

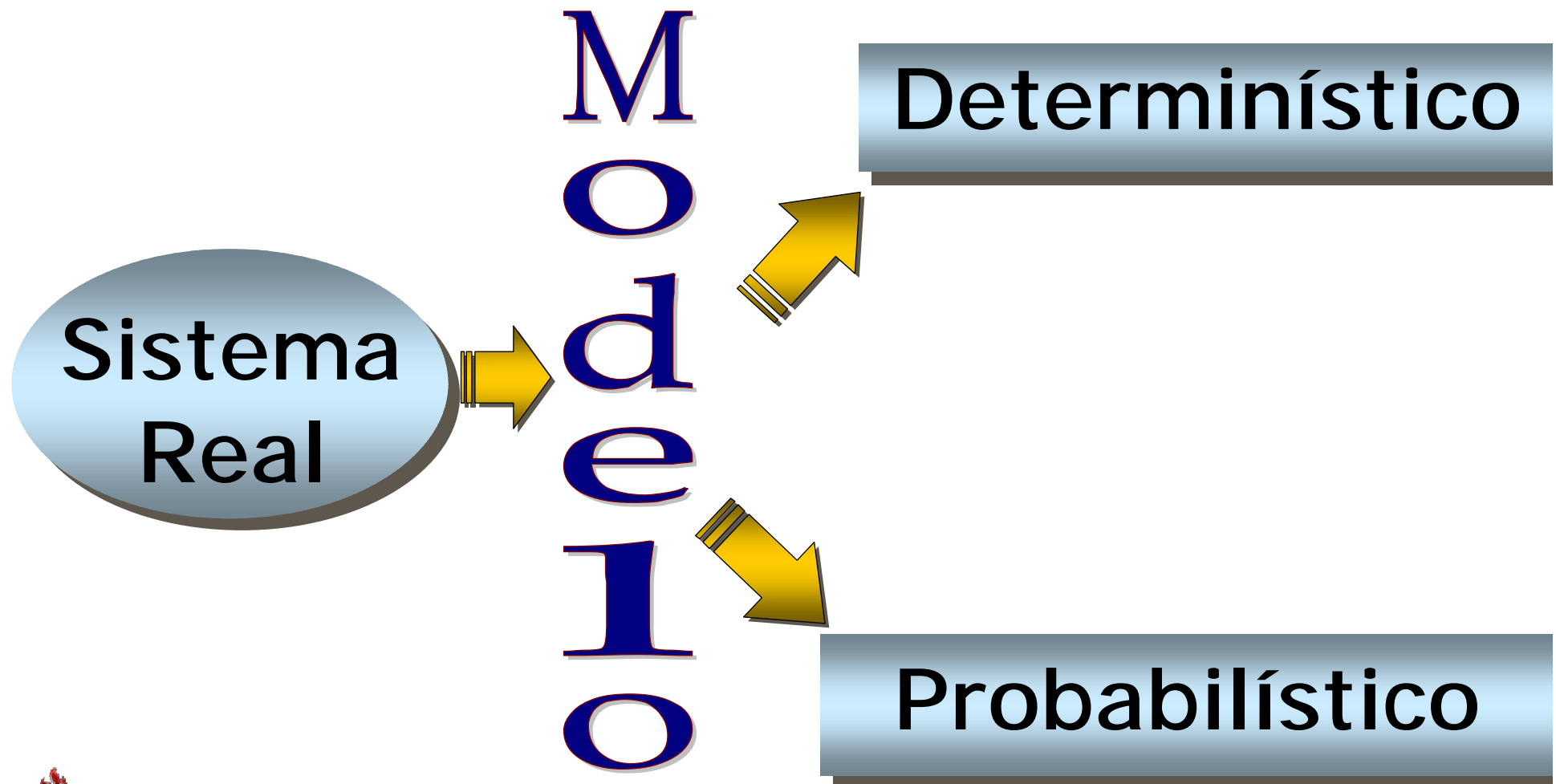
Probabilidade

Prof. Lorí Viali, Dr.

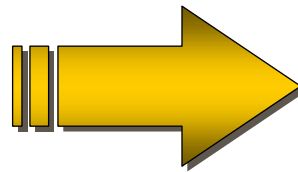
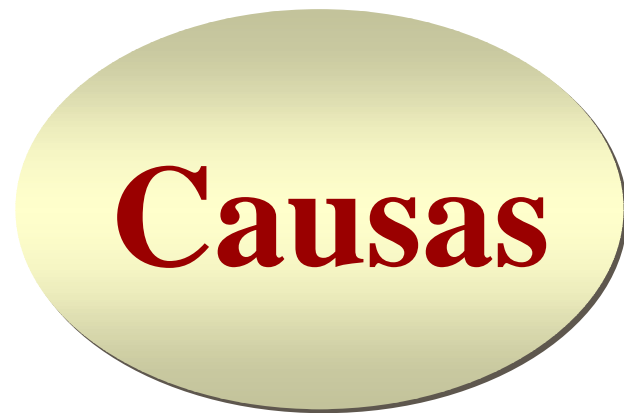
viali@mat.ufrgs.br

[http://www. ufrgs.br/~viali/](http://www.ufrgs.br/~viali/)

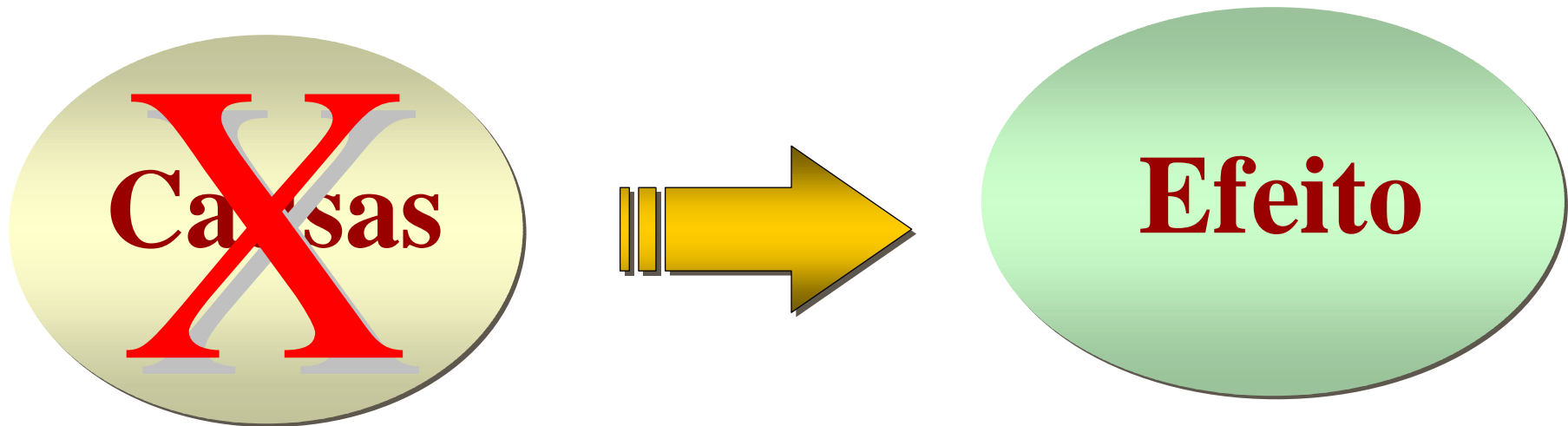
Tipos de Modelos



Modelo Determinístico



Modelo Probabilístico



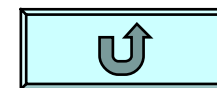
Experimento Aleatório

Experiência para o qual
o modelo probabilístico é
adequado.



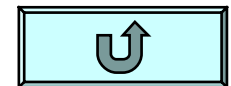
Exemplos

E_1 : Joga-se um dado e observa-se o número da face superior.



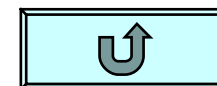
Exemplos

E_2 : Joga-se uma moeda quatro vezes e observa-se a sequência de caras e coroas ;



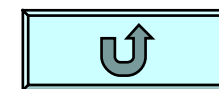
Exemplos

E_3 : Uma lâmpada nova é ligada e conta-se o tempo gasto até queimar;



Exemplos

E_4 : Jogam-se dois dados e observa-se o par de valores obtido;



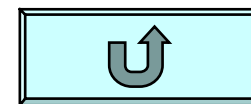
Espaço Amostra(1)

É o conjunto de resultados
de uma experiência aleatória.



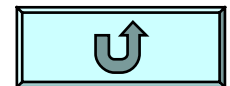
Exemplos

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



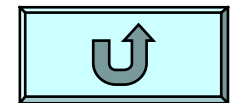
Exemplos

$$S_2 = \{ \text{cccc, ccck, cckc, ckcc, kccc, cckk, kkcc, ckkc, kcck, ckck, kckc, kkkc, kkck, kckk, ckkk, kkkk} \}$$

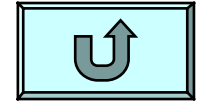


Exemplos

$$S_3 = \{ t \in \mathbf{R} / t \geq 0 \}$$



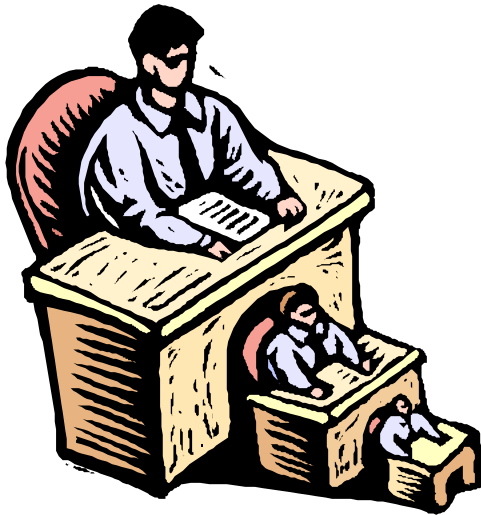
Exemplos



$$S_4 = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6) \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6) \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6) \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6) \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6) \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \}$$



Eventos



Um evento é um subconjunto de um espaço amostra.



Ocorrência de um evento

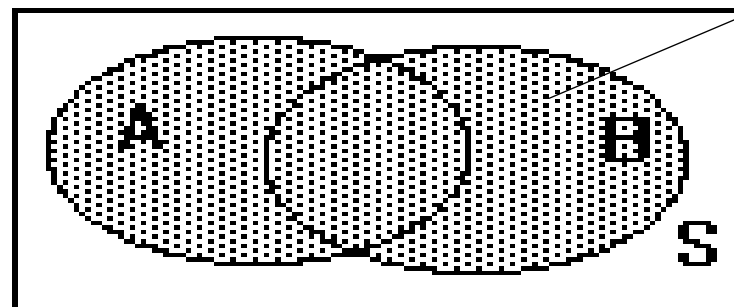
Seja E um experimento com espaço amostra associado S . Diremos que o evento A ocorre se realizado E o resultado é um elemento de A .



Combinação de eventos

Sejam A e B eventos de um espaço S . Diremos que ocorre o evento:

**A união B , A soma B ou A mais B ,
se e só se A ocorre ou B ocorre.**



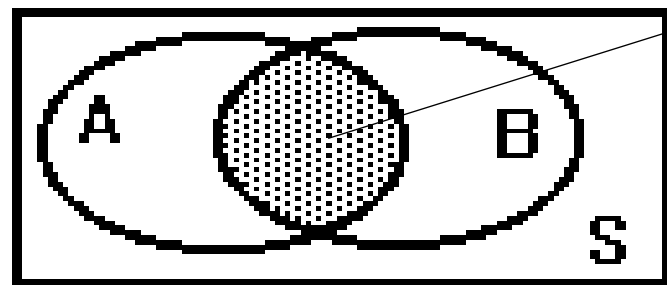
$A \cup B$



Combinação de eventos

Sejam A e B eventos de um espaço S .
Diremos que ocorre o evento:

A produto B , A vezes B ou A
interseção B , se e só se A ocorre e B
ocorre.



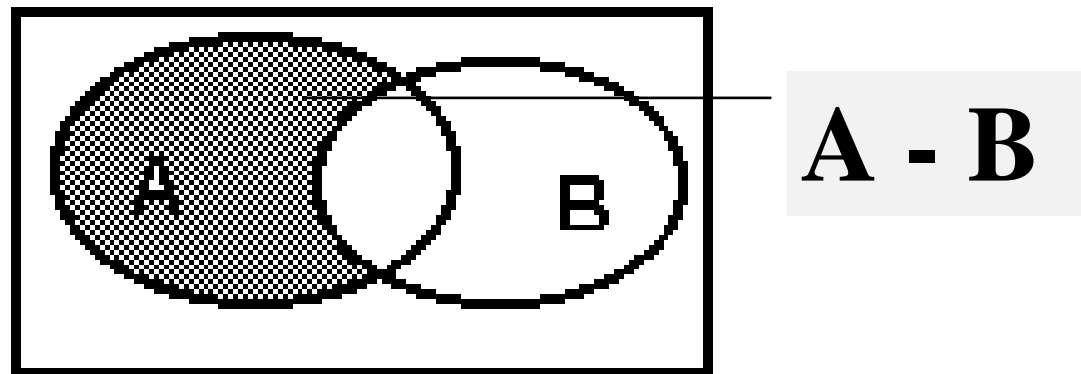
$A \cap B$



Combinação de eventos

Sejam A e B eventos de um espaço S .
Diremos que ocorre o evento:

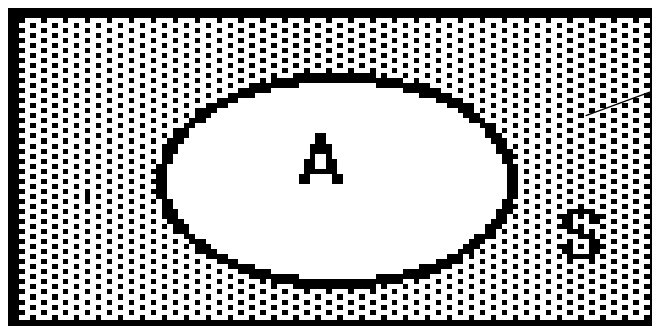
A menos B , A diferença B , se e só se
 A ocorre e B não ocorre.



Combinação de eventos

Sejam A e B eventos de um espaço S . Diremos que ocorre o evento:

Complementar de A (não A) se e só se A não ocorre.

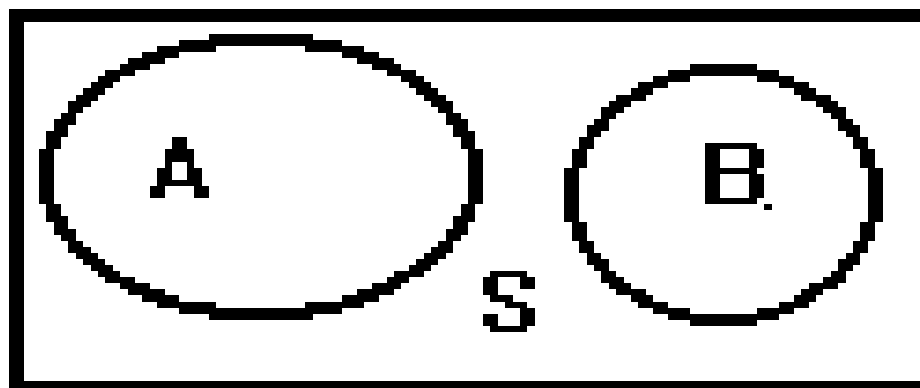


$$A' = A^C = \bar{A}$$



Eventos mutuamente excludentes

Dois eventos A e B são mutuamente excludentes se não puderem ocorrer juntos.



Conceitos de Probabilidade

♣ **CLÁSSICO**

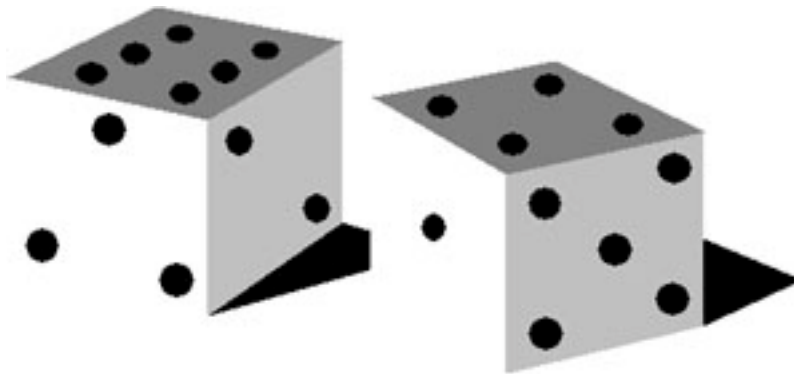
♥ **FREQÜENCIAL**

♠ **AXIOMÁTICO**



CLÁSSICO

$$P(A) = \frac{\text{(número de casos favoráveis)}}{\text{(número de casos possíveis)}}$$



Frequência Relativa

$$\text{fr}_A = \frac{\text{(número de vezes que A ocorre)}}{\text{(número de vezes que E é repetido)}}$$



Conceito freqüencial de probabilidade

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} fr_A$$



Conceito Axiomático

$P(A)$ é um número real que deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$(1) \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$(2) \quad P(S) = 1$$

$$(3) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\text{se } A \cap B = \emptyset$$



Consequências dos Axiomas

$$(1) \ P(\emptyset) = 0$$

$$(2) \ P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$(3) \ P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$



Consequências dos Axiomas

$$(4) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$(5) \quad P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - \\ - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + \\ + P(A \cap B \cap C)$$



Probabilidade Condicionada

Definição

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$$

Teorema da multiplicação

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = P(A/B).P(B)$$



Independência

Dois eventos A e B são independentes se a probabilidade de um ocorrer não altera a probabilidade do outro ocorrer, isto é:



Independência

$$(1) \quad P(A/B) = P(A)$$

$$(2) \quad P(B/A) = P(B)$$

$$(3) \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$



Partição de um espaço amostra

Diz-se que os conjuntos:

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

eventos de um mesmo espaço amostra S , formam uma partição deste espaço se:



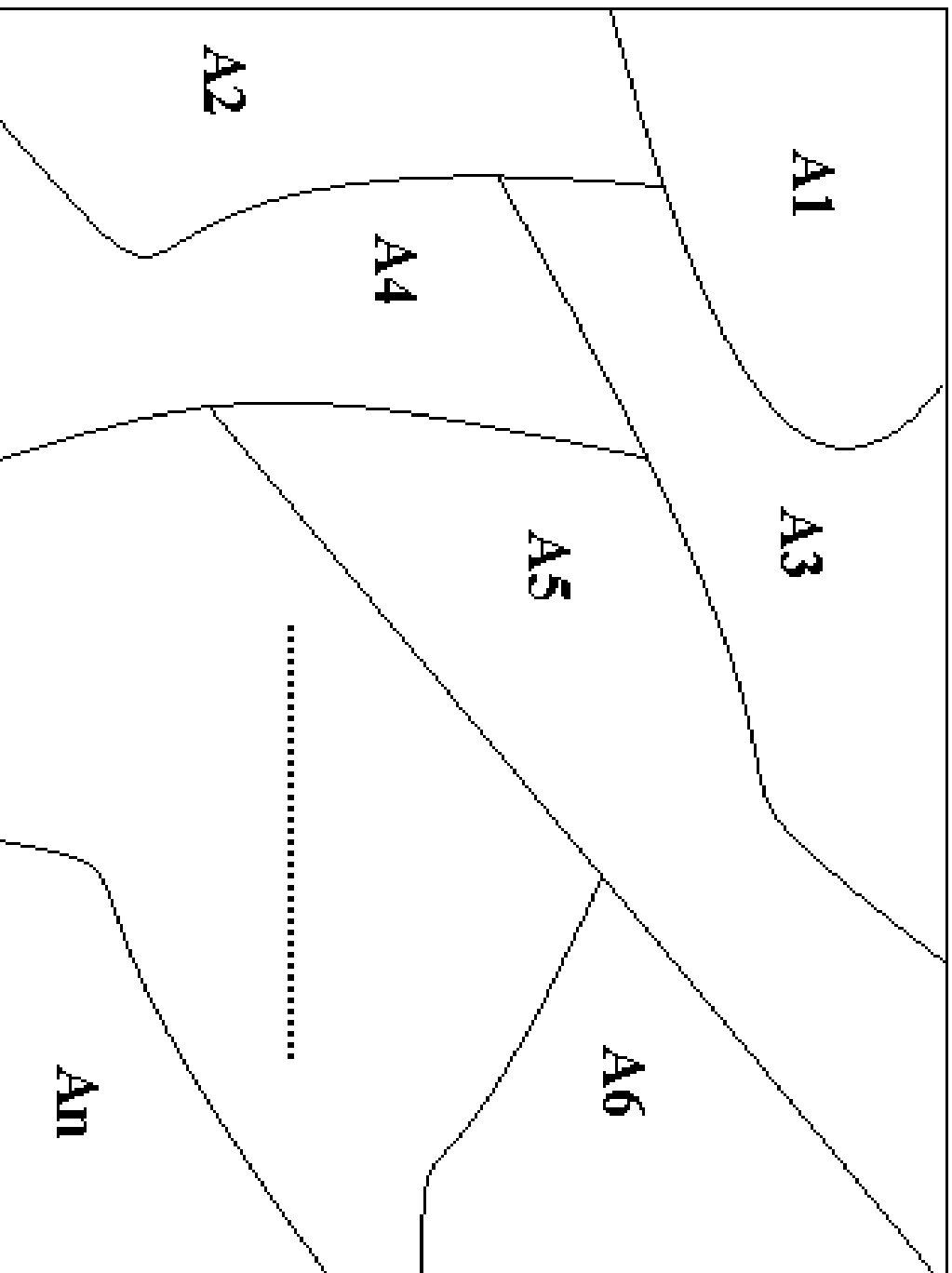
(1) $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$

(2) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$, para todo $i \neq j$

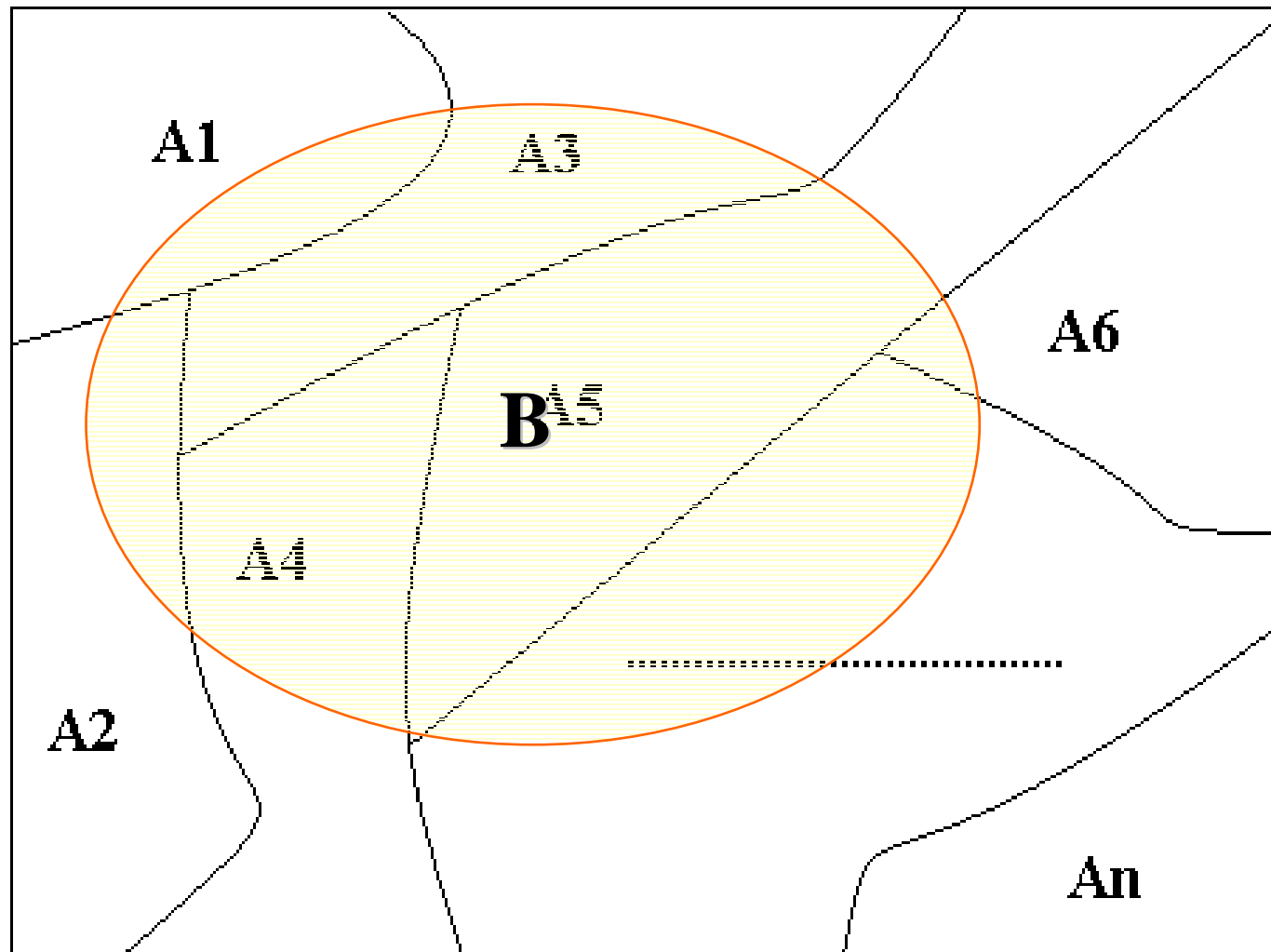
(3) $P(A_i) > 0$, para todo i



Partição de um espaço amostra



Teorema da probabilidade total



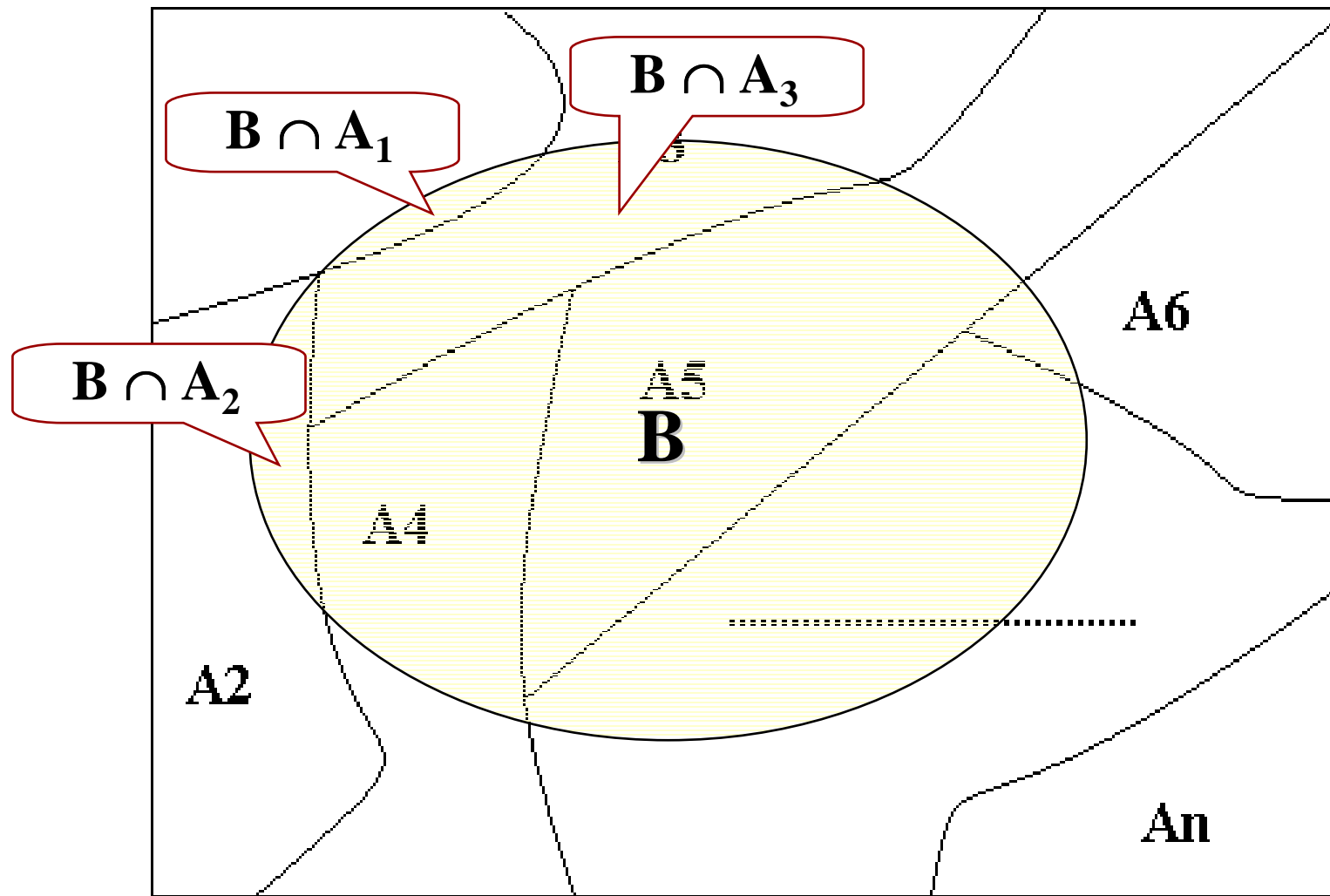
Teorema da probabilidade total

B pode ser escrito como:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{B} \cap A_1) \cup (\mathbf{B} \cap A_2) \cup \dots \cup (\mathbf{B} \cap A_n)$$



Teorema da probabilidade total



Teorema da probabilidade total

$P(B)$ será então:

$$P(B) = P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)]$$

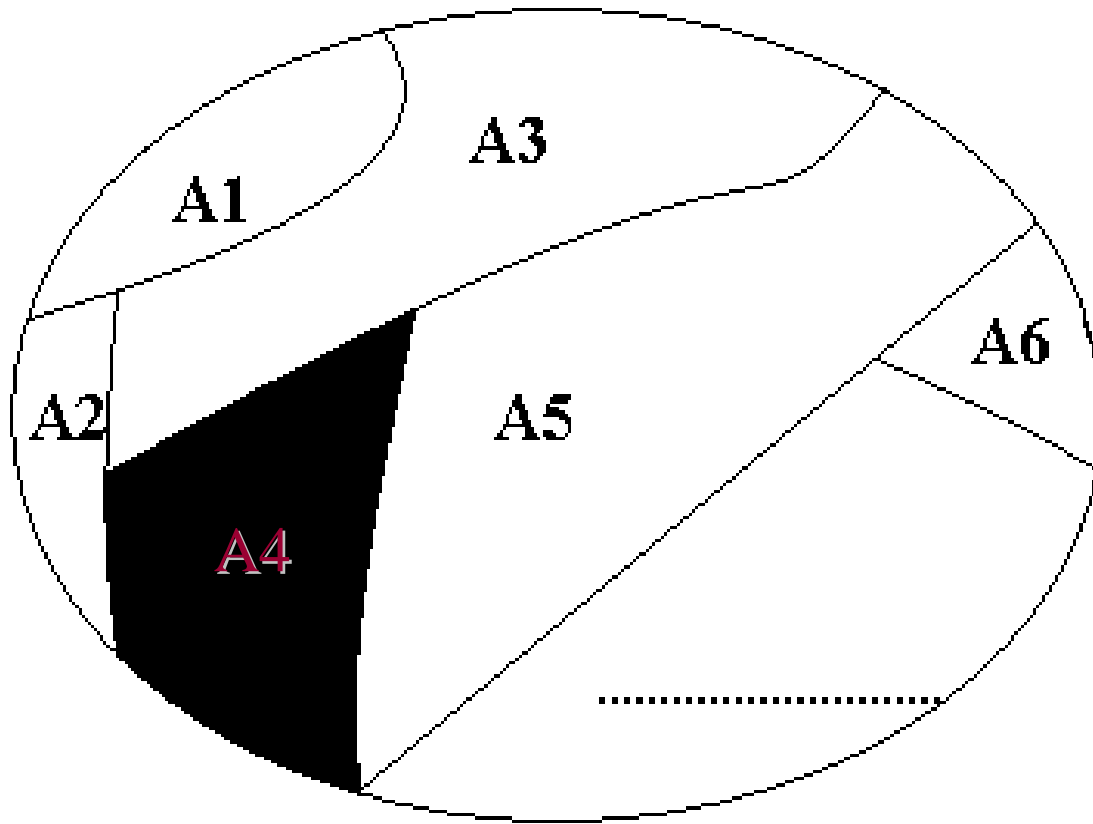
$$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n) =$$

$$= \sum P(B \cap A_i) = \sum P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

$$P(B) = \sum P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$



Teorema de Bayes



Teorema de Bayes

Calcula a probabilidade de ocorrência de um dos “ A_i ” (que formam a partição) dado que ocorreu um evento qualquer “ B ”.



Teorema de Bayes

Aplicando a expressão da probabilidade condicionada vem:

$$\begin{aligned} P(A_i / B) &= P(A_i \cap B) / P(B) = \\ &= P(A_i) \cdot P(B / A_i) / P(B) \end{aligned}$$



Teorema de Bayes

Na expressão

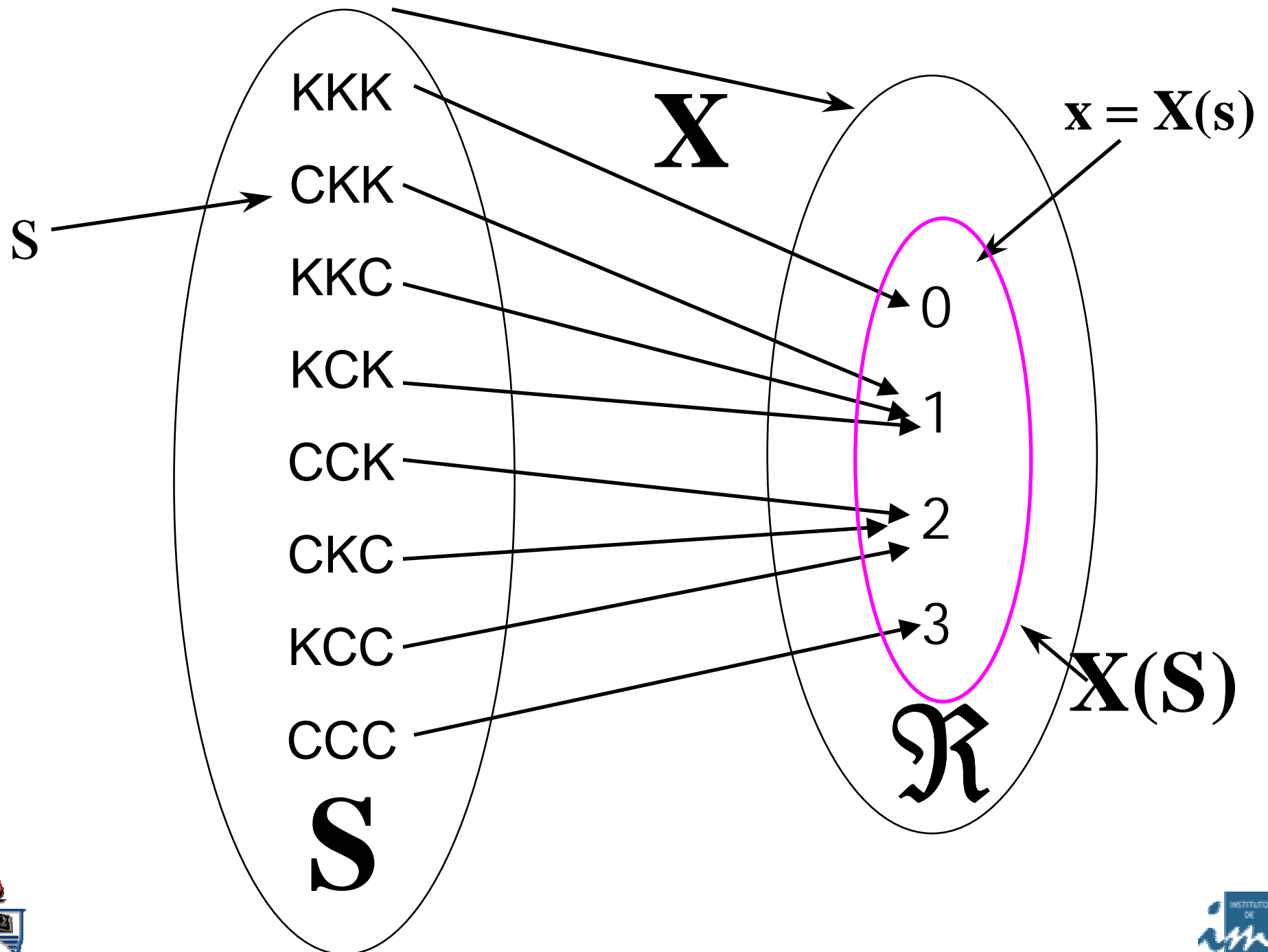
$$P(A_i / B) = P(A_i) \cdot P(B/A_i) / P(B)$$

o valor de $P(B)$ é obtido
através do Teorema da
Probabilidade Total



Variável Aleatória





Variável Aleatória

Uma função \mathbf{X} que associa a cada elemento de S ($s \in S$) um número real $x = X(s)$ é denominada **variável aleatória**.



Tipos de variáveis

Conforme o conjunto de valores – $X(S)$ – uma variável aleatória poderá ser discreta ou contínua.



Variável Discreta (VAD)

Se o conjunto de valores for
finito ou então **infinito**
enumerável a variável é dita
discreta.



Variável Contínua (VAC)

Se o conjunto de valores
for **infinito não enumerável**
então a variável é dita
contínua.



Variável Aleatória Discreta



A função de probabilidade

A função de probabilidade (fp) de uma VAD é a função que associa a cada $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}(S)$ o número $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{P}(\mathbf{X} = \mathbf{x}_i)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \geq \mathbf{0}, \text{ para todo "i"}$$

$$\sum \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{1}$$



A distribuição de probabilidade

A coleção dos pares $[x_i, f(x_i)]$ para $i = 1, 2, 3, \dots$ é denominada de **distribuição de probabilidade** da VAD X .



Exemplo

Suponha que um par de dados é lançado. Então $X = \text{“soma do par”}$ é uma variável aleatória discreta com o seguinte conjunto de valores:



Como $X((a, b)) = a + b$, o conjunto de valores de X é dado por:

$$X(S) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$



A função de probabilidade
 $f(x) = P(X = x)$, associa a cada
 $x \in X(S)$, um número no
intervalo $[0; 1]$ dado por:

$$\begin{aligned} f(x) &= P(X = x) = P(X(s) = x) = \\ &= P([x \in X(S) / X(s) = x]) \end{aligned}$$



Desta forma:

$$f(2) = P(X = 2) = P\{(1,1)\} = 1/36$$

$$f(3) = P(X = 3) = P\{(1,2), (2, 1)\} = 2/36$$

.....

$$f(11) = P(X=11) = P\{(6, 5), (5, 6)\} = 2/36$$

$$f(12) = P(X = 12) = P\{(6, 6)\} = 1/36$$

A distribuição de probabilidade será:



A distribuição de probabilidade
de X será então:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1



Representação de uma Distribuição de Probabilidade

Através de:

- uma tabela
- uma expressão analítica (fórmula)
- um diagrama



Tabela

Seja X = “número de caras”, obtidas no lançamento de 4 moedas honestas. Então a distribuição de X é a dada ao lado.

x	$f(x)$
0	1/16
1	4/16
2	6/16
3	4/16
4	1/16
Σ	1



Expressão Analítica

Considere $X =$ “soma do par”,
no lançamento de dois dados
equilibrados, então:

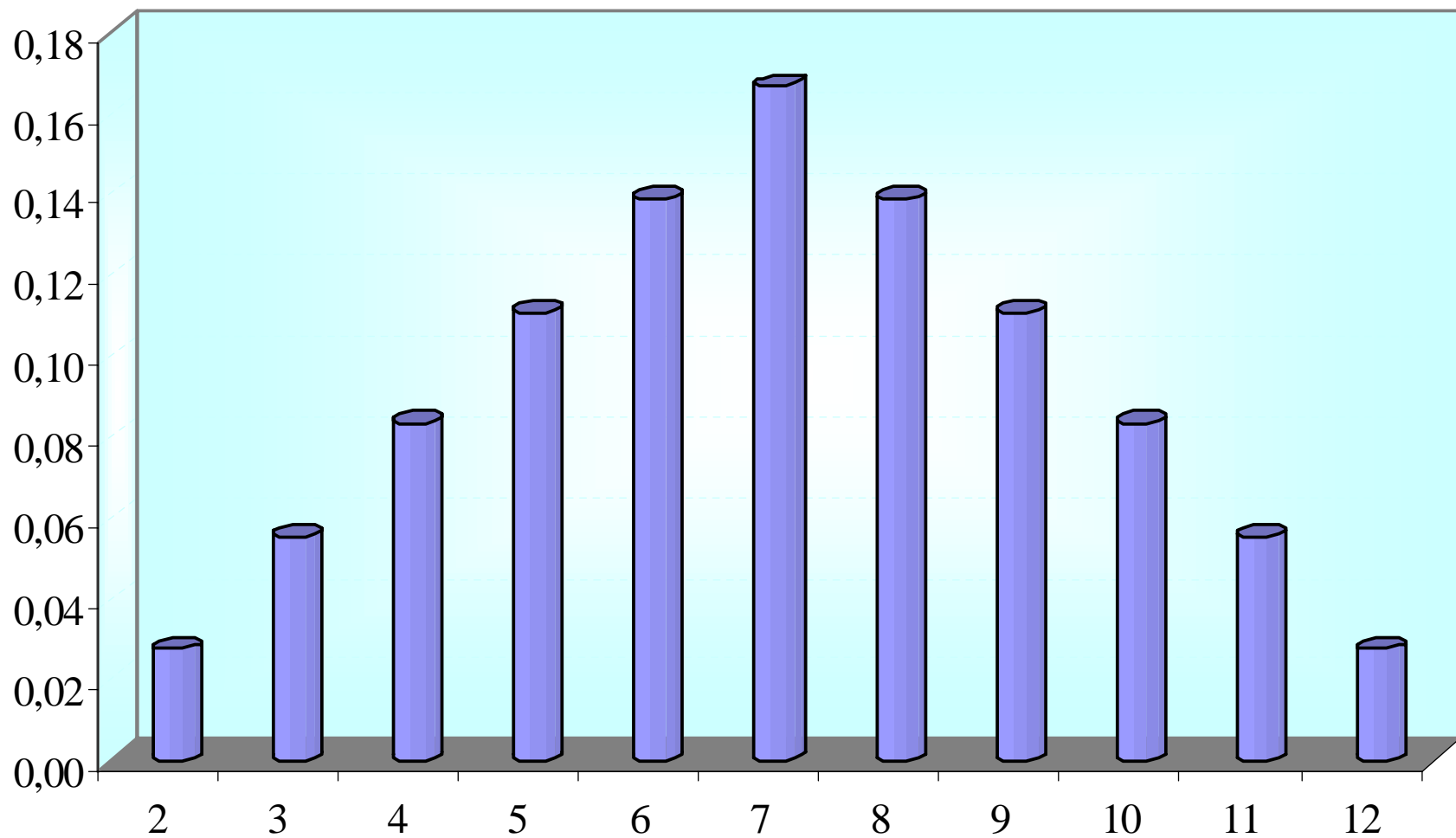
$$f : X(S) \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$x \rightarrow (x - 1)/36 \quad \text{se } x \leq 7$$

$$(12 - x - 1)/36 \quad \text{se } x > 7$$



Diagrama



VAD - Caracterização

(a) Expectância, valor esperado

$$\mu = E(X) = \sum \mathbf{x} \cdot f(\mathbf{x}) = \sum \mathbf{x} \cdot P(X = \mathbf{x})$$

(b) Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\sum f(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mu)^2} = \sqrt{\sum \mathbf{x}^2 f(\mathbf{x}) - \mu^2}$$



Modelos Discretos de Probabilidade

- **Bernoulli**
- **Binomial**
- **Hipergeométrica**



Bernoulli



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



EXPERIMENTO

Qualquer um que corresponda a apenas dois resultados. Estes resultados são anotados por “0” ou “fracasso” e “1” ou “sucesso”. A probabilidade de ocorrência de “sucesso é representada por “p” e a de insucesso por “ $q = 1 - p$ ”.



Conjunto de Valores

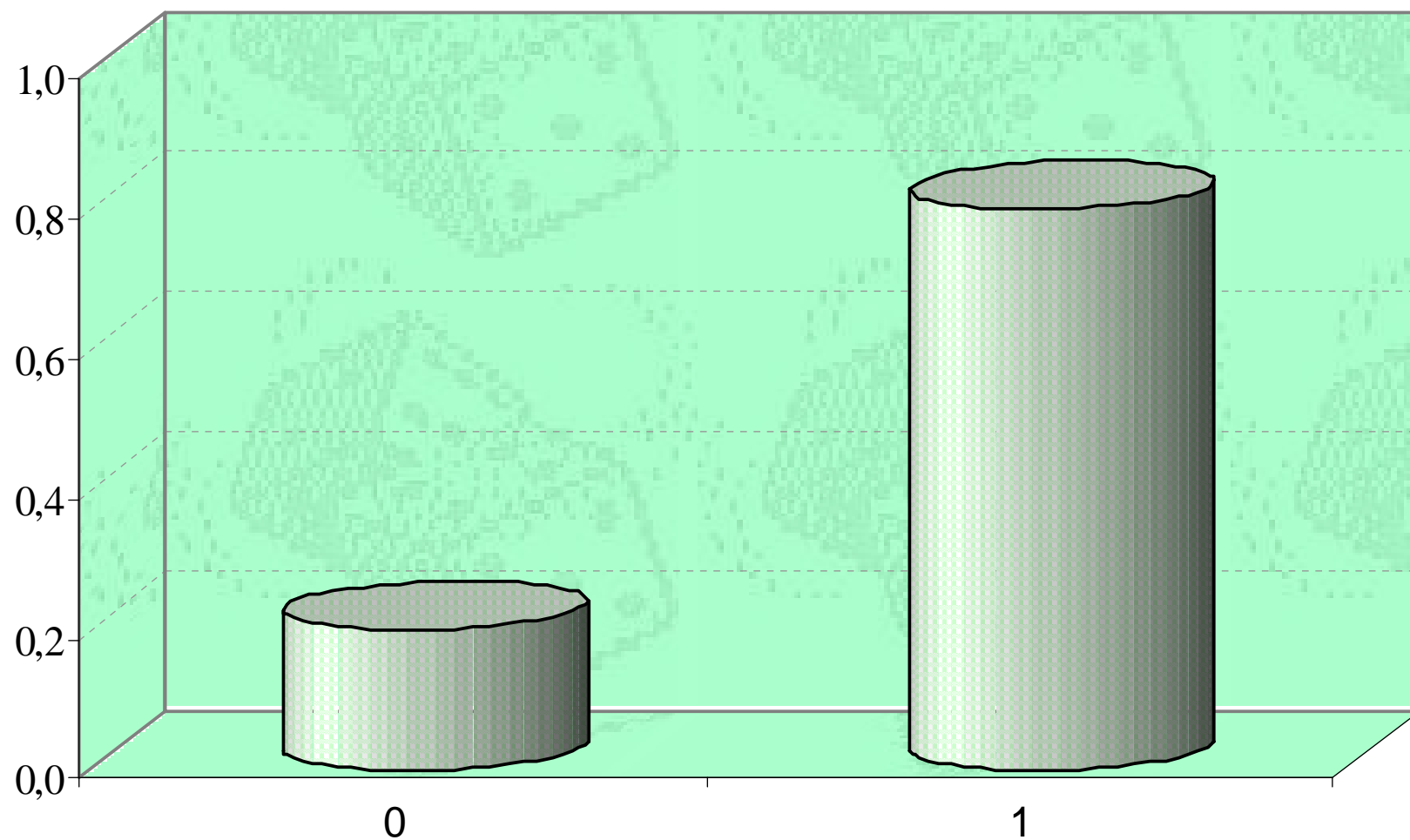
$$X(S) = \{ 0, 1 \}$$

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1-p & \text{se } x = 0 \\ p & \text{se } x = 1 \end{cases}$$



A Função de Probabilidade (fp)



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \sum x.f(x) = 0.q + 1.p = p$$

Variância

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$$

$$= (0^2.q + 1^2.p) - p^2 =$$

$$= p - p^2 = p(1 - p) = pq$$



Binomial



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



EXPERIMENTO

Como existem apenas duas situações: A ocorre e A não ocorre, pode-se determinar a probabilidade de A não ocorrer como sendo $q = 1 - p$.

A VAD definida por $X =$ “número de vezes que A ocorreu nas ‘ n ’ repetições de E ” é denominada BINOMIAL.



Conjunto de Valores

$$X(S) = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$$

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \sum x.f(x) = np$$

Variância

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = npq$$

$$\sigma_X = \sqrt{npq}$$



Hipergeométrico



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



EXPERIMENTO

A distribuição Binomial é deduzida com base em “ n ” repetições de um experimento de maneira independente (isto é, $p =$ constante), ou retiradas com reposição de uma população finita.



EXPERIMENTO

Se a experiência consistir na seleção de objetos, **sem reposição**, de uma população finita, de tamanho “ N ”, onde “ r ” apresentam uma característica “ $N - r$ ” não apresentam esta característica, então existirá dependência entre as repetições.



EXPERIMENTO

Neste caso a variável aleatória X = “número de objetos com a característica r em uma amostra de tamanho n ”, terá uma distribuição denominada de Hipergeométrica.



Conjunto de Valores

$x : \text{máx}\{0, n-N+r\}, \dots, \text{mín}\{r, n\}$

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = np$$

Desvio Padrão

$$\sigma_X = \sqrt{npq} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$\text{Onde } p = \frac{r}{N}$$



Variável Aleatória Contínua



Seja X uma variável aleatória com conjunto de valores $X(S)$. Se o conjunto de valores for **infinito não enumerável** então a variável é dita **contínua**.



A função densidade de probabilidade

É a função que associa a cada $\mathbf{x} \in \mathbf{X}(S)$ um número $f(\mathbf{x})$ que deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$f(\mathbf{x}) \geq 0$$

$$\int f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$



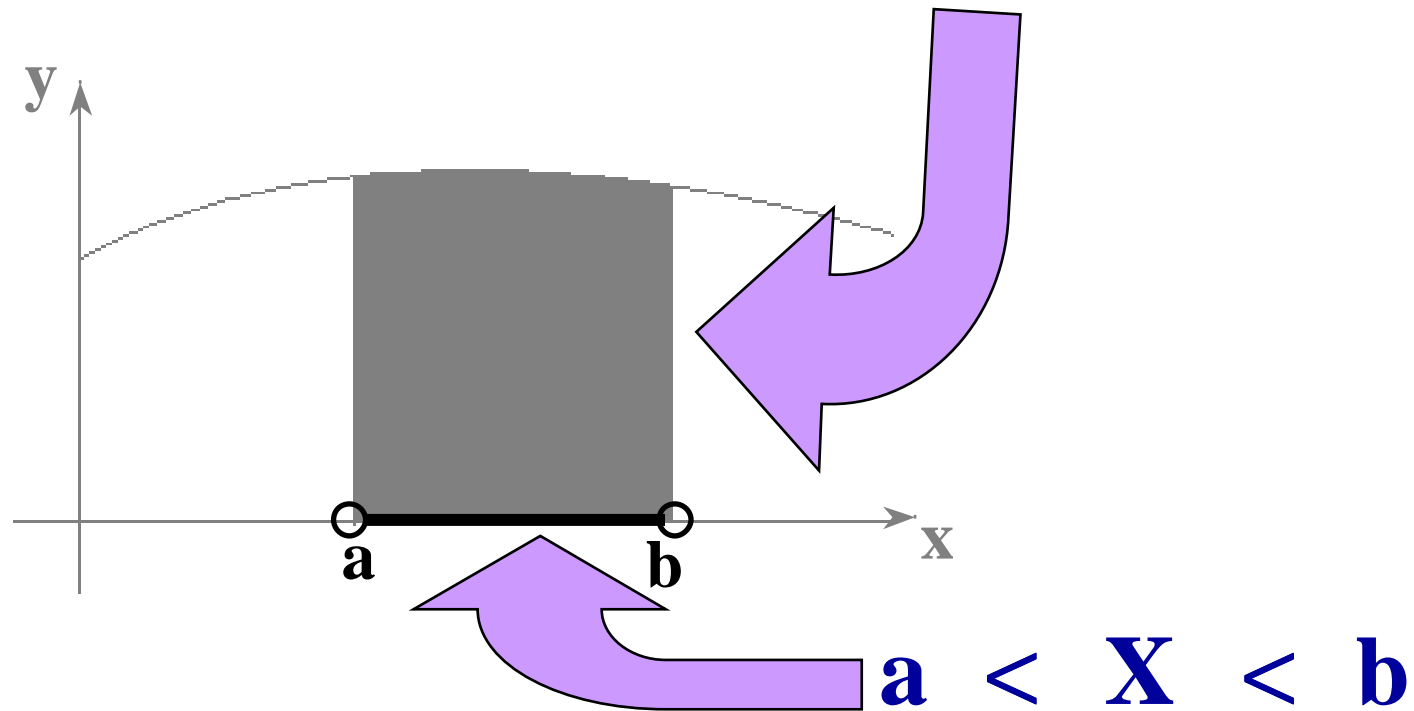
A Distribuição de Probabilidade

A coleção dos pares
 $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ é denominada de
distribuição de probabilidade da
VAC X .



Cálculo da Probabilidade

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$



Cálculo da Probabilidade

$$P (a < X < b) = \int_a^b f (x) dx$$

Isto é, a probabilidade de que X assumira valores entre os números “a” e “b” é a área sob o gráfico de $f(x)$ entre os pontos $x = a$ e $x = b$.



Observações:

Se X é uma VAC, então:

$$P(X = a) = \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \leq X < b) = \\ &= P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) \end{aligned}$$



VAC - Caracterização

(a) Expectância, valor esperado

$$\mu = E(X) = \int \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

(b) Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\int \mathbf{f}(\mathbf{x}) (\mathbf{x} - \mu)^2 d\mathbf{x}} = \sqrt{\int \mathbf{x}^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \mu^2}$$



A função de distribuição

É a função $F(x)$ definida por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

A $F(x)$ é a integral da $f(x)$ até um ponto genérico “ x ”.



Cálculo da Probabilidade com a FDA

O uso da FDA é bastante prático no cálculo das probabilidades, pois não é necessário integrar, já que ela é uma função que fornece a Integral.



Usando a FDA, teremos sempre três casos possíveis:

$$P(X \leq x) = F(x)$$

$$P(X > x) = 1 - F(x)$$

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$



Modelos Probabilísticos Contínuos



■ **Uniforme**

■ **Exponencial**

■ **Normal**

■ **t (Student)**

■ **χ^2 (Qui-quadrado)**

■ **F (Snedekor)**



Uniforme



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Uma VAC X é uniforme no intervalo $[a; b]$ se assume todos os valores com igual probabilidade. Isto é, se $f(x)$ for:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$



A função de distribuição

A função $F(x)$ é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$$



Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \frac{a + b}{2}$$

Variância

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$



A Distribuição Normal



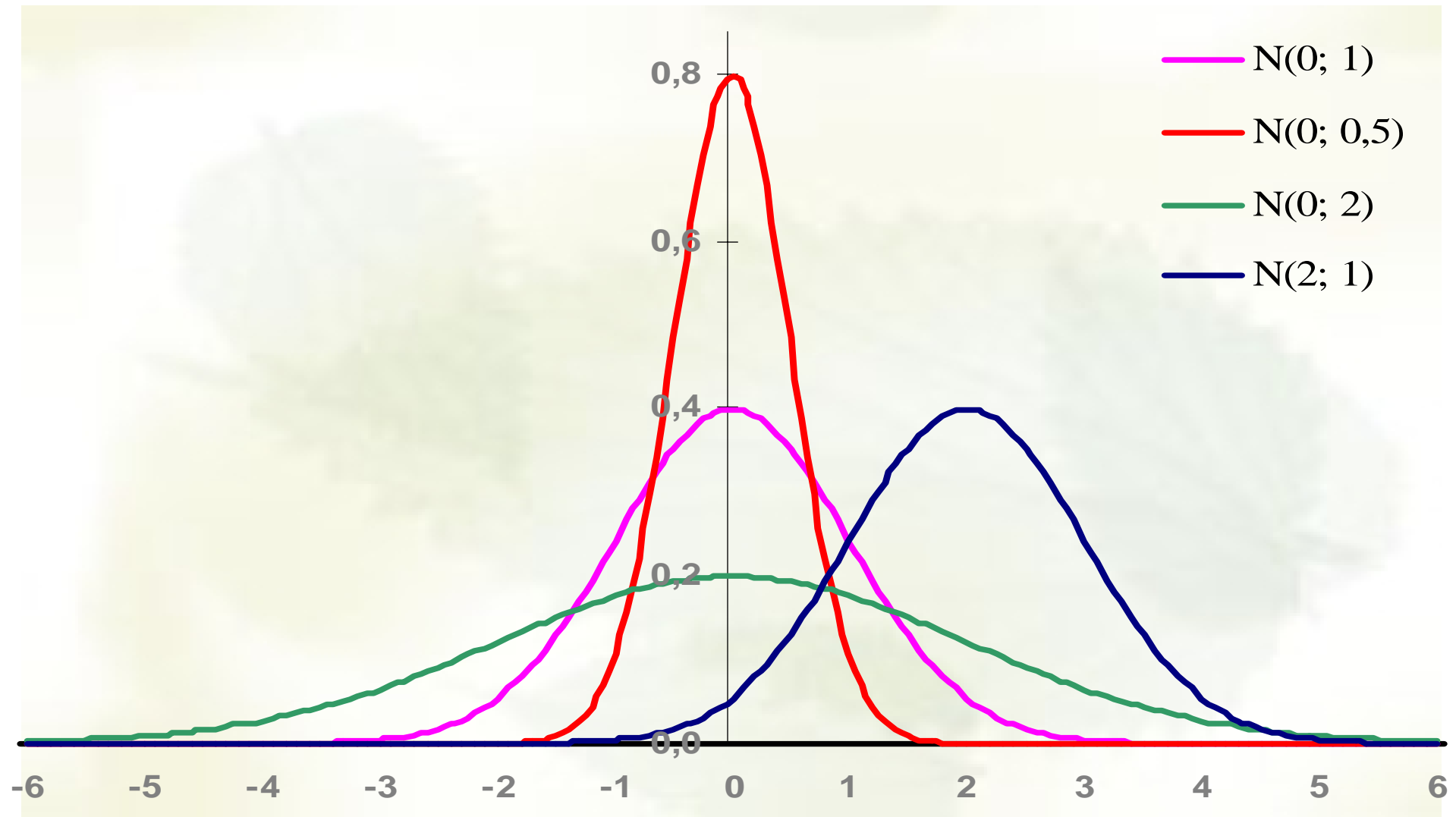
Uma variável aleatória X tem uma distribuição **normal** se sua fdp for do tipo:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma} . e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\mathbf{x} - \mu}{\sigma} \right)^2}, \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{R}$$

com $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$



Gráficos



Cálculo da Probabilidade

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right)^2} du = ?$$

A normal não é integrável através do TFC, isto é, não existe $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.



Solução do Problema

Utilizar integração numérica.
Como não é possível fazer isto com todas as curvas, escolheu-se uma para ser tabelada (integrada numericamente).



A normal padrão

A curva escolhida é a $N(0, 1)$, isto é, com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

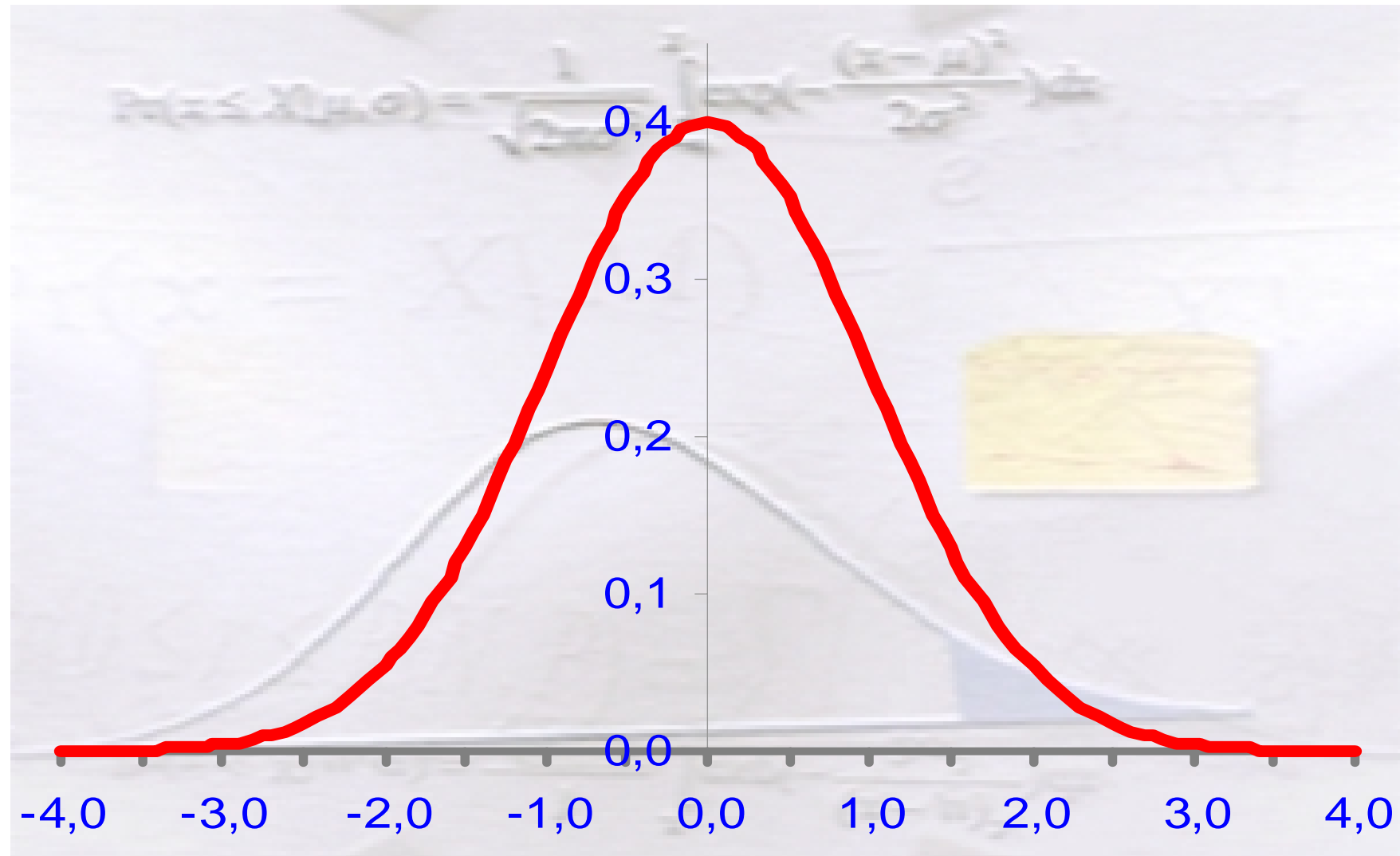
Se X é uma $N(\mu, \sigma)$, então:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Será uma $N(0; 1)$



Distribuição $N(0, 1)$



Uso da Planilha

$$P(Z \leq z) = \Phi(z) = \text{DIST.NORMP}(z)$$

$$P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - \Phi(z) = \Phi(-z) = \text{DIST.NORMP}(-z)$$

$$P(z_1 < Z < z_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \text{DIST.NORMP}(z_2) - \text{DIST.NORMP}(z_1)$$



A normal Qualquer

Se a normal não é a padrão
pode-se padronizar ou, então,
utilizar a função:

$$= \text{DIST.NORM}(x; \mu; \sigma; 1)$$




DIST.NORM

X	<input type="text"/>	= número
Média	<input type="text"/>	= número
Desv_padrão	<input type="text"/>	= número
Cumulativo	<input type="text"/>	= lógico

=

Retorna a distribuição cumulativa normal para um desvio padrão e média especificada.

X é o valor cuja distribuição você deseja obter.

 Resultado da fórmula =



A função Inversa



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Uma VAC tem distribuição normal de média 50 e desvio padrão 8. Determinar:

(a) $P(X \leq x) = 5\%$

(b) $P(X > x) = 1\%$

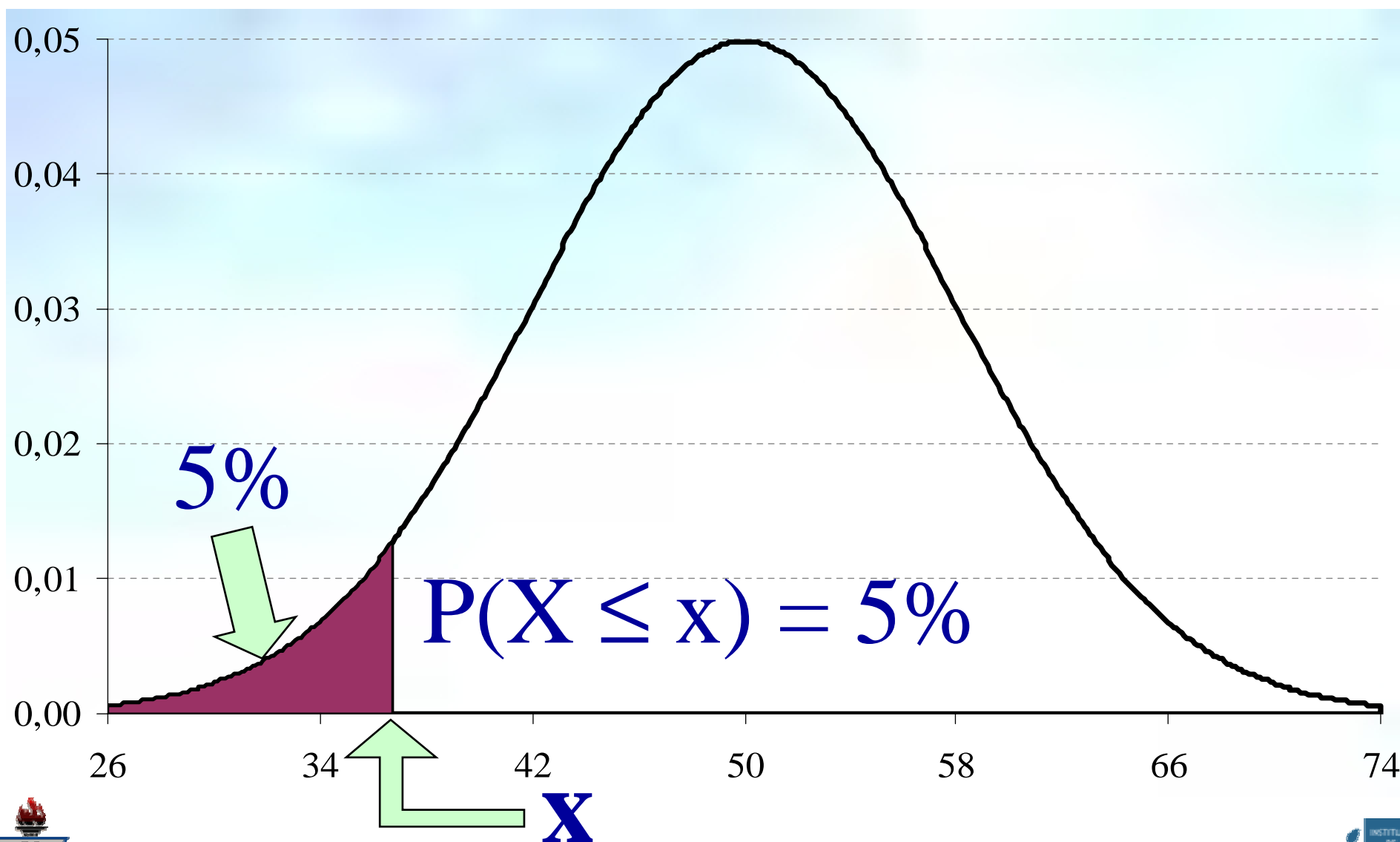


Para resolver este tipo de exercício é preciso utilizar a função inversa, isto é:

$$\begin{aligned} &= \text{INV.NORM}(5\%; 50; 8) = \\ &= 36,84 \end{aligned}$$



Graficamente, tem-se:




INV.NORM

Probabilidade	5%	= 0,05
Média	50	= 50
Desv_padrão	8	= 8

= 36,841176

Retorna o inverso da distribuição cumulativa normal para a média e o desvio padrão especificados.

Probabilidade é uma probabilidade correspondente à distribuição normal, um número entre 0 e 1 inclusive.

 Resultado da fórmula = 36,841176

OK Cancelar



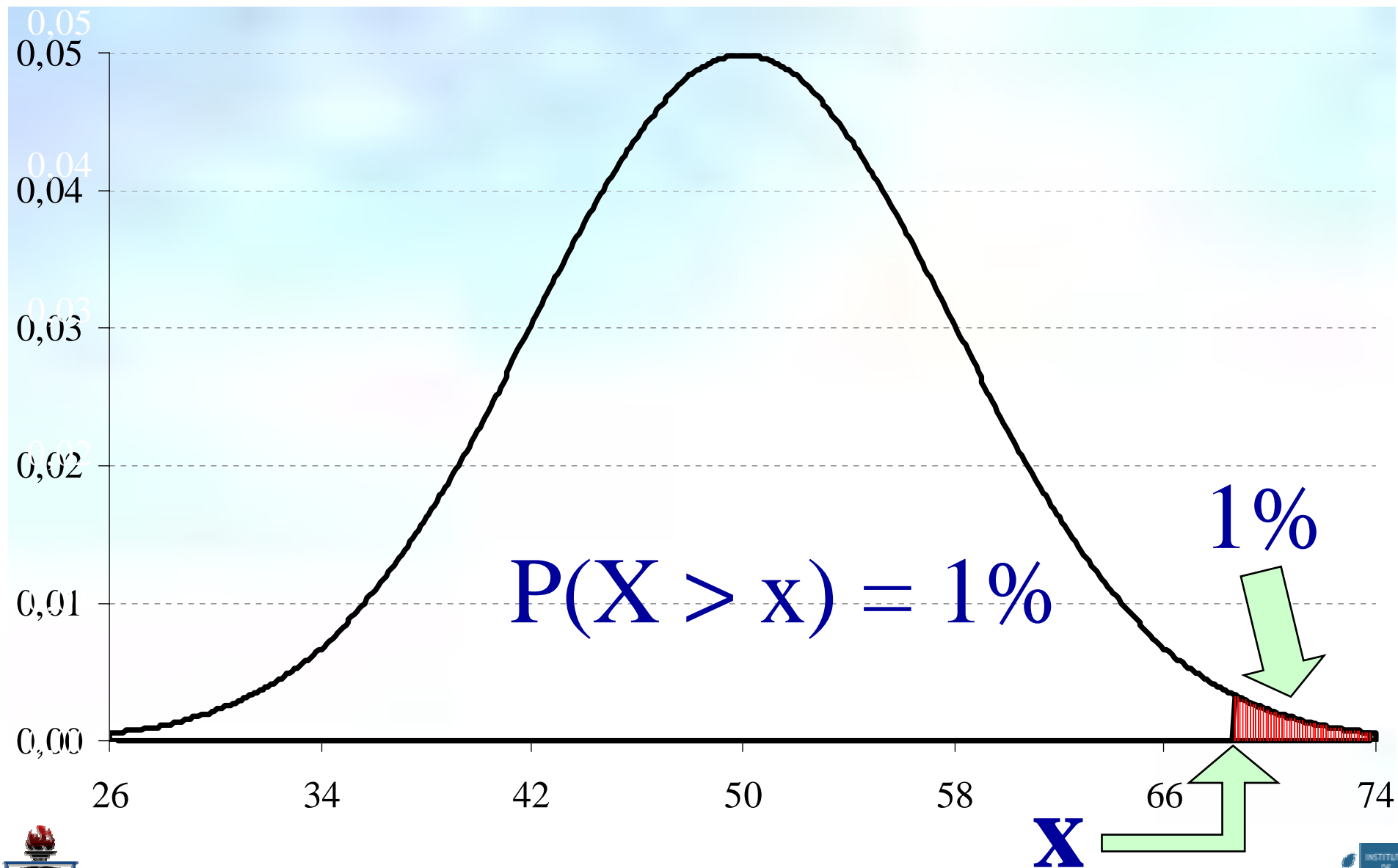
$$(b) \ P(X > x) = 1\%$$

Não esquecer que a planilha fornece a área à esquerda, então:

$$P(X > x) = 1\% \Leftrightarrow P(X \leq x) = 99\%$$

$$\Leftrightarrow \text{INV.NORM}(99\%; 50; 8) = 68,61$$





Outras Distribuições



Out Studies



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Uma variável aleatória X tem uma distribuição “t” ou de **Student** se sua fdp for do tipo:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}}{\sqrt{\pi v} \cdot \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}$$

para $x \in \mathbb{R}$



onde Γ é a função dada por

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

para $p > 0$

$$\Gamma(p) = (p-1) \Gamma(p-1)$$

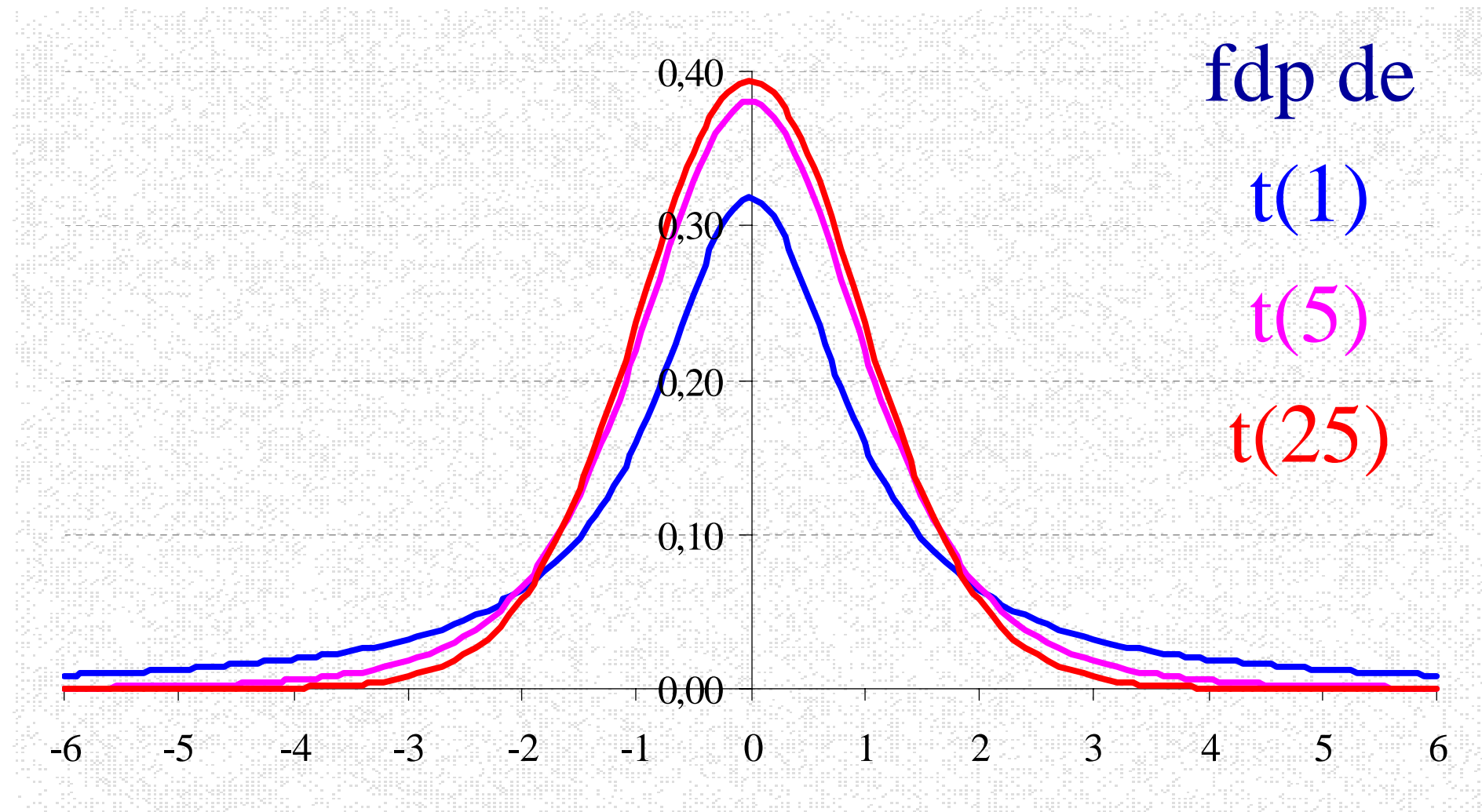
$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

se $n \in \mathbb{Z}$



Gráficos



Caracterização

Expectância ou Valor esperado

$$\mu = E(X) = 0$$

Variância

$$\text{Var}(X) = \frac{v}{v-2}$$

O valor v é denominado de
“Grau de liberdade”



Planilha

A planilha fornece uma função direta e uma inversa, em relação a área à direita (**unilateral**) ou a soma das caudas (**bilateral**), isto é, a tabela retorna um valor “t” tal que $P(T \geq t) = \alpha$ (**unilateral**) ou $P(|T| \geq t) = \alpha$ (**bilateral**).



Exemplo:

- (a) Dada uma distribuição t (de Student) com parâmetro g.l. = 30, determinar: $P(T \geq 2)$.
- (b) O valor “ t ” tal que $P(|T| \leq t) = 90\%$



(a)


DISTT

x	2	=	2
Graus_liberdade	30	=	30
Caudas	1	=	1

= 0,027312522

Retorna a distribuição t de Student.

Caudas especifica o número de caudas da distribuição a ser retornado:
distribuição uni-caudal = 1; distribuição bi-caudal = 2.

 Resultado da fórmula = 0,027312522

OK Cancelar

Então $P(T \geq 2) = 2,73\%$



(b)


INVT

Probabilidade	10%	=	0,1
Graus_liberdade	30	=	30

= 1,697260359

Retorna o inverso da distribuição t de Student.

Graus_liberdade é um inteiro positivo que indica número de graus de liberdade que caracteriza a distribuição.

 Resultado da fórmula = 1,697260359

OK Cancelar

Então O valor “t” tal que

$$P(|T| \leq t) = 90\% \text{ é } t = 1,697$$



Qui-Quadrado



Uma variável aleatória X tem uma distribuição **Qui-Quadrado** se sua fdp for do tipo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



Caracterização

Expectância ou Valor esperado

$$E(X) = \nu$$

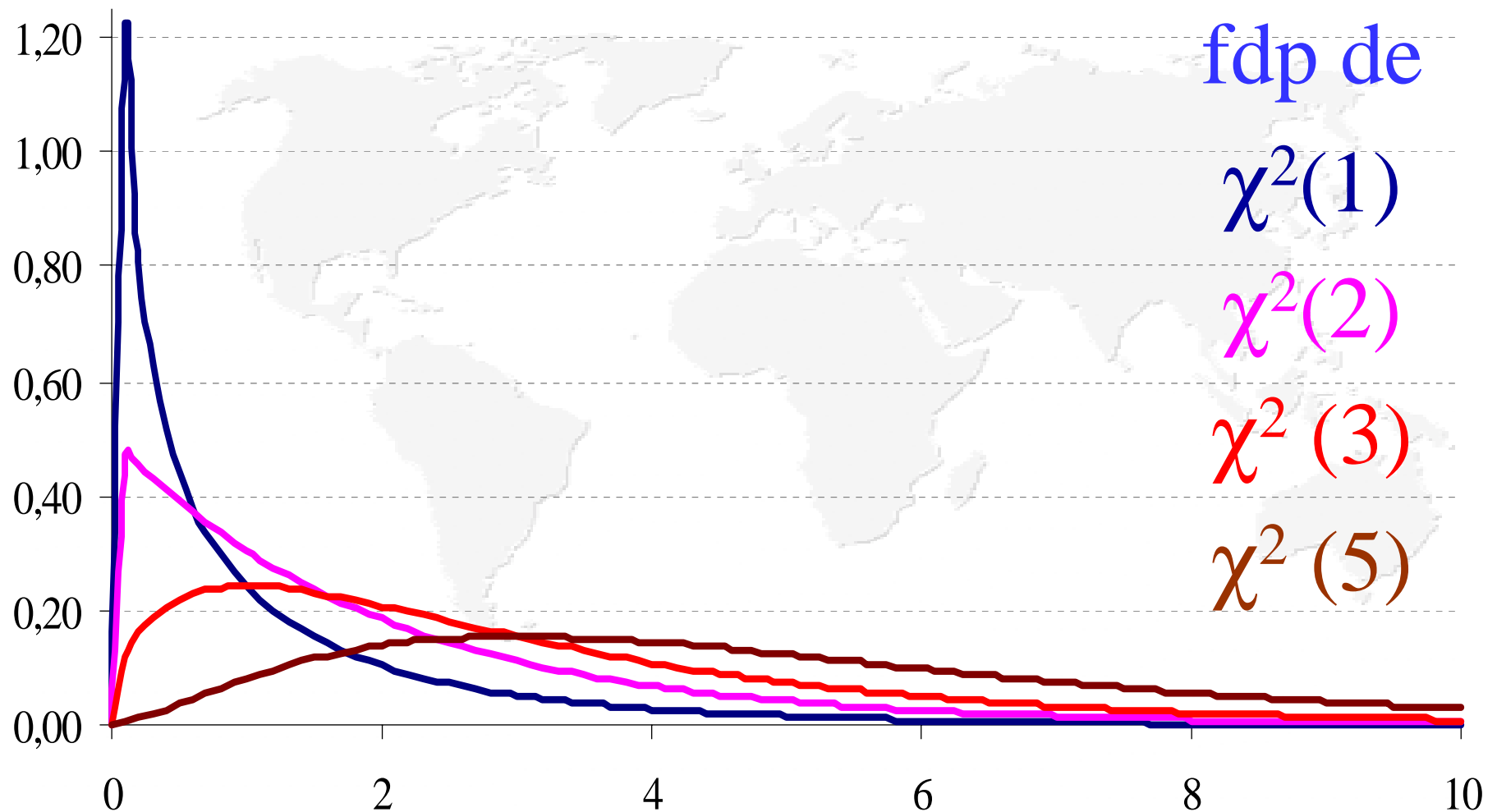
Variância

$$\text{Var}(X) = 2\nu$$

O valor ν é denominado de
“Grau de liberdade”



Gráficos



Planilha

A planilha fornece uma função direta e uma inversa, em relação a área à direita (**unilateral**) ou a soma das caudas (**bilateral**), isto é, a tabela retorna um valor “t” tal que $P(T \geq t) = \alpha$ (**unilateral**) ou $P(|T| \geq t) = \alpha$ (**bilateral**).



Exemplo:

- (a) Dada uma distribuição t (de Student) com parâmetro g.l. = 30, determinar: $P(T \geq 2)$.
- (b) O valor “ t ” tal que $P(|T| \leq t) = 90\%$



(a)


DISTT

x	2	=	2
Graus_liberdade	30	=	30
Caudas	1	=	1

= 0,027312522

Retorna a distribuição t de Student.

Caudas especifica o número de caudas da distribuição a ser retornado:
distribuição uni-caudal = 1; distribuição bi-caudal = 2.

 Resultado da fórmula = 0,027312522

OK Cancelar

Então $P(T \geq 2) = 2,73\%$



(b)


INVT

Probabilidade	10%	=	0,1
Graus_liberdade	30	=	30

= 1,697260359

Retorna o inverso da distribuição t de Student.

Graus_liberdade é um inteiro positivo que indica número de graus de liberdade que caracteriza a distribuição.

 Resultado da fórmula = 1,697260359

OK Cancelar

Então O valor “t” tal que

$$P(|T| \leq t) = 90\% \text{ é } t = 1,697$$



Planilha

A planilha fornece uma função direta (área á direita) e uma inversa, em relação a área à direita (**unilateral**). Isto é, a planilha retorna um valor “ α ” tal que $P(\chi^2 \geq c) = \alpha$ (**unilateral**), ou “ c ” tal que $P(\chi^2 \geq c) = \alpha$, no caso da função inversa.



Exemplo:

- (a) Dada uma distribuição Qui-Quadrado com parâmetro g.l. = 1, determinar: $P(\chi^2 \geq 1)$.
- (b) O valor de “c” tal que $P(\chi^2 \leq c) = 90\%$



(a)


DIST.QUI

X	1	=	1
Graus_liberdade	1	=	1

= 0,317310813

Retorna a probabilidade uni-caudal da distribuição qui-quadrada.

Graus_liberdade é o número de graus de liberdade, um número entre 1 e 10^10, excluindo 10^10.

 Resultado da fórmula = 0,317310813

OK Cancelar

$$\text{Então } P(\chi^2 \geq 1) = 31,73\%$$



(b)


INV.QUI

Probabilidade	10%	=	0,1
Graus_liberdade	1	=	1

= 2,705540585

Retorna o inverso da probabilidade uni-caudal da distribuição qui-quadrada.

Probabilidade é a probabilidade associada à distribuição qui-quadrada, um valor entre 0 e 1 inclusive.

 Resultado da fórmula = 2,705540585

OK Cancelar

Então, o valor de “c” tal que,
 $P(\chi^2 \leq c) = 90\%$ é $c = 2,71$.



Snedecor Fueco



Uma variável aleatória X tem uma distribuição “F” ou de **Snedecor** se sua fdp for do tipo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} (n+mx)^{-\frac{m+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



Caracterização

Expectância ou Valor esperado

$$E(X) = \frac{m}{m-2}$$

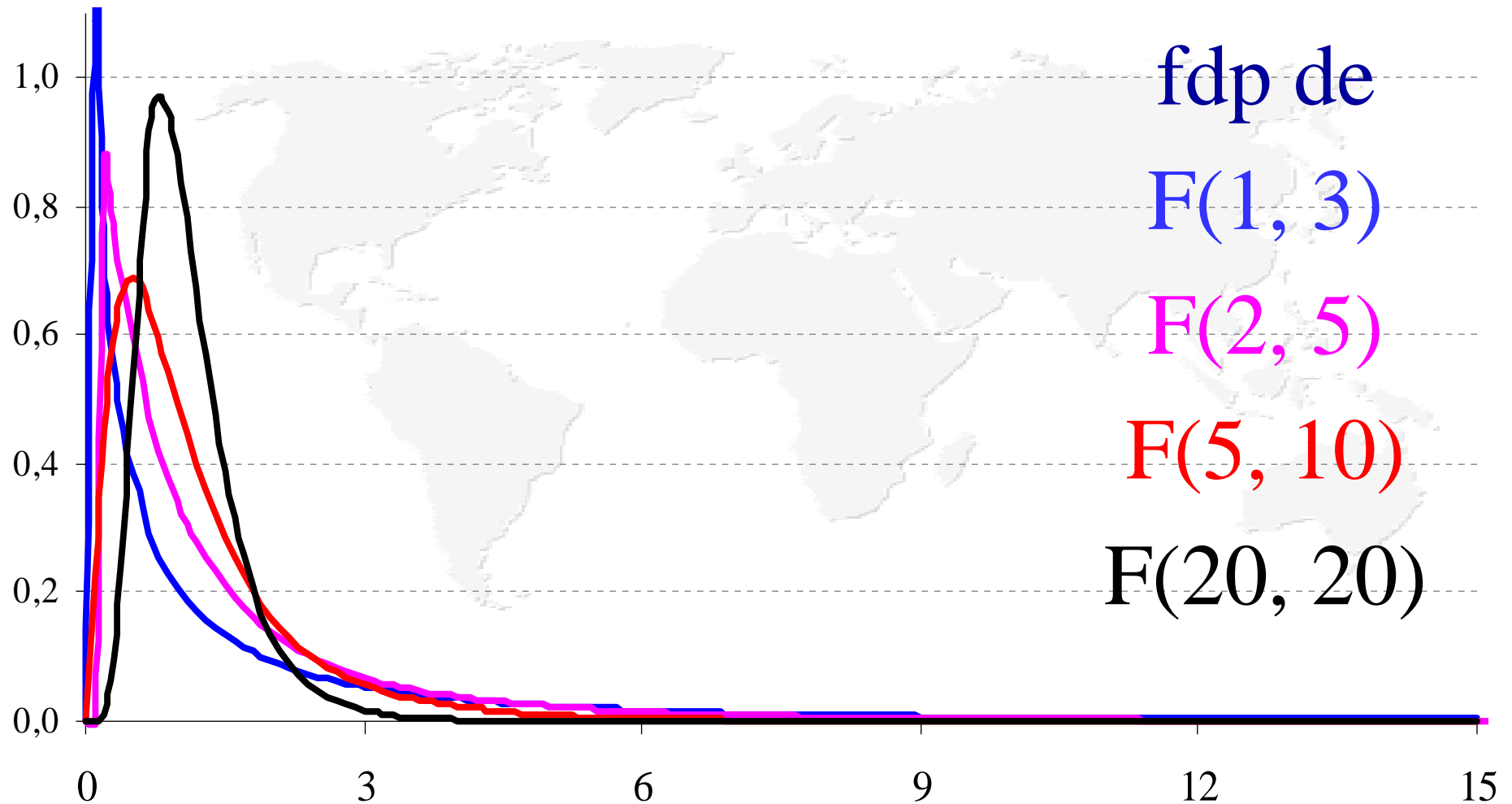
m é o grau de liberdade do numerador e **n** do denominador

Variância

$$\text{Var}(X) = \frac{2(m+n-2) m^2}{m(n-2)(n-4)}$$



Gráficos



Planilha

A planilha fornece uma função direta e uma inversa, em relação a área à direita (**unilateral**) ou a soma das caudas (**bilateral**), isto é, a tabela retorna um valor “t” tal que $P(T \geq t) = \alpha$ (**unilateral**) ou $P(|T| \geq t) = \alpha$ (**bilateral**).



Exemplo:

- (a) Dada uma distribuição t (de Student) com parâmetro g.l. = 30, determinar: $P(T \geq 2)$.
- (b) O valor “ t ” tal que $P(|T| \leq t) = 90\%$



(a)


DISTT

x	2	=	2
Graus_liberdade	30	=	30
Caudas	1	=	1

= 0,027312522

Retorna a distribuição t de Student.

Caudas especifica o número de caudas da distribuição a ser retornado:
distribuição uni-caudal = 1; distribuição bi-caudal = 2.

 Resultado da fórmula = 0,027312522

OK Cancelar

Então $P(T \geq 2) = 2,73\%$



(b)


INVT

Probabilidade	10%	=	0,1
Graus_liberdade	30	=	30

= 1,697260359

Retorna o inverso da distribuição t de Student.

Graus_liberdade é um inteiro positivo que indica número de graus de liberdade que caracteriza a distribuição.

 Resultado da fórmula = 1,697260359

OK Cancelar

Então O valor “t” tal que

$$P(|T| \leq t) = 90\% \text{ é } t = 1,697$$



Planilha

A planilha fornece uma função direta (área à direita) e uma inversa, em relação a área à direita (**unilateral**). Isto é, a planilha retorna um valor “ α ” tal que $P(\chi^2 \geq c) = \alpha$ (**unilateral**), ou “ c ” tal que $P(\chi^2 \geq c) = \alpha$, no caso da função inversa.



Exemplo:

- (a) Dada uma distribuição Qui-Quadrado com parâmetro g.l. = 1, determinar: $P(\chi^2 \geq 1)$.
- (b) O valor de “c” tal que $P(\chi^2 \leq c) = 90\%$



(a)


DIST.QUI

X	1	=	1
Graus_liberdade	1	=	1

= 0,317310813

Retorna a probabilidade uni-caudal da distribuição qui-quadrada.

Graus_liberdade é o número de graus de liberdade, um número entre 1 e 10^10, excluindo 10^10.

 Resultado da fórmula = 0,317310813

OK Cancelar

$$\text{Então } P(\chi^2 \geq 1) = 31,73\%$$



(b)


INV.QUI

Probabilidade	10%	=	0,1
Graus_liberdade	1	=	1

= 2,705540585

Retorna o inverso da probabilidade uni-caudal da distribuição qui-quadrada.

Probabilidade é a probabilidade associada à distribuição qui-quadrada, um valor entre 0 e 1 inclusive.

 Resultado da fórmula = 2,705540585

OK Cancelar

Então, o valor de “c” tal que,
 $P(\chi^2 \leq c) = 90\%$ é $c = 2,71$.



Planilha

O que é tabelado é a área à direita de cada curva (função direta), isto é, dado um certo valor de “x”, tem-se:

$P[F(m, n) \geq x] = \alpha$, ou dado uma área à direita α pode-se determinar “x” que satisfaz

$P[F(m, n) \geq x] = \alpha$ (função inversa).



Exemplo:

- (a) Dada uma distribuição F com parâmetros g.l. do numerador = 3 e g.l. do denominador igual a 5, determinar $P(F \geq 2,5)$.
- (b) O valor de “f” tal que $P(F \leq f) = 80\%$



(a)


DISTF

x	2,5	=	2,5
Graus_liberdade1	3	=	3
Graus_liberdade2	5	=	5

= 0,173927658

Retorna a distribuição de probabilidade F (grau de diversidade/variedade) para dois conjuntos de dados.

Graus_liberdade2 é o grau de liberdade do denominador, um número entre 1 e 10^{10} , excluindo 10^{10} .

 Resultado da fórmula = 0,173927658

OK Cancelar

Então $P(F \geq 2,5) = 17,39\%$



(b)


INVF

Probabilidade	20%	= 0,2
Graus_liberdade1	3	= 3
Graus_liberdade2	5	= 5

= 2,253017328

Retorna o inverso da distribuição de probabilidades F: se $p = \text{DISTR}(x, \dots)$, então $\text{INVF}(p, \dots) = x$.

Probabilidade é a probabilidade associada à distribuição cumulativa F, um número entre 0 e 1 inclusive.

 Resultado da fórmula = 2,253017328

OK Cancelar

Então, o valor de “f” tal que,
 $P(F \leq f) = 80\%$ é $f = 2,25$.



Desigualdade de Tchebycheff



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Desigualdade

de Tchebycheff, Tchebichev ou
Chebyshev, 1821 –1894.

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$$

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - 1/k^2$$



Desigualdade de Camp-Meidell

Se a distribuição for unimodal e simétrica, então:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 4/9k^2$$



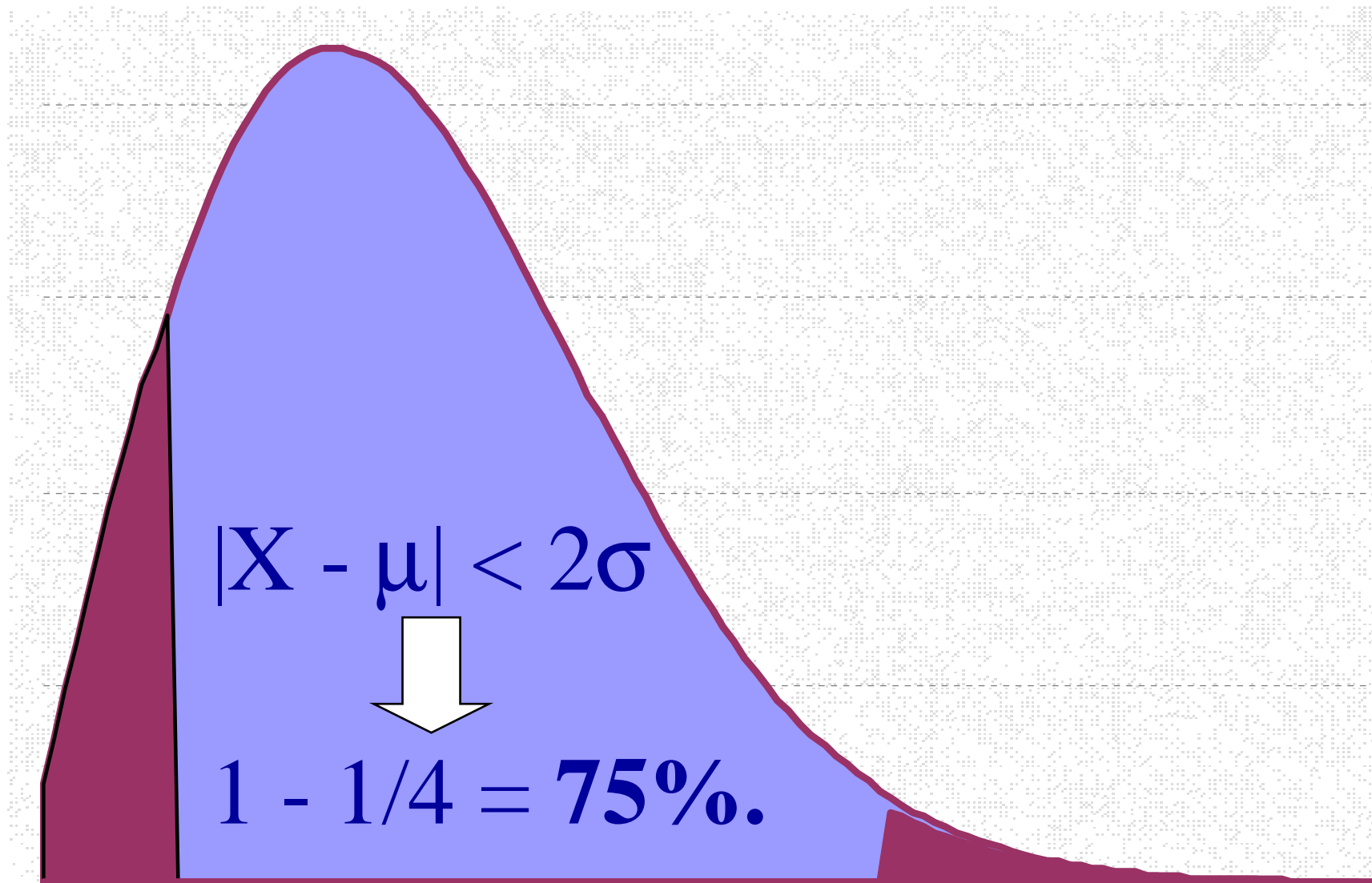
Estas desigualdades fornecem as probabilidades de que os valores de uma VAD/VAC estejam em um intervalo simétrico em torno da média de amplitude igual a $2k$ desvios padrões.



Assim se $k = 2$, por exemplo, a desigualdade de **Tchebycheff** estabelece que o percentual de valores da variável aleatória que está compreendida no intervalo $\mu \pm 2\sigma$ é de pelo menos $1 - 1/4 = \mathbf{75\%}$.



Graficamente



Na normal este percentual vale exatamente 95,44%. Mas como a normal é simétrica e unimodal, neste caso, um resultado mais próximo é dado pela desigualdade de **Camp-Meidell**, isto é:

$$1 - 4/(9k^2) = 1 - (1/9) = 88,89\%.$$

