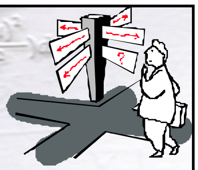
Testes de Hipóteses 3



Prof. Lorí Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
http://www.ufrgs.br/~viali/

Testes para duas Amostras

Amostras

- Dependentes
  - Teste "t" para amostras emparelhadas
- Independentes
  - Variâncias Conhecidas
    - Teste "z"
  - Variâncias Desconhecidas
    - Supostas iguais
    - Supostas diferentes

(a) Independentes

Diferença entre duas médias

$$(\mu_1 - \mu_2 = \Delta)$$

Diferença entre duas proporções

$$(\pi_1 - \pi_2 = \Delta)$$

Igualdade entre duas variâncias

$$(\sigma_X^2 = \sigma_Y^2)$$

Teste para a diferença entre duas médias

(a) variâncias conhecidas

Neste caso a variável teste é:

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_{\bar{X}-\bar{Y}}}{\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$Z > z_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$Z < z_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|Z| > z_c$

(teste bilateral/bicaudal).

Onde z_c é tal que:

$\Phi(z_c) = 1 - \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$\Phi(z_c) = \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\Phi(z_c) = \alpha/2$ ou $\Phi(z_c) = 1 - \alpha/2$

(teste bilateral/bicaudal).

Exemplo

Uma grande empresa quer comprar peças de dois fornecedores diferentes. O fornecedor "A" alega que a durabilidade é de 1000 horas com desvio de 120 horas, enquanto que o fornecedor "B" diz que a duração média é de 1050 horas com desvio padrão de **140** horas.

Para testar se a durabilidade de "B" é realmente maior, duas amostras de tamanho **n = m = 64**, de cada um dos fornecedores, foram obtidas. A duração média da amostra A foi de **995** horas e a B foi de **1025**. Qual a conclusão a 5% de significância?

Solução:

Hipóteses:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_0: $\mu_1 < \mu_2$

Dados:

$n = m = 64$

$\sigma_1 = 120$; $\sigma_2 = 140$

$\bar{X} = 995$ e $\bar{Y} = 1025$

$\alpha = 5\%$

Trata-se de um teste unilateral à esquerda com σ_1 e σ_2 conhecidos.

A variável teste é:

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_{\bar{X}-\bar{Y}}}{\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{m}}}$$

Então:

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{m}}} = \frac{995 - 1025 - 0}{\sqrt{\dfrac{120^2}{64} + \dfrac{140^2}{64}}} = -1{,}30$$

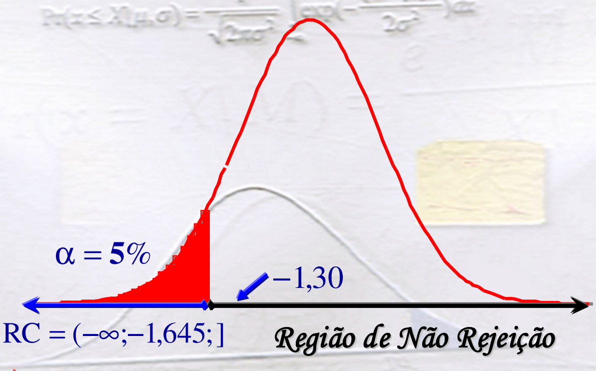
Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

O valor crítico z_c é tal que: $\Phi(z_c) = \alpha = 0{,}05 = 5\%$. Então $z_c = \Phi^{-1}(0{,}05) = -1{,}645$. Assim $RC = (-\infty; -1{,}645]$

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $z = -1{,}30 \notin RC$ ou $-1{,}30 > -1{,}645$, **Aceito H_0**, isto é, a 5% de significância **não** se pode afirmar que a média de *A* é menor que a média de *B*

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

OPÇÃO:

Trabalhar com a significância do resultado obtido (-1,30), isto é, o valor-p. Para isto, deve-se calcular $P(Z < -1{,}30)$, isto é, $p = P(Z < -1{,}30) = \Phi(-1{,}30) = 9{,}68\%$.

Como a significância do resultado (9,68%) é maior que a significância do teste (5%) não é possível rejeitar a hipótese nula.

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

(b) variâncias desconhecidas

(i) supostamente iguais

Neste caso a variável teste é:

$$t_\upsilon = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_{\bar{X}-\bar{Y}}}{\hat{\sigma}_{\bar{X}-\bar{Y}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{s\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}}}$$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Onde s é dado por:

$$s=\sqrt{\frac{(n-1)s_X^2+(m-1)s_Y^2}{n+m-2}}$$

e v é dado por: n + m - 2

Exemplo

Um relatório da defesa do consumidor mostrou que um teste com **oito** pneus da marca A apresentaram uma vida média de **37500 km** com um desvio padrão de **3500 km** e que **doze** de uma marca concorrente B, testados nas mesmas condições, tiveram uma durabilidade média de **41400 km** com variabilidade de **4200 km**.

Supondo que as **variâncias populacionais sejam as mesmas** e admitindo uma **significância de 5%**, verifique se é possível afirmar que as duas marcas **diferem** quanto a durabilidade média. E se a significância fosse **1%** qual seria a conclusão?

Solução:

Hipóteses:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_0: $\mu_1 \neq \mu_2$

Dados:

$n = 8$; $m = 12$

$s_A = 3500$; $s_B = 4200$

$\overline{X} = 37500$; $\overline{Y} = 41400$

$\alpha = 5\%$; $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$

Trata-se de um teste "t" bilateral com σ_1 e σ_2 supostamente iguais.

A variável teste é:

$$t_{n+m-2}=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\mu_{\overline{X}-\overline{Y}}}{\hat{\sigma}_{\overline{X}-\overline{Y}}}=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\Delta}{s.\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}$$

Onde:

$$s=\sqrt{\frac{(n-1)S_A^2+(m-1)S_B^2}{n+m-2}}$$

$$s = \sqrt{\frac{7.3700^2 + 11.4200^2}{8+12-2}} = 4012{,}9651$$

Então:

$$t_{18} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta}{S.\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = \frac{37500 - 41300 - 0}{4012{,}9651\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{12}}} = $$

$$= -2{,}129$$

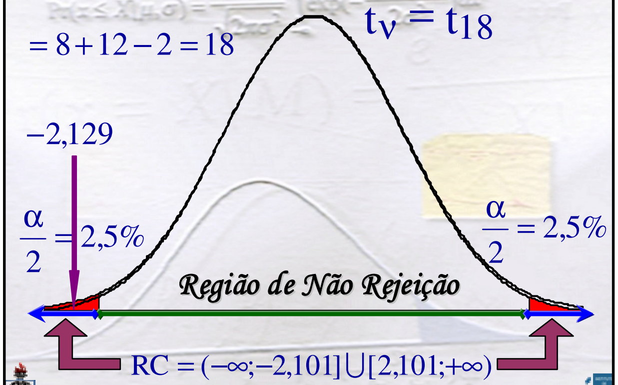
O valor crítico t_c *é tal que:* $P(|T_{18}| > t_c) = = \alpha = 0{,}05 = 5\%$. *Então* $t_c = T^{-1}(0{,}9750) =$ *2,101. Assim* $\mathcal{RC} = (-\infty; -2{,}101] \cup [2{,}101; +\infty)$

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $t = -2{,}129 \in \mathcal{RC}$ *ou* $-2{,}129 < -2{,}101$, *Rejeito* H_0, *isto é, a 5% de significância posso afirmar que a vida média das duas marcas difere.*

$\nu = n + m - 2 =$

$= 8 + 12 - 2 = 18$



O valor crítico t_c *é tal que:* $P(|T_{18}| > t_c) = = \alpha = 0{,}01 = 1\%$. *Então* $t_c = T^{-1}(0{,}9950) =$ *= 2,878.*

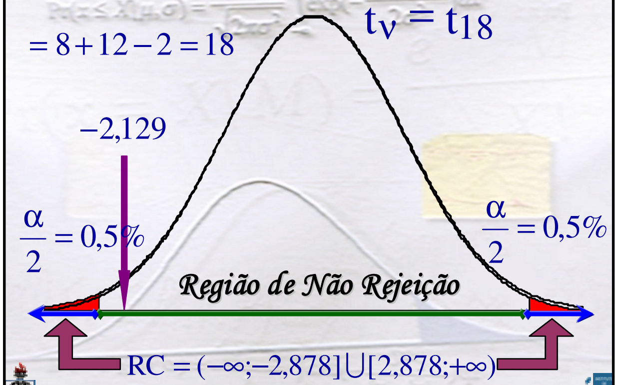
Assim $\mathcal{RC} = (-\infty; -2{,}878] \cup [2{,}878; +\infty)$

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $t = -2{,}129 \notin \mathcal{RC}$ *ou* $-2{,}129 > -2{,}878$, ***Aceito*** H_0, *isto é, a 1% de significância* ***não*** *posso afirmar que a vida média das duas marcas difere.*

$\nu = n + m - 2 =$

$= 8 + 12 - 2 = 18$



(b) variâncias desconhecidas

(ii) supostamente desiguais

Neste caso a variável teste é:

$$t_\upsilon = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \mu_{\overline{X}-\overline{Y}}}{\hat{\sigma}_{\overline{X}-\overline{Y}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m}}}$$

Onde υ é dado por:

$$\upsilon = \frac{\left(\dfrac{S_X^2}{n} + \dfrac{S_Y^2}{m}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{S_X^2}{n}\right)^2}{n-1} + \dfrac{\left(\dfrac{S_Y^2}{m}\right)^2}{m-1}}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$t_v > t_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$t_v < t_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|t_v| > t_c$

(teste bilateral/bicaudal).

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Onde t_c é tal que:

$P(t_v < t_c) = 1 - \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$P(t_v < t_c) = \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$P(t_v < t_c) = \alpha/2$ ou $P(t_v > t_c) = \alpha/2$

(teste bilateral/bicaudal).

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplo

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Uma empresa fabrica transistores do tipo A e do tipo B. A marca A, mais cara, é supostamente **pelo menos 60** horas mais durável do que a marca B. Um usuário quer saber se vale a pena pagar mais pela marca A e resolve testar se, de fato, ela é mais durável.

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Testa **20** itens de **A** encontrando uma vida média de **1000 horas** com desvio de **60 horas**, enquanto que **20** itens da marca **B** apresentam uma vida média de **910 horas** com desvio de **40 horas**. Qual a conclusão a **5%** de significância?

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Solução:

Hipóteses:

$\mathcal{H}_0$: $\mu_1 - \mu_2 = 60$

$\mathcal{H}_0$: $\mu_1 - \mu_2 > 60$

Dados:

$n = m = 20$

$s_A = 60$; $s_B = 40$

$\overline{X} = 1000$; $\overline{Y} = 910$

$\alpha = 5\%$; $\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$

Trata-se de um teste "t" unilateral à direita com σ_1 e σ_2 supostamente desiguais.

A variável teste é:

$$t_\upsilon = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \mu_{\overline{X}-\overline{Y}}}{\hat{\sigma}_{\overline{X}-\overline{Y}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m}}}$$

Onde:

$$\upsilon = \frac{\left(\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}\right)^2}{\frac{(S_X^2/n)^2}{n-1} + \frac{(S_Y^2/m)^2}{m-1}}$$

$$t_\upsilon = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m}}} = \frac{1000 - 910 - 60}{\sqrt{\frac{60^2}{20} + \frac{40^2}{20}}} = 1{,}861$$

E:

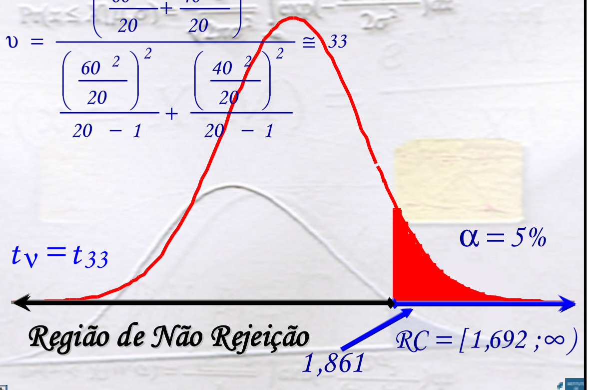
$$\upsilon = \frac{\left(\frac{60^2}{20} + \frac{40^2}{20}\right)^2}{\frac{\left(\frac{60^2}{20}\right)^2}{20-1} + \frac{\left(\frac{40^2}{20}\right)^2}{20-1}} \cong 33$$

O valor crítico t_c é tal que: $P(T_{33} > t_c) = $
$= \alpha = 0{,}05 = 5\%$. Então $t_c = T^{-1}(0{,}95) = 1{,}692$.
Assim $\mathcal{RC} = [\,1{,}692; +\infty)$

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $t = 1{,}861 \in \mathcal{RC}$ ou $1{,}861 > 1{,}692$, **Rejeito $\mathcal{H}_0$**, isto é, a 5% de significância posso afirmar que a vida média da marca é pelo menos 60 horas maior que a marca B.

$$\upsilon = \frac{\left(\frac{60^2}{20} + \frac{40^2}{20}\right)^2}{\frac{\left(\frac{60^2}{20}\right)^2}{20-1} + \frac{\left(\frac{40^2}{20}\right)^2}{20-1}} \cong 33$$



Teste para a diferença entre duas proporções

$\mathcal{H}_0: \pi_1 - \pi_2 = \Delta$

$\mathcal{H}_1: \pi_1 - \pi_2 > \Delta$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$\pi_1 - \pi_2 < \Delta$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\pi_1 - \pi_2 \neq \Delta$

(teste bilateral/bicaudal).

Neste caso a variável teste é:

$$Z = \frac{P_1 - P_2 - \mu_{P_1 - P_2}}{\hat{\sigma}_{P_1 - P_2}} =$$

$$= \frac{P_1 - P_2 - \Delta}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n} + \frac{P_2(1-P_2)}{m}}}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$Z > z_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$Z < z_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|Z| > z_c$

(teste bilateral/bicaudal).

Onde z_c é tal que:

$\Phi(z_c) = 1 - \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$\Phi(z_c) = \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\Phi(z_c) = \alpha/2$ ou $\Phi(z_c) = 1 - \alpha/2$

(teste bilateral/bicaudal).

Exemplo

A reitoria de uma grande universidade entrevistou 600 alunos, 350 mulheres e 250 homens, para colher a opinião sobre a troca do sistema de avaliação da universidade. Da amostra 140 mulheres e 115 homens estavam a favor. Teste a 5% se existe diferença significativa de opinião entre homens e mulheres.

Solução:

Hipóteses:

$H_0: \pi_1 = \pi_2$

$H_0: \pi_1 \neq \pi_2$

Dados:

$n = 350$; $m = 250$

$p_1 = 140/350 = 40\%$

$p_2 = 115/250 = 46\%$

$\alpha = 5\%$;

Trata-se de um teste bilateral para a proporção.

A variável teste é:

$$Z = \frac{P_1 - P_2 - \Delta}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n} + \frac{P_2(1-P_2)}{m}}} =$$

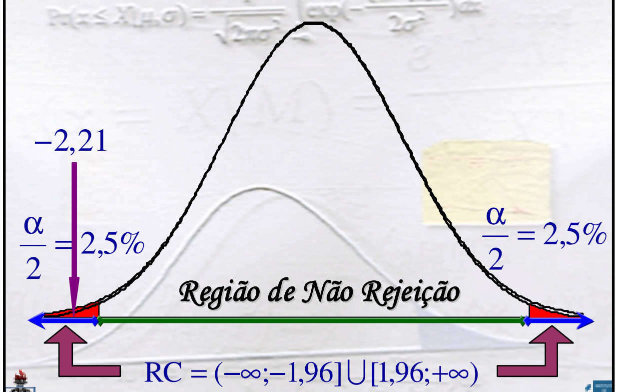
$$= \frac{0{,}40 - 0{,}46 - 0}{\sqrt{\frac{0{,}40(1-0{,}40)}{350} + \frac{0{,}46(1-0{,}46)}{250}}} =$$

$$= \frac{-0{,}06}{0{,}02718} = -2{,}21$$

O valor crítico z_c é tal que: $P(|Z| > z_c) = \alpha = 0{,}05 = 5\%$. Então $z_c = \Phi^{-1}(0{,}05) = -1{,}96$. Assim $RC = (-\infty; -1{,}96] \cup [1{,}96; +\infty)$

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $z = -2{,}21 \in RC$ ou $-2{,}21 < -1{,}96$, **Rejeito H_0**, isto é, a 5% de significância posso afirmar que as opiniões diferem entre homens e mulheres.



Teste para a igualdade entre duas variâncias

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ (teste unilateral/unicaudal à direita)

$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ (teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (teste bilateral/bicaudal).

Neste caso a variável teste é:

$$F_{n-1,\, m-1} = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$F_{n-1, m-1} > f_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$F_{n-1, m-1} < f_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$F_{n-1, m-1} > f_c$ ou $F_{n-1, m-1} < f_c$

(teste bilateral/bicaudal).

Onde $F_{n-1;m-1}$ é tal que:

$P(F_{n-1,\, m-1} > F_c) = \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$P(F_{n-1,\, m-1} < F_c) = \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$P(F_{n-1,\, m-1} > F_c) = \alpha/2$ ou $P(F_{n-1,\, m-1} < F_c) = \alpha/2$

(teste bilateral/bicaudal).

Exemplo

O desvio padrão de uma dimensão particular de um componente de metal é satisfatório para a montagem do componente. Um novo fornecedor está sendo considerado e ele será preferível se o desvio padrão é menor do que o do atual fornecedor. Uma amostra de 100 itens de cada fornecedor é obtido.

Fornecedor atual: $s_1^2 = 0{,}0058$

Novo fornecedor: $s_2^2 = 0{,}0041$

A empresa deve trocar de fornecedor se for considerado uma significância de 5%?

Solução:

Hipóteses:

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_0: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Dados:

$n = m = 100$

$s_1^2 = 0{,}0058$

$s_2^2 = 0{,}0041$

$\alpha = 5\%$

Trata-se de um teste unilateral à direita para a igualdade de variâncias.

A variável teste é:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Que apresenta uma distribuição F com "n – 1" g.l. no numerador e "m – 1" g.l. no denominador.

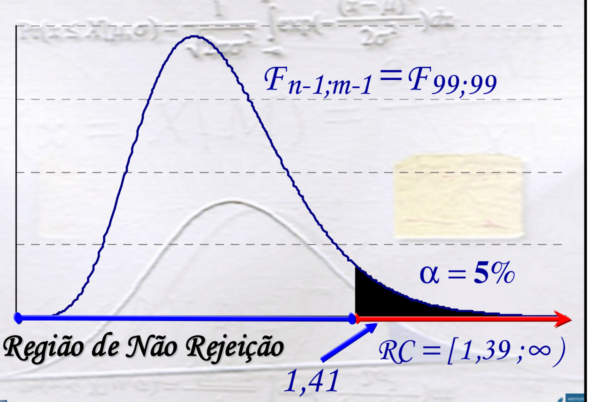
Então:

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0{,}0058}{0{,}0041} = 1{,}41$$

O valor crítico f_c é tal que: $P(|F| > f_c) = \alpha = 0{,}05 = 5\%$. Então $f_c = F^{-1}(0{,}05) = 1{,}39$. Assim $RC = [1{,}39; +\infty)$

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $f = 1{,}41 \in RC$ ou $1{,}41 < 1{,}39$, **Rejeito H_0**, isto é, a 5% de significância posso afirmar que a variância do fornecedor atual é maior do que a do novo fornecedor.



(6) Dependentes (Emparelhadas)

Teste para a média

$H_0: \mu_D = \Delta$

$H_1: \mu_D > \Delta$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$\mu_D < \Delta$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\mu_D \neq \Delta$

(teste bilateral/bicaudal).

Neste caso a variável teste é:

$$t_\upsilon = \frac{\overline{D} - \mu_D}{\hat{\sigma}_{\overline{D}}} = \frac{\overline{D} - \Delta}{S_D / \sqrt{n}}$$

Onde:

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum(d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - n\bar{d}^2}{n-1}}$$

e v é dado por: $n - 1 = m - 1$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$t_{n-1} > t_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$t_{n-1} < t_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|t_{n-1}| > t_c$

(teste bilateral/bicaudal).

Onde t_c é tal que:

$P(t_{n-1} < t_c) = 1 - \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$P(t_{n-1} < t_c) = \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$P(t_{n-1} < t_c) = \alpha/2$ ou $P(t_{n-1} > t_c) = \alpha/2$

(teste bilateral/bicaudal)

Exemplo

Um laboratório possui dois equipamentos de precisão. O diretor suspeita que existe uma pequena diferença de calibração entre os dois (ele não sabe em qual deles) de modo que um tende a dar leituras um pouco maiores do que o outro.

Ele propõe testar os dois aparelhos através da leitura de 10 medidas (tabela na próxima lâmina) em cada um dos aparelhos. Faça o teste adequado a uma significância de 5%.

Aparelho A	Aparelho B
12,2	12,5
12,1	12,2
10,55	10,57
13,33	13,32
11,42	11,47
10,30	10,30
12,32	12,36
13,27	13,29
11,93	11,91
12,50	12,61

Solução:

Hipóteses:

H_0: $\mu_D = 0$

H_1: $\mu_D \neq 0$

Dados:

$n = m = 10$

$\alpha = 5\%$

Uma vez que as amostras não são independentes, trata-se do teste "t" para amostras emparelhadas.

A variável teste é:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}} = \frac{\bar{D} - \Delta}{s_D / \sqrt{n}}$$

Onde:

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - n\bar{d}^2}{n-1}}$$

A	B	d_i	d_i^2
12,2	12,5	0,30	0,0900
12,1	12,2	0,10	0,0100
10,55	10,57	0,02	0,0004
13,33	13,31	-0,02	0,0004
11,42	11,44	0,02	0,0004
10,30	10,30	0,00	0,0000
12,32	12,36	0,04	0,0016
13,27	13,29	0,02	0,0004
11,93	11,90	-0,03	0,0009
12,50	12,61	0,11	0,0121
--	--	0,56	0,1162

Tem-se: $\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{0,56}{10} = 0,0560$

$$s = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - n\bar{d}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,1162 - 10.0,0560^2}{10-1}} = 0,0971$$

A variável teste é:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{D} - \Delta}{s_D / \sqrt{n}} = \frac{0,056 - 0}{0,0971 / \sqrt{10}} = \frac{0,056.\sqrt{10}}{0,0971} = 1,824$$

O valor crítico z_c é tal que: $P(|T| > t_c) = \alpha$ = 0,05 = 5%. Então t_c = $T^{-1}(0,05)$ = = 2,262. Assim RC = [2,262; +∞]

DECISÃO e CONCLUSÃO:

*Como t = 1,824 ∉ RC ou 1,824 < 2,262, **Aceito H_0**, isto é, a 5% de significância **não** se pode afirmar que as leituras são diferentes.*