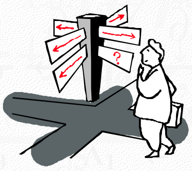


Testes de Hipóteses 1

Prof. Lorí Viali, Dr.
http://www. ufrgs.br/~viali/
viali@mat.ufrgs.br

Objetivos

Testar o valor hipotético de um parâmetro (testes paramétricos) ou de relacionamentos ou modelos (testes não paramétricos).

Tipos de Testes de Hipóteses

Testes

Paramétricos

Não-paramétricos

Testes não-paramétricos

Um teste não paramétrico testa outras situações que não parâmetros populacionais. Estas situações podem ser relacionamentos, modelos, dependência ou independência e aleatoriedade.

Alguns motivos para o seu uso

- São menos exigentes do que os paramétricos;
- As probabilidades na maioria dos testes são exatas;
- Independem da forma da população da qual a amostra foi obtida;

Alguns motivos para o seu uso

- Aplicação mais fácil;
- São úteis nos casos em que é difícil estabelecer uma escala de valores quantitativos para os dados.
- São mais eficientes do que os paramétricos, quando os dados não são normais.

Algumas restrições ao seu uso

- Em geral não levam em consideração a magnitude dos dados. Em muitos casos isso se traduz num desperdício de informações;
- Quando todas as exigências do modelo estatístico estão satisfeitas, o teste paramétrico tem mais poder;

Algumas restrições ao seu uso

- Em, geral, não permitem testar interações. Isto restringe a sua aplicação aos modelos mais simples;
- A obtenção, utilização e interpretação das distribuições de probabilidade, são em geral, mais trabalhosas.

Testes Paramétricos

Envolvem parâmetros populacionais.

Um parâmetro é qualquer medida que descreve uma população.

Os principais parâmetros são:

μ (a média)

σ^2 (a variância)

σ (o desvio padrão)

π (a proporção)

Etapas dos testes paramétricos de hipóteses

(1) Formular a hipótese nula ($\mathcal{H}_0$)

$\mathcal{H}_0$: $\theta = \theta_0$

Expressar em valores aquilo que deve ser testado;

Esta hipótese é sempre de igualdade;

Deve ser formulada com o objetivo de ser rejeitada.

(2) Formular a hipótese alternativa ($\mathcal{H}_1$)

(Testes simples)

$\mathcal{H}_1$: $\theta = \theta_1$

(Testes compostos)

$\mathcal{H}_1$: $\theta > \theta_0$ *(teste unilateral/unicaudal à direita)*

$\theta < \theta_0$ *(teste unilateral/unicaudal à esquerda)*

$\theta \neq \theta_0$ *(teste bilateral/bicaudal).*

(3) Definir um valor crítico (α)

- *Isto envolve definir um ponto de corte a partir do qual a hipótese nula será rejeitada (aceita a hipótese alternativa).*
- *Esta hipótese é de fato a expressão daquilo que ser quer provar.*

(4) Calcular a estatística teste

- *A estatística teste é obtida através dos dados amostrais, isto é, ela é a evidência amostral;*
- *A forma de cálculo depende do tipo de teste envolvido, isto é, do modelo teórico ou modelo de probabilidade.*

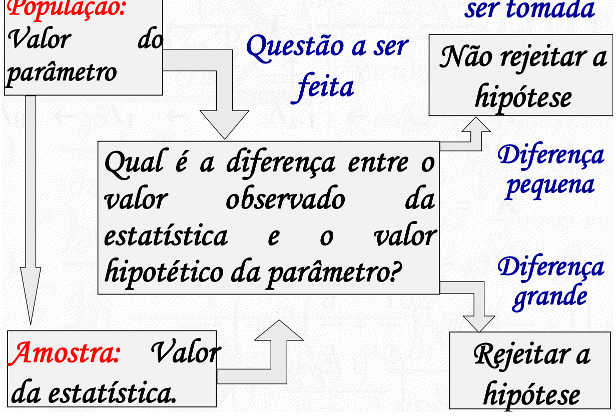
(5) Tomar uma decisão

- *A estatística teste e o valor crítico são comparados e a decisão de aceitar ou rejeitar a hipótese nula é formulada;*
- *Se for utilizado um software estatístico pode-se trabalhar com a significância do resultado (p-value) ao invés do valor crítico.*

(6)
Formular uma conclusão

- Expressar em termos do problema (pesquisa) qual foi a conclusão obtida;
- Não esquecer que todo resultado baseado em amostras está sujeito a erros e que geralmente apenas um tipo de erro é controlado.

Em resumo



Conceitos Básicos

Exemplo

Dispõem-se de duas moedas com aparências idênticas, só que uma (M_1) é equilibrada, isto é, P(Cara) = P(Coroa) = 50%, enquanto que a outra (M_2) é viciada de tal forma que favorece cara na proporção de 80%, ou seja, P(Cara) = 80% enquanto que P(Coroa) = 20%.

Supõem-se que uma das moedas é lançada e que com base na variável

X = número de caras,

deve-se decidir qual delas foi lançada. Neste caso o teste a ser feito envolve as seguintes hipóteses:

Hipóteses

H_0: A moeda lançada é a equilibrada (M_1) (p = 50%)

H_1: A moeda lançada é a viciada (M_2) (p = 80%)

p = proporção de caras.

Decisão

Tem-se que tomar a decisão de apontar qual foi a moeda lançada, baseado apenas em uma amostra de, por exemplo, 5 lançamentos. Lembrar que a população de lançamentos possíveis é, neste caso, infinita.

A decisão, é claro, estará sujeita a erros, pois se estará tomando a decisão em condições de incerteza, isto é, baseado em uma amostra de apenas 5 lançamentos das infinitas possibilidades.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A decisão será baseada nas distribuições amostrais das duas moedas.

A tabela mostra as probabilidades de se obter os valores: x = 0, 1, 2, 3, 4 e 5, da variável X = número de caras, em uma amostra de n = 5, lançamentos de cada uma das moedas.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Sob H_0 $X \sim B(5; 0,5)$

Assim:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{5}{x} 0,5^x 0,5^{5-x} =$$

$$= \binom{5}{x} 0,5^5 = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \binom{5}{x}\Big/32$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Sob H_1 $X \sim B(5; 0,8)$

Assim:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{5}{x} 0,2^x 0,8^{5-x} =$$

$$= \binom{5}{x}\left(\frac{4}{5}\right)^x \left(\frac{1}{5}\right)^{5-x} = \binom{5}{x}\frac{4^x}{5^5} = \binom{5}{x} 4^x \Big/ 3125$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Distribuições amostrais ($n = 5$)

x	$P(X = x)$ sob H_0	$P(X = x)$ sob H_1
0	1/32 → 3,125%	1/3125 → 0,032%
1	5/32 → 15,625%	20/3125 → 0,640%
2	10/32 → 31,250%	160/3125 → 5,120%
3	10/32 → 31,250%	640/3125 → 20,480%
4	5/32 → 15,625%	1280/3125 → 40,960%
5	1/32 → 3,125%	1024/3125 → 32,768%
Total	1 → 100%	1 → 100%

Regra de Decisão

Para poder aceitar ou rejeitar H_0 e como conseqüência, rejeitar ou aceitar H_1, é necessário estabelecer uma regra de decisão, isto é, é necessário estabelecer para que valores da variável X iremos rejeitar H_0

Região de Rejeição

Desta forma, estabelecendo-se que se vai rejeitar H_0, se a moeda der um número de caras igual a 4 ou 5, pode-se então determinar as probabilidades de tomar as decisões corretas ou erradas.

Assim o conjunto de valores que levará a rejeição da hipótese nula será denominado de região crítica (RC) e, neste caso, este conjunto é igual a:

$$RC = \{ 4, 5 \}$$

Região de não-rejeição ou aceitação

A faixa restante de valores da variável é denominada de região de aceitação ou de não-rejeição (RA) e, neste caso, este conjunto vale:

$$RA = \{ 0, 1, 2, 3 \}$$

Erro do Tipo I ou Nível de Significância do Teste

Então se H_0 for rejeitada porque X assumiu o valor 4 ou 5, pode-se estar cometendo um erro.

A probabilidade deste erro é igual a probabilidade de ocorrência destes valores sob H_0, isto é:

$$\alpha = P(\text{Erro do Tipo I}) =$$

$$= P(\text{Rejeitar } H_0 / H_0 \text{ é verdadeira}) =$$

$$= P(X = 4 \text{ ou } 5 / p = 0{,}50) =$$

$$= 5/32 + 1/32 = 6/32 = 18{,}75\% =$$

= Nível de significância do teste.

Erro do Tipo II

O outro tipo de erro possível de ser cometido é aceitar H_0 quando ela é falsa e é denominado de **erro do tipo II**.

Erro do Tipo II

β = P(Erro do Tipo II) =

= P(Aceitar H_0 / H_0 é falsa) =

P(X = 0, 1 , 2 ou 3 / p = 80%) =

= 1/3125 + 20/3125 + 160/3125 + 640/3125 =

= 821/3125 = 26,27%

β = (1+20+160+640)/3125
821/3125= 26,27%

x	P(X =	
0	1/32 → 3,125%	1/3125 ... 2%
1	5/32 → 15,625%	20/3125 ... 0,640%
2	10/32 → 31,250%	160/3125 → 5,120%
3	10/32 → 31,250%	640/3125 → 20,480%
4	5/32 → 15,625%	1280/3125 → 40,960%
5	1/32 → 3,1...	1024/3125 → 32,768%
Total	1 → 10...	...00%

α = 5/32 + 1/32
6/32= 18,75%

Em Resumo

Realidade	Decisão: Aceitar H_0	Decisão: Rejeitar H_0
H_0 é verdadeira	**Decisão correta** 1 - α = P(Aceitar H_0 / H_0 é verdadeira)	**Erro do Tipo I** α = P(Cometer Erro do tipo I) = P(Rejeitar H_0 / H_0 é verdadeira) = Nível de significância do teste
H_0 é falsa	**Erro do Tipo II** β = P(Cometer Erro do tipo II) = P(Aceitar H_0 / H_0 é falsa) = P(Aceitar H_0 / H_1 é verdadeira)	**Decisão correta** 1 - β = P(Rejeitar H_0 / H_0 é falsa) = Poder do teste.

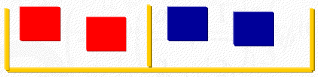
Exemplo 1

Uma urna contém quatro fichas das quais θ *são azuis e* $4 - \theta$ *são vermelhas. Para testar a hipótese nula de que* $\theta = 2$ *contra a alternativa de* $\theta \neq 2$*, retiram-se duas fichas ao acaso e sem reposição. Rejeita-se a hipótese nula se as duas fichas forem da mesma cor. Determine o nível de significância e o poder do teste.*

Espaço amostra

$S = \{\underbrace{VV,\ AA}_{\text{Região Crítica}},\ \overbrace{AV,\ VA}^{\text{Região De Não Rejeição}}\}$

Sob H_0: $\theta = 2$



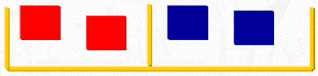
Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Cálculo do Erro do Tipo I, i. é, nível de significância do teste

O erro do tipo I é a probabilidade de rejeitar H_0 *quando ela é verdadeira, neste caso ele é a* ***probabilidade de retirarmos duas fichas da mesma cor, quando a urna tem duas de cada cor.***

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Sob H_0: $\theta = 2$



$$\alpha = P(\text{Erro do Tipo I}) =$$

$$= P(\text{Rejeitar } H_0 \,/\, H_0 \text{ é verdadeira}) =$$

$$= P(VV,\ AA \,/\, \theta = 2) =$$

$$= \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{12} + \frac{2}{12} =$$

$$= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = 33{,}33\%$$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Cálculo do Poder do Teste

O poder do teste é a probabilidade de Rejeitar H_0 *quando ela é falsa, é uma decisão correta. É calculada sob a região crítica. Neste caso é a* $P(VV,\ AA \,/\, H_0 \text{ é falsa})$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

MAS

$$1 - \beta = P(VV,\ AA \,/\, H_0 \text{ é falsa}) =$$

$$= P(VV,\ AA \,/\, H_1 \text{ é verdadeira}) =$$

$$= P(VV,\ AA \,/\, \theta \neq 2).$$

Assim devemos analisar quatro situações:

$\theta = 0$, $\theta = 1$, $\theta = 3$ e $\theta = 4$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

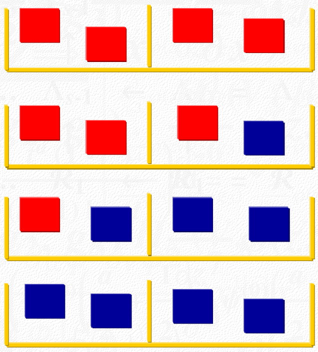
ISTO É:

$\theta = 0$

$\theta = 1$

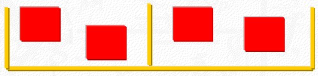
$\theta = 3$

$\theta = 4$



$\theta = 0$

Neste caso

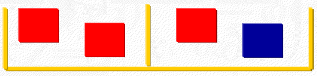


Então:

$$1-\beta = P(VV,\ AA / \theta \neq 2) = $$
$$= P(VV,\ AA / \theta = 0) = $$
$$= \frac{4}{4}.\frac{3}{3} + 0 = 1 = 100\%$$

$\theta = 1$

Neste caso

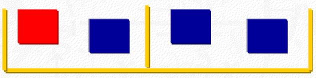


Então:

$$1-\beta = P(VV,\ AA / \theta \neq 2) = $$
$$= P(VV,\ AA / \theta = 1) = $$
$$= \frac{3}{4}.\frac{2}{3} + 0 = \frac{1}{2} = 50\%$$

$\theta = 3$

Neste caso

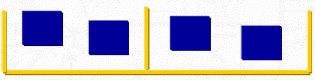


Então:

$$1-\beta = P(VV,\ AA / \theta \neq 2) = $$
$$= P(VV,\ AA / \theta = 3) = $$
$$= 0 + \frac{3}{4}.\frac{2}{3} = \frac{1}{2} = 50\%$$

$\theta = 4$

Neste caso



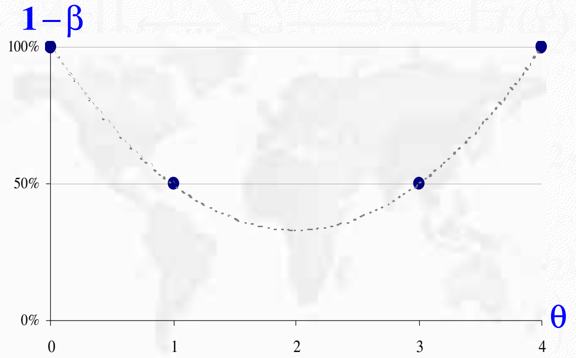
Então:

$$1-\beta = P(VV,\ AA / \theta \neq 2) = $$
$$= P(VV,\ AA / \theta = 0) = $$
$$= 0 + \frac{4}{4}.\frac{3}{3} = 1 = 100\%$$

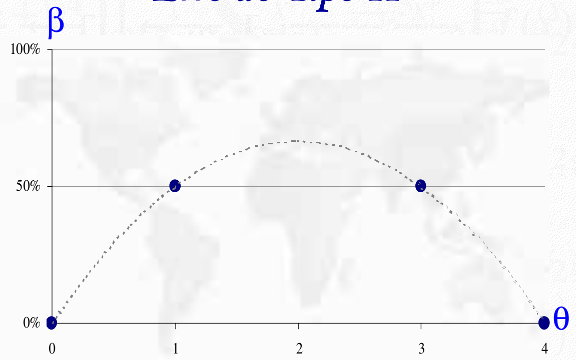
Em Resumo, tem-se:

θ	β	$1-\beta$	α
0	0%	100%	
1	50%	50%	
2	-	-	33,33%
3	50%	50%	
4	0%	100%	

Poder do Teste



Erro do Tipo II



Exemplo 2

Um dado é lançado seis vezes para testar a hipótese nula de que $P(F_1) = 1/6$ contra a alternativa de que $P(F_1) > 1/6$ Rejeita-se a hipótese nula se X = "número de faces um for maior ou igual a quatro". Determinar o nível de significância e o poder do teste.

Espaço amostra

Região De Rejeição (Crítica)

$S = \{\underbrace{0, 1, 2, 3}, \overbrace{4, 5, 6}\}$

Região de Não Rejeição

H_0: $p = 1/6$

H_0: $p > 1/6$

Cálculo do Erro do Tipo I, i. é, nível de significância do teste

O erro do tipo I é a probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é verdadeira, neste caso ele é a ***probabilidade de obtermos $X \geq 4$, quando $n = 6$ e $p = 1/6$.***

Sob H_0: $p = 1/6$

$$\alpha = P(\text{Erro do Tipo I}) =$$
$$= P(\text{Rejeitar } H_0 \,/\, H_0 \text{ é verdadeira}) =$$
$$= P(X \geq 4 / p = 1/6) =$$
$$= \binom{6}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^0 =$$
$$= \frac{15.25}{6^6} + \frac{6.5}{6^6} + \frac{1}{6^6} = \frac{406}{6^6} = 0{,}87\%$$

Cálculo do Poder do Teste

O poder do teste é a probabilidade de Rejeitar H_0 quando ela é falsa, é uma decisão correta. É calculada sob a região crítica. Neste caso é $P(X \geq 4 / H_0 \text{ é falsa})$

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

MAS

$$1-\beta = P(X \geq 4 \,/\, H_0 \text{ é falsa}) =$$
$$= P(X \geq 4 \,/\, H_1 \text{ é verdadeira}) =$$
$$= P(X \geq 4 \,/\, p > 1/6).$$

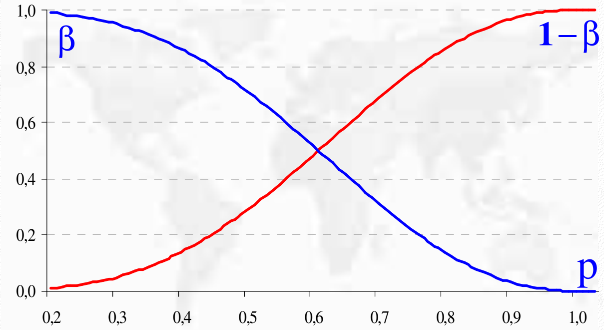
Neste caso, o poder do teste é uma função de p. Vamos avaliar esta função para alguns valores de "p".

Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Poder do teste para p > 1/6

p	1-β	p	1-β	p	1-β
0,20	1,70	**0,55**	44,15	**0,90**	98,41
0,25	3,76	**0,60**	54,43	**0,95**	99,78
0,30	7,05	**0,65**	64,71	**1,00**	100,00
0,35	11,74	**0,70**	74,43		
0,40	17,92	**0,75**	83,06		
0,45	25,53	**0,80**	90,11		
0,50	34,37	**0,85**	95,27		

Poder do Teste x Erro do Tipo II



Prof. Lorí Viali, Dr. - UFRGS - Instituto de Matemática - Departamento de Estatística