\Phi(z_c) = 1 - \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$\Phi(z_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$\Phi(z_c) = \alpha/2 \text{ ou } \Phi(z_c) = 1 - \alpha/2$$

(teste bilateral/bicaudal) .



Exemplo



A reitoria de uma grande universidade entrevistou 600 alunos, 350 mulheres e 250 homens, para colher a opinião sobre a troca do sistema de avaliação da universidade. Da amostra 140 mulheres e 115 homens estavam a favor. Teste a 5% se existe diferença significativa de opinião entre homens e mulheres.



Solução:

Hipóteses:

$$H_0: \pi_1 = \pi_2$$

$$H_0: \pi_1 \neq \pi_2$$

Dados:

$$n = 350; m = 250$$

$$p_1 = 140/350 = 40\%$$

$$p_2 = 115/250 = 46\%$$

$$\alpha = 5\% ;$$

Trata-se de um teste bilateral para a proporção.



A variável teste é:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{P_1 - P_2 - \Delta}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n} + \frac{P_2(1-P_2)}{m}}} = \\ &= \frac{0,40 - 0,46 - 0}{\sqrt{\frac{0,40(1-0,40)}{350} + \frac{0,46(1-0,46)}{250}}} = \\ &= \frac{-0,06}{0,02718} = -2,21 \end{aligned}$$

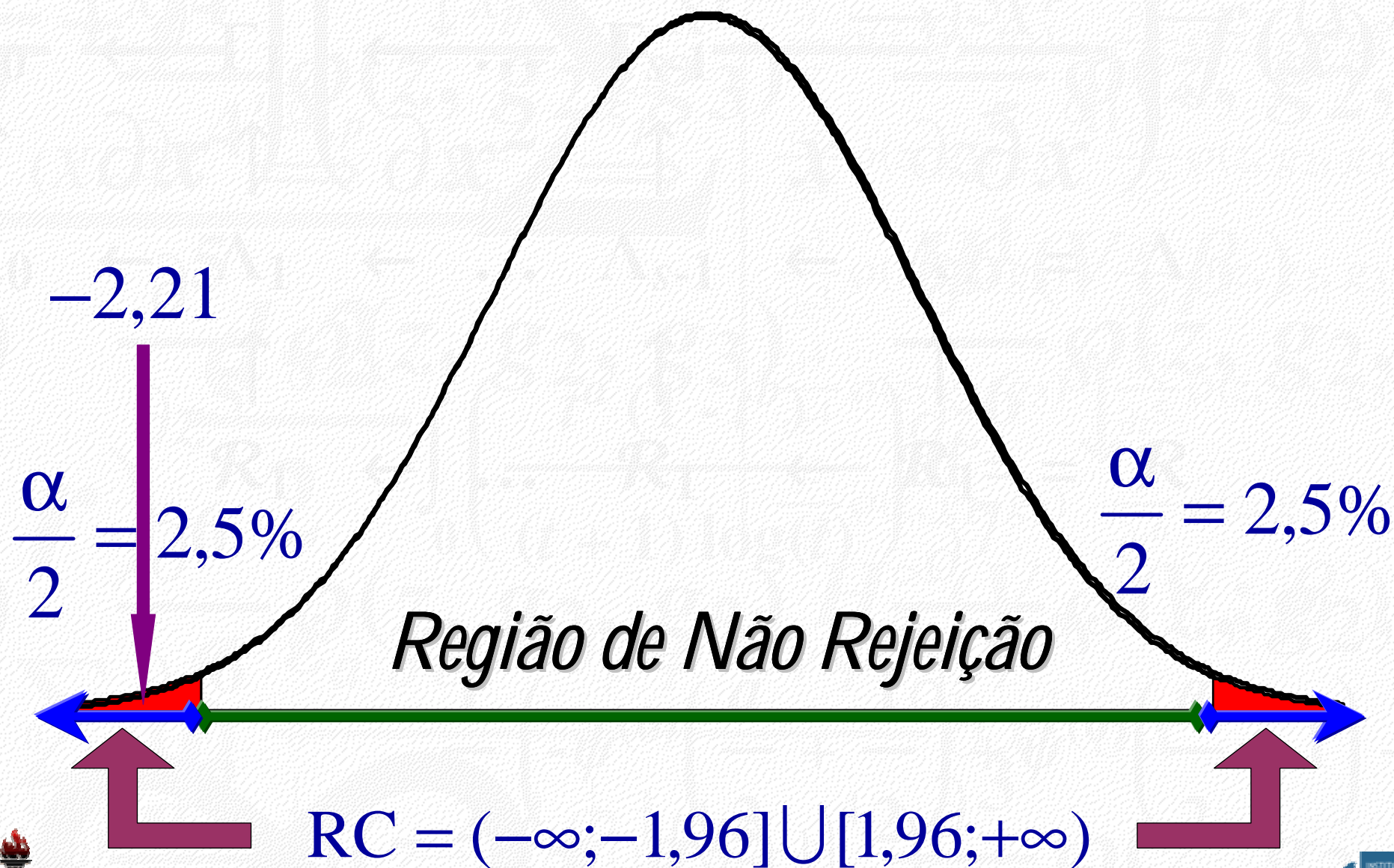


O valor crítico z_c é tal que: $\mathbf{P}(|Z| > z_c) = \alpha = 0,05 = 5\%$. Então $z_c = \Phi^{-1}(0,05) = -1,96$. Assim $RC = (-\infty; -1,96] \cup [1,96; +\infty)$

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $z = -2,21 \in RC$ ou $-2,21 < -1,96$, Rejeito H_0 , isto é, a 5% de significância posso afirmar que as opiniões diferem entre homens e mulheres.





Teste para a igualdade entre duas variâncias

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \text{ (teste unilateral/unicaudal à direita)}$$

$$\sigma_1^2 < \sigma_2^2 \text{ (teste unilateral/unicaudal à esquerda)}$$

$$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \text{ (teste bilateral/bicaudal).}$$



Neste caso a variável teste é:

$$F_{n-1, m-1} = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$



Rejeita-se a Hipótese nula se:

$$F_{n-1,m-1} > f_c$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$F_{n-1,m-1} < f_c$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$F_{n-1,m-1} > f_c \text{ ou } F_{n-1,m-1} < f_c$$

(teste bilateral/bicaudal) .



Onde $F_{n-1;m-1}$ é tal que:

$$P(F_{n-1, m-1} > F_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$P(F_{n-1, m-1} < F_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$P(F_{n-1, m-1} > F_c) = \alpha/2 \text{ ou } P(F_{n-1, m-1} < F_c) = \alpha/2$$

(teste bilateral/bicaudal).



Exemplo



O desvio padrão de uma dimensão particular de um componente de metal é satisfatório para a montagem do componente. Um novo fornecedor está sendo considerado e ele será preferível se o desvio padrão é menor do que o do atual fornecedor. Uma amostra de 100 itens de cada fornecedor é obtido.



Fornecedor atual: $s_1^2 = 0,0058$

Novo fornecedor: $s_2^2 = 0,0041$

*A empresa deve trocar de fornecedor
se for considerado uma significância
de 5%?*



Solução:

Hipóteses:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_0: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

Dados:

$$n = m = 100$$

$$s_1^2 = 0,0058$$

$$s_2^2 = 0,0041$$

$$\alpha = 5\%$$

Trata-se de um teste unilateral à direita para a igualdade de variâncias.



A variável teste é:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Que apresenta uma distribuição F com "n – 1" g.l. no numerador e "m – 1" g.l. no denominador.

Então:

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0,0058}{0,0041} = 1,41$$

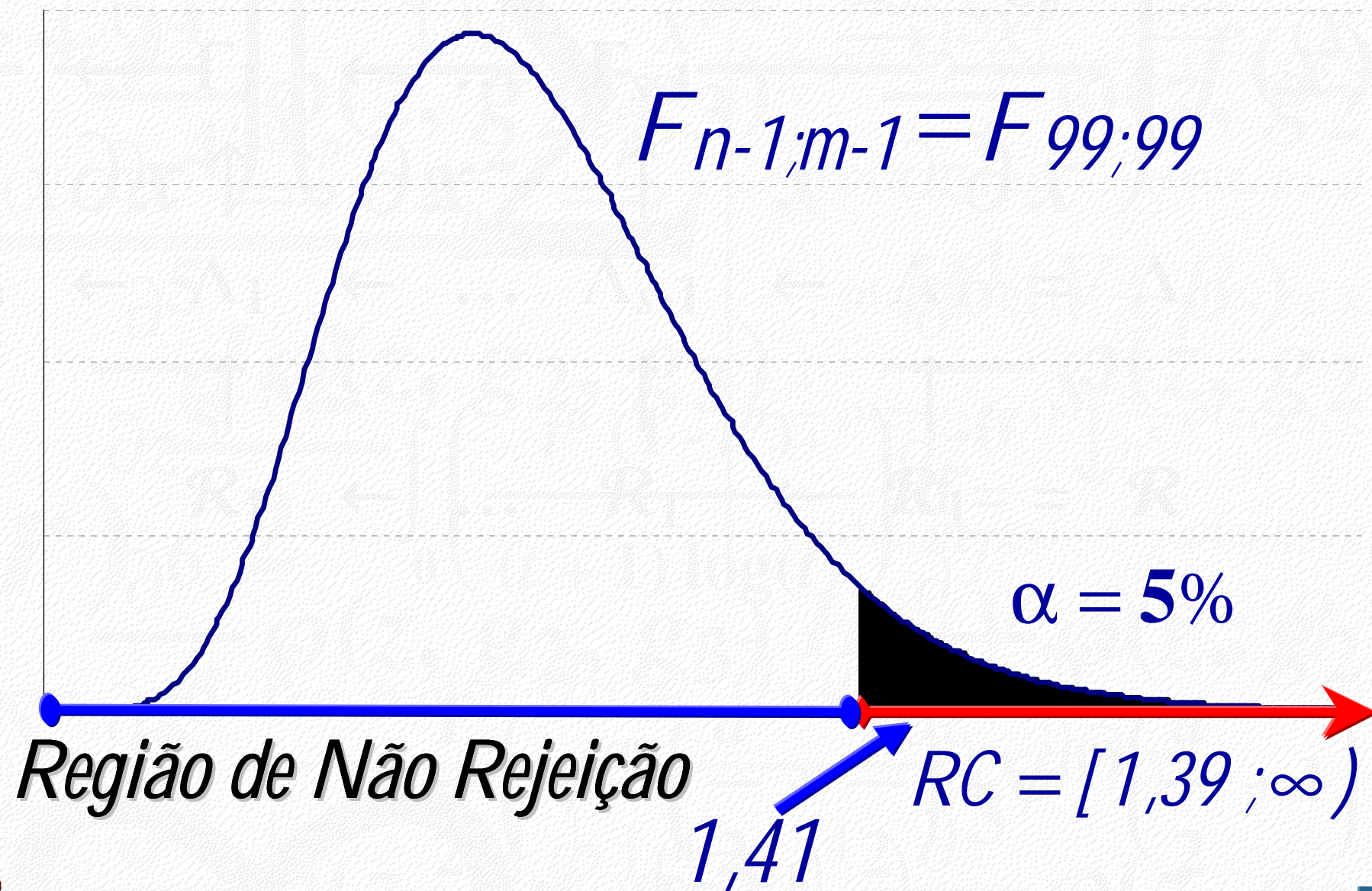


O valor crítico f_c é tal que: $\mathbf{P}(|F| > f_c) = \alpha = 0,05 = 5\%$. Então $f_c = F^{-1}(0,05) = 1,39$. Assim $RC = [1,39; +\infty)$

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $f = 1,41 \in RC$ ou $1,41 < 1,39$, Rejeito H_0 , isto é, a 5% de significância posso afirmar que a variância do fornecedor atual é maior do que a do novo fornecedor.





(6)

Dependentes
(Emparelhadas)



Teste para a média

$$H_0: \mu_D = \Delta$$

$$H_1: \mu_D > \Delta$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$\mu_D < \Delta$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$\mu_D \neq \Delta$$

(teste bilateral/bicaudal).



Neste caso a variável teste é:

$$t_v = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}} = \frac{\bar{D} - \Delta}{S_D / \sqrt{n}}$$



Onde :

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - n\bar{d}^2}{n-1}}$$

e v é dado por: $n-1 = m-1$



Rejeita-se a Hipótese nula se:

$$t_{n-1} > t_c$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$t_{n-1} < t_c$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$|t_{n-1}| > t_c$$

(teste bilateral/bicaudal) .



Onde t_c é tal que:

$$P(t_{n-1} < t_c) = 1 - \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$P(t_{n-1} < t_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$P(t_{n-1} < t_c) = \alpha/2 \text{ ou } P(t_{n-1} > t_c) = \alpha/2$$

(teste bilateral/bicaudal)



Exemplo



Um laboratório possui dois equipamentos de precisão. O diretor suspeita que existe uma pequena diferença de calibração entre os dois (ele não sabe em qual deles) de modo que um tende a dar leituras um pouco maiores do que o outro.



Ele propõe testar os dois aparelhos através da leitura de 10 medidas (tabela na próxima lâmina) em cada um dos aparelhos. Faça o teste adequado a uma significância de 5%.



<i>Aparelho A</i>	<i>Aparelho B</i>
12,2	12,5
12,1	12,2
10,55	10,57
13,33	13,32
11,42	11,47
10,30	10,30
12,32	12,36
13,27	13,29
11,93	11,91
12,50	12,61



Solução:

Hipóteses:

$$H_0: \mu_D = 0$$

$$H_1: \mu_D \neq 0$$

Dados:

$$n = m = 10$$

$$\alpha = 5\%$$

Uma vez que as amostras não são independentes, trata-se do teste “t” para amostras emparelhadas.



A variável teste é:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}} = \frac{\bar{D} - \Delta}{s_D / \sqrt{n}}$$

Onde:

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - n\bar{d}^2}{n-1}}$$



A	B	d_i	d_i^2
12,2	12,5	0,30	0,0900
12,1	12,2	0,10	0,0100
10,55	10,57	0,02	0,0004
13,33	13,31	-0,02	0,0004
11,42	11,44	0,02	0,0004
10,30	10,30	0,00	0,0000
12,32	12,36	0,04	0,0016
13,27	13,29	0,02	0,0004
11,93	11,90	-0,03	0,0009
12,50	12,61	0,11	0,0121
--	--	0,56	0,1162



Tem-se: $\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{0,56}{10} = 0,0560$

$$s = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - n\bar{d}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,1162 - 10 \cdot 0,0560^2}{10-1}} = 0,0971$$

A variável teste é:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{D} - \Delta}{s_D / \sqrt{n}} = \frac{0,056 - 0}{0,0971 / \sqrt{10}} = \frac{0,056 \cdot \sqrt{10}}{0,0971} = 1,824$$



O valor crítico z_c é tal que: $P(|T| > t_c) = \alpha = 0,05 = 5\%$. Então $t_c = T^{-1}(0,05) = 2,262$. Assim $RC = [2,262; +\infty]$

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $t = 1,824 \notin RC$ ou $1,824 < 2,262$, Aceito H_0 , isto é, a 5% de significância não se pode afirmar que as leituras são diferentes.



