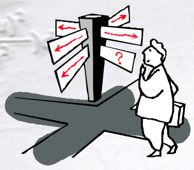
Testes de Hipóteses

2



Prof. Lorí Viali, Dr.

http://www.mat.ufrgs.br/~viali/

viali@mat.ufrgs.br

Testes para

- Uma amostra
  - Média
  - Proporção
  - Variância
- Duas amostras
  - Dependentes
    - Diferença de médias
  - Independentes
    - Diferença de médias
    - Diferença de proporções
    - Igualdade de variâncias

Testes para uma Amostra

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

---

Média (μ)

Proporção (π)

Variância (σ^2)

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

---

Teste para a média

H_0: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu > \mu_0$ (teste unilateral/unicaudal à direita)

$\mu < \mu_0$ (teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\mu \neq \mu_0$ (teste bilateral/bicaudal).

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

---

(a) variância conhecida

Neste caso a variável teste é:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$Z > z_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$Z < z_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|Z| > z_c$

(teste bilateral/bicaudal).

Onde z_c é tal que:

$\Phi(z_c) = 1 - \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$\Phi(z_c) = \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\Phi(z_c) = \alpha/2$ ou $\Phi(z_c) = 1 - \alpha/2$

(teste bilateral/bicaudal).

Exemplo

A experiência passada mostrou que as notas de Probabilidade e Estatística, estão normalmente distribuídas com média μ = 5,5 e desvio padrão σ = 2,0. Uma turma de n = 64 alunos deste semestre apresentou uma média de 5,9. Teste a hipótese de este resultado mostra uma melhora de rendimento a uma significância de 5%.

Solução:

Hipóteses:

H_0: $\mu = 5{,}5$

H_1: $\mu > 5{,}5$

Dados:

$\sigma = 2{,}0$ $\quad n = 64$

$\bar{x} = 5{,}9$ $\quad \alpha = 5\%$

Trata-se de um teste unilateral à direita com σ conhecido.

A variável teste é:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

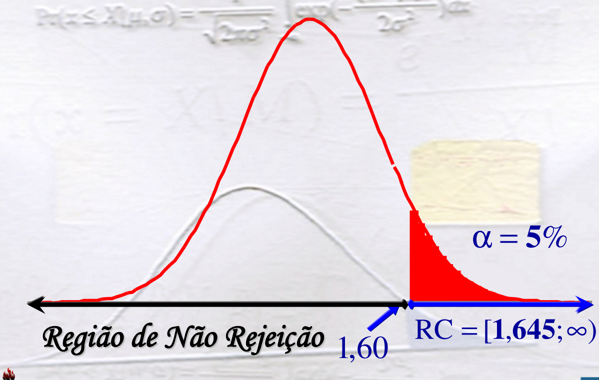
Então:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{5{,}9 - 5{,}5}{2{,}0/\sqrt{64}} = \frac{0{,}4}{2{,}0/8} = \frac{3{,}2}{2{,}0} = 1{,}60$$

O valor crítico z_c é tal que: $\Phi(z_c) = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 95\%$. Então $z_c = \Phi^{-1}(0{,}95) = 1{,}645$. Assim $RC = [1{,}645; \infty)$

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $z = 1{,}60 \notin RC$ ou $1{,}60 < 1{,}645$, **Aceito H_0**, isto é, a 5% de significância **não** se pode afirmar que os resultados desta turma são melhores.



Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

OPÇÃO:

Trabalhar com a significância do resultado obtido (1,60), isto é, o valor-p. Para isto, deve-se calcular $P(Z > 1{,}60)$, isto é, $p = P(Z > 1{,}60) = 1 - \Phi(1{,}60) = \Phi(-1{,}60) = 5{,}48\%$.

Como a significância do resultado (5,48%) é maior que a significância do teste (5%) não é possível rejeitar a hipótese nula.

Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

(b) variância desconhecida

Neste caso a variável teste é:

$$t_{n-1} = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\hat{\sigma}_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$t_{n-1} > t_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$t_{n-1} < t_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|t_{n-1}| > t_c$

(teste bilateral/bicaudal).

Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Onde t_c é tal que:

$P(t < t_c) = 1 - \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$P(t < t_c) = \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$P(t < t_c) = \alpha/2$ ou $P(t > t_c) = \alpha/2$

(teste bilateral/bicaudal).

Prof. Lori Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplo

Suponha que a sua empresa comprou um lote de lâmpadas. Você precisa testar, a 5% de significância, a afirmação do fabricante de que a duração média das lâmpadas é maior que 800 horas.

Para isto você usa uma amostra de 36 lâmpadas e encontra uma média 820 horas com desvio de 70 horas. Isto confirma a afirmação do fabricante?

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Solução:

Hipóteses:

H_0: μ = 800 horas

H_1: μ > 800 horas

Dados:

$n = 36$

$\bar{x} = 820$ horas

$s = 70$ horas

$\alpha = 5\%$

Trata-se de um teste unilateral à direita com σ desconhecido.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A variável teste é:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

Então:

$$t_{35} = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{820 - 800}{70/\sqrt{36}} = \frac{20}{70/6} = \frac{120}{70} = 1{,}714$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

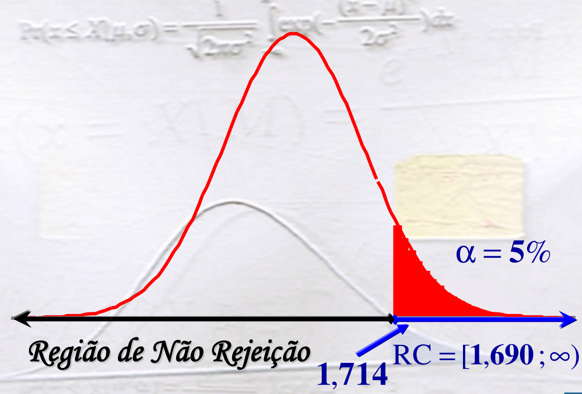
O valor crítico t_c é tal que: $P(T > t_c) = 1 - \alpha$

Então t_c = 1,690. Assim RC = [1,690; ∞)

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como t = 1,714 ∈ RC ou 1,714 > 1,690, Rejeito H_0, isto é, a 5% de significância, pode-se afirmar que a duração média das lâmpadas é superior a 800 horas.

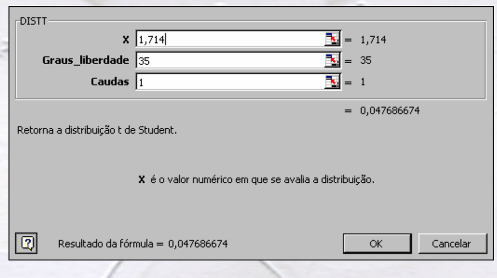
Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística



Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

OPÇÃO:

Trabalhar com a significância do resultado obtido (1,714), isto é, o valor-p. Para isto, deve-se calcular $P(T_{35} > 1{,}714)$. Utilizando o Excel, tem-se:



*Como a significância do resultado (4,77%) é **menor** que a significância do teste (5%) é possível rejeitar a hipótese nula.*

Teste para a proporção

$H_0: \pi = \pi_0$

$H_1: \pi > \pi_0$ (teste unilateral/unicaudal à direita)

$\pi < \pi_0$ (teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\pi \neq \pi_0$ (teste bilateral/bicaudal).

Neste caso a variável teste é:

$$Z = \frac{P - \mu_P}{\sigma_P} = \frac{P - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$Z > z_0$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$Z < z_0$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|Z| > z_0$

(teste bilateral/bicaudal).

Exemplo

Afirma-se que 40% dos alunos de uma universidade são fumantes. Uma amostra de 225 estudantes selecionados ao acaso mostrou que apenas 72 eram fumantes. Teste a 1% a hipótese de que a afirmação foi exagerada.

Solução:

Hipóteses:

H_0: $\pi = 40\%$

H_1: $\pi < 40\%$

Dados:

$f = 72$

$n = 225$

$p = 72/225 = 32\%$

$\alpha = 1\%$

Trata-se de um teste unilateral à esquerda para a proporção. A variável teste é:

$$Z = \frac{P - \mu_P}{\sigma_P} = \frac{P - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$$

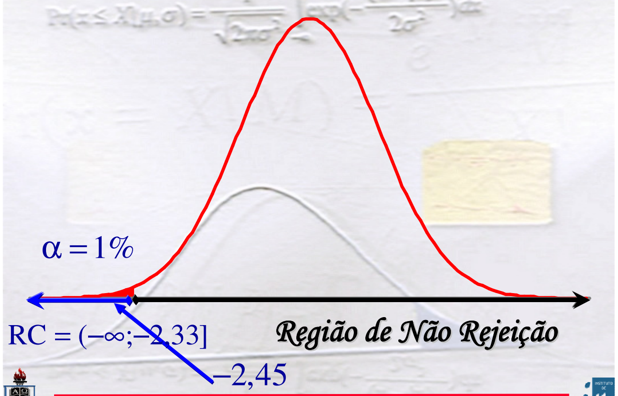
Então:

$$Z = \frac{P - \mu_P}{\sigma_P} = \frac{0,32 - 0,40}{\sqrt{\frac{0,40(1-0,40)}{225}}} = \frac{-0,08}{0,0326} = -2,45$$

O valor crítico z_c é tal que: $\Phi(z_c) = \alpha$ = = 0,01 = 1%. Então $z_c = \Phi^{-1}(0,01)$ = = -2,33. Assim RC = (-∞;-2,33]

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como z = -2,45 ∈ RC ou -2,45 < -2,33. ***Rejeito H_0,*** *isto é, a 1% de significância* ***posso*** *afirmar que a afirmação é exagerada.*



OPÇÃO:

Trabalhar com a significância do resultado obtido (-2,45), isto é, o valor-p. Para isto, deve-se calcular P(Z < -2,45), isto é, p = P(Z < -2,45) = Φ(-2,45) = 0,71%.

Como a significância do resultado (0,71%) é menor que a significância do teste (1%) ***é possível*** *rejeitar a hipótese nula.*

Teste para a variância

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$

$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$\sigma^2 < \sigma_0^2$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

(teste bilateral/bicaudal).

Neste caso a variável teste é:

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$\chi^2_{n-1} > \chi^2_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$\chi^2_{n-1} < \chi^2_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\chi^2_{n-1} > \chi^2_c$ ou $\chi^2_{n-1} < \chi^2_c$

(teste bilateral/bicaudal).

Onde χ^2_c é tal que:

$P(\chi^2_{n-1} > \chi^2_c) = \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$P(\chi^2_{n-1} < \chi^2_c) = 1 - \alpha$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$P(\chi^2_{n-1} < \chi^2_c) = \alpha/2$ ou $P(\chi^2_{n-1} > \chi^2_c) = \alpha/2$

(teste bilateral/bicaudal).

Exemplo

O fabricante de uma certa marca de surdina de carro divulga que as suas peças tem uma variância de 0,8 anos. Uma amostra aleatória de **16** peças mostrou uma variância de **um** ano. Utilizando uma significância de 5%, teste se a variância de todas as peças é superior a 0,8 anos.

Solução:

Hipóteses:

H_0: $\sigma^2 = 0,8$ anos

H_1: $\sigma^2 > 0,8$ anos

Dados:

$n = 16$

$s = 1$ ano

$\alpha = 5\%$

Trata-se de um teste unilateral à direita para a variância.

A variável teste é:

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

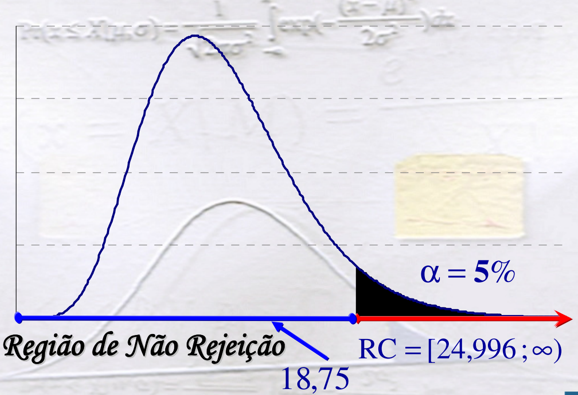
Então:

$$\chi^2_{15} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(16-1).1}{0,8} = \frac{15}{0,8} = 18,75$$

O valor crítico χ^2_c é tal que: $P(\chi^2 > \chi^2_c) = \alpha = 5\%$. Então: $\chi^2_c = 24,996$. Assim: $RC = [24,996; \infty)$

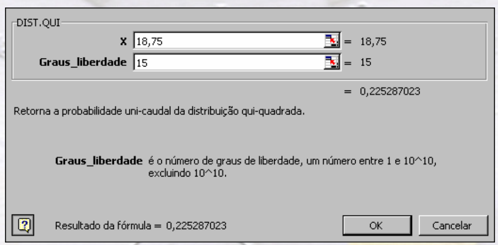
DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $\chi^2_{15} = 18,75 \notin RC$ ou $18,75 < 24,996$, **Aceito H_0**, isto é, a 5% de significância, **não** se pode afirmar que a variância é maior que 0,80 anos.



OPÇÃO:

Trabalhar com a significância do resultado obtido (18,75), isto é, o valor-p. Para isto, deve-se calcular $P(\chi^2_{15} > 18,75)$. Utilizando o Excel, tem-se:



Como a significância do resultado obtido (22,59%) é maior que a significância do teste (5%) não é possível rejeitar a hipótese nula.