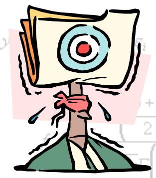
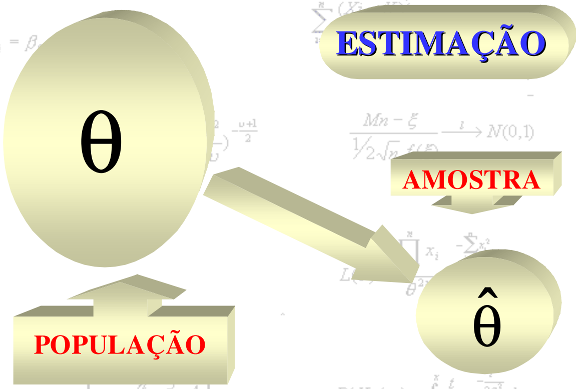


Estimação

Prof. Lorí Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
http://www.ufrgs.br/~viali/

Estimação

Uma A estimação tem por objetivo fornecer informações sobre parâmetros populacionais, tendo como base uma amostra aleatória extraída da população de interesse.



Tipos de Estimação

- Por Ponto
- Por intervalo

ESTIMAÇÃO POR PONTO

A estimativa por ponto é feita através de um único valor.

ESTIMAÇÃO POR INTERVALO

A estimativa por intervalo, fornece um conjunto de valores.

Estimação por Ponto

As características básicas de um estimador são:

A média: $\mu_{\hat{\theta}} = E(\hat{\theta})$

A Variância: $\sigma^2_{\hat{\theta}} = V(\hat{\theta}) =$

$$= E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 =$$

$$= E(\hat{\theta}^2) - E(\hat{\theta})^2$$

Através da média, pode-se saber em torno de que valor o estimador está variando. O ideal é que ele varie em torno do parâmetro θ.

Pela raiz quadrada da variância tem-se uma idéia do erro cometido na estimação, isto é, o valor

$$\sigma_{\hat{\theta}} = \sqrt{V(\hat{\theta})}$$

é denominado de erro padrão de θ.

A terceira informação necessária é a distribuição do estimador, isto é, qual o modelo teórico (probabilístico) do estimador.

OUTROS CONCEITOS IMPORTANTES

Erro amostral: $\varepsilon = \theta - \hat{\theta}$

Viés: $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$

EQM: $EQM(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$

Relação entre EQM e Variância

$$EQM(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 =$$

$$= E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \theta]^2 =$$

$$= E\{[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})] + [E(\hat{\theta}) - \theta]\}^2 =$$

$$= E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 + [E(\hat{\theta}) - \theta]^2 +$$

$$+ 2E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})][E(\hat{\theta}) - \theta]$$

Como:

$$E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})][E(\hat{\theta}) - \theta] = 0$$

Segue:

$$EQM(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 =$$

$$= E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 + E(\hat{\theta}) - \theta]^2 =$$

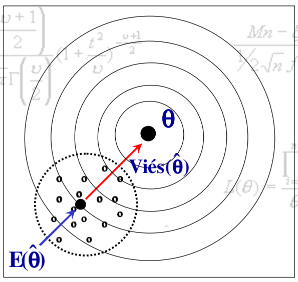
$$= V(\hat{\theta}) + B(\hat{\theta})^2$$

Isto é, o **Erro Quadrado Médio** de um estimador é a sua **Variância somada** com o **quadrado do Viés**.

$$EQM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + B(\hat{\theta})^2$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Erro Quadrado Médio



Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Propriedades dos Estimadores

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

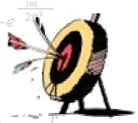
Seja $(X_1, X_2, ..., X_n)$ uma amostra aleatória de uma variável (população) X, com um parâmetro de interesse θ. Seja $\hat{\theta}$ uma função da amostra (estimativa de θ).

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Não Tendenciosidade

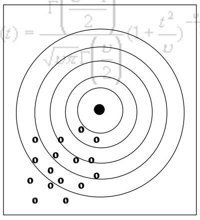
Um estimador é dito **não-tendencioso**, **não-viciado**, **sem viés** ou **imparcial** se:

$$\mu_{\hat{\theta}} = E(\hat{\theta}) = \theta$$

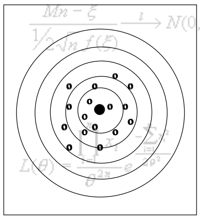


Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Tendenciosidade



Tendencioso



Não tendencioso

Métodos de Estimação

- Momentos
- Mínimos Quadrados
- Máxima Verossimilhança
- MELNT (Melhor Estimativa Linear Não Tendenciosa)
- Bayes

Métodos dos Momentos

É o mais antigo dos métodos para determinar estimadores (Pearson, 1894). Baseia-se no princípio de que se deve estimar o **momento de uma distribuição populacional** pelo **momento correspondente da amostra**.

Desta forma a **média populacional** deve ser estimada pela **média amostral**, a **variância populacional** pela **variância amostral** e assim por diante.

Este método produz estimadores que são consistentes e assintoticamente normais.

Exemplos

A média da amostra $\overline{x}$ é um estimador não-viciado de μ, isto é:

$$\mu_{\overline{X}} = E(\overline{X}) = \mu$$

A proporção amostral "P" é um estimador não-viciado de π, isto é:

$$\mu_P = E(P) = \pi$$

A variância da amostra "S^2" é um estimador viciado de σ^2, isto é:

$$\mu_{S^2} = E(S^2) \neq \sigma^2$$

A variância da amostra "S^2", calculada com **"n-1" no denominador** é um estimador não viciado de σ^2, isto é:

$$\mu_{S^2} = E(S^2) = \sigma^2$$

Consistência

Um estimador **não viciado** é dito **consistente** se:

$$\lim_{n \to \infty} V(\hat{\theta}) = 0$$

Exemplos

A média da amostra $\bar{x}$ é um estimador consistente de μ, isto é:

$$\lim_{n \to \infty} V(\bar{X}) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

A proporção amostral "P" é um estimador consistente de π, isto é:

$$\lim_{n \to \infty} V(P) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} = 0$$

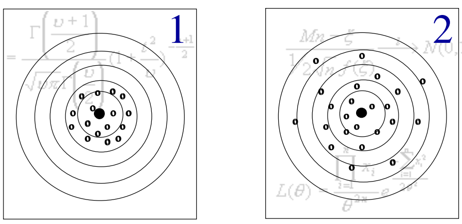
A variância da amostra "S^2" é um estimador consistente de σ^2, isto é:

$$\lim_{n \to \infty} V(S^2) = \lim_{n \to \infty} \frac{2\sigma^4}{n-1} = 0$$

Eficiência

Dados dois estimadores **não-tendenciosos** de um mesmo parâmetro, o **mais eficiente** é o que apresenta menor variância.

Eficiência



O estimador **"1"** é mais eficiente que o **"2"**

Exemplo

A média (simples) da amostra $\bar{x}$ é um estimador mais eficiente de μ, do que **qualquer** média ponderada.

Exercício um

Considere o seguinte conjunto de valores:

-3 -1,2 -0,5 0,9 1,1 2,2 2,8 4,5

Determine estimativas da:

(a) Média

(b) Variabilidade

(c) Da proporção de positivos

A média

A melhor estimativa da média é dada pela média da amostra. Assim:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} =$$

$$= \frac{-3-1,2-0,5+0,9+1,1+2,2+2,8+4,5}{8} =$$

$$= \frac{6,8}{8} = 0,85$$

A variância

A melhor estimativa da variância (σ^2) é dada pela variância amostral (s^2). Assim:

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} == \frac{45,64 - 8.(0,85)^2}{8-1} =$$

$$= \frac{45,64 - 5,78}{8-1} = \frac{39,86}{7} \cong 5,69$$

O desvio padrão

Extraindo a raiz quadrada da variância, tem-se uma estimativa do desvio padrão:

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{45,64 - 8.(0,85)^2}{8-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{45,64 - 5,78}{8-1}} = \sqrt{\frac{39,86}{7}} = \sqrt{5,6943} \cong 2,39$$

A proporção

A melhor estimativa de **π** é dada pela proporção amostral (**p**):

$$p = \frac{f}{n} = \frac{5}{8} = 0{,}625 = 62{,}50\,\%$$

Exercício dois

Com base na distribuição da velocidades de uma amostra de **120** carros andando na estrada POA/Osório, determine estimativas da:

(a) velocidade média

(b) variabilidade da velocidade

(c) da proporção de carros acima dos 100 km/h

Velocidades	Freqüência
80 ├── 85	8
85 ├── 90	13
90 ├── 95	24
95 ├── 100	33
100 ├── 105	29
105 ├── 110	13
Total	120

Velocidades	Freqüência	x_i	$f_i x_i$
80 ├── 85	8	82,5	660,0
85 ├── 90	13	87,5	1137,5
90 ├── 95	24	92,5	2220,0
95 ├── 100	33	97,5	3217,5
100 ├── 105	29	102,5	2972,5
105 ├── 110	13	107,5	13,97,5
Total	120	—	**11605**

A média

A melhor estimativa da média é dada pela média da amostra. Assim:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{11605}{120} = 96{,}71 \quad km/h$$

Velocidades	Freqüência	x_i	$f_i x_i^2$
80 ├─ 85	8	82,5	54450,00
85 ├─ 90	13	87,5	99531,25
90 ├─ 95	24	92,5	205350,00
95 ├─ 100	33	97,5	313706,25
100 ├─ 105	29	102,5	304681,25
105 ├─ 110	13	107,5	150231,25
Total	120	—	**1127950**

O desvio padrão

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2 - n\,\bar{x}^2}{n-1}} =$$

$$\sqrt{\frac{1127950 - 120\,.(96{,}7083)^2}{120 - 1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{5649{,}7917}{119}} = \sqrt{47{,}4772} \cong 6{,}89 \text{ km/h}$$

A proporção

A melhor estimativa de π é dada pela proporção amostral (p):

$$p = \frac{f}{n} = \frac{(29+13)}{120} =$$

$$= \frac{42}{120} = 0{,}35 = 35\,\%$$

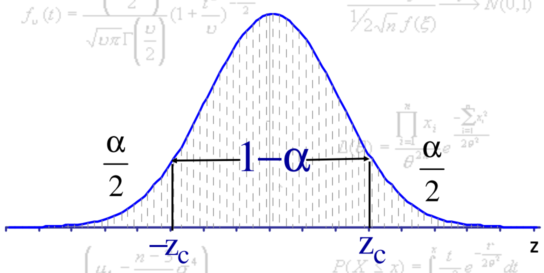
Estimação por Intervalo

(A)

Da Média

Supondo σ conhecido

$$P(-z_c < Z < z_c) = 1 - \alpha$$



De $P(-z_c < Z < z_c) = 1-\alpha$

Tem-se:

$$P\left(-z_c < \frac{\overline{X}-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} < z_c\right) = 1-\alpha$$

$$P(-z_c \cdot \sigma_{\overline{X}} < \overline{X}-\mu < z_c \cdot \sigma_{\overline{X}}) = 1-\alpha$$

$$P(-\overline{X}-z_c \cdot \sigma_{\overline{X}} < -\mu < -\overline{X}+z_c \cdot \sigma_{\overline{X}}) = 1-\alpha$$

Assim:

$$P(-\overline{X}-z_c \cdot \sigma_{\overline{X}} < -\mu < -\overline{X}+z_c \cdot \sigma_{\overline{X}}) = 1-\alpha$$

$$P(\overline{X}-z_c \cdot \sigma_{\overline{X}} < \mu < \overline{X}+z_c \cdot \sigma_{\overline{X}}) = 1-\alpha$$

Então, o IC de "1 – α" para **μ** é calculado por:

$$\overline{X} \pm \varepsilon_{\overline{X}} \qquad \varepsilon_{\overline{X}} = z_c\sigma_{\overline{x}} \qquad \sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Exemplo

Com base na distribuição das velocidades de uma amostra de **120** carros andando na estrada POA/Osório, e supondo que o desvio padrão populacional é igual a sete km/h determine uma estimativa para a velocidade média, com uma confiabilidade de 95%.

Tem-se:

$$\overline{X} \pm \varepsilon_{\overline{X}} \qquad \varepsilon_{\overline{X}} = z_c\sigma_{\overline{x}} \qquad \sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Mas: $z_c = 1{,}96$

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{7}{\sqrt{120}} = 0{,}6390$$

$$\varepsilon_{\overline{X}} = 1{,}96.0{,}6390 = 1{,}25$$

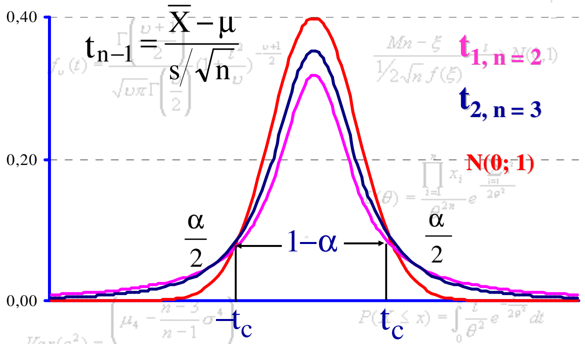
O IC de "1 – α" para **μ** é calculado por:

$$[\overline{X} - \varepsilon_{\overline{X}};\ \overline{X} + \varepsilon_{\overline{X}}]$$

$$[96{,}71 - 1{,}25;\ 96{,}71 + 1{,}25]$$

$$[95{,}46;\ 97{,}96]$$

σ desconhecido



De $P(-t_c < t < t_c) = 1-\alpha$

Tem-se:

$$P\left(-t_c < \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}} < t_c\right) = 1-\alpha$$

$$P(-t_c \cdot \hat{\sigma}_{\bar{X}} < \bar{X}-\mu < t_c \cdot \hat{\sigma}_{\bar{X}}) = 1-\alpha$$

$$P(-\bar{X}-t_c \cdot \hat{\sigma}_{\bar{X}} < -\mu < -\bar{X}+z_t \cdot \hat{\sigma}_{\bar{X}}) = 1-\alpha$$

Assim:

$$P(-\bar{X}-t_c \cdot \hat{\sigma}_{\bar{X}} < -\mu < -\bar{X}+t_c \cdot \hat{\sigma}_{\bar{X}}) = 1-\alpha$$

$$P(\bar{X}-t_c \cdot \hat{\sigma}_{\bar{X}} < \mu < \bar{X}+t_c \cdot \hat{\sigma}_{\bar{X}}) = 1-\alpha$$

Então, o IC de "1 – α" para **μ**, se σ for desconhecido é calculado por:

$$\bar{X} \pm \hat{\varepsilon}_{\bar{X}} \qquad \hat{\varepsilon}_{\bar{X}} = t_c \hat{\sigma}_{\bar{X}} \qquad \hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Exemplo

Com base na distribuição das velocidades de uma amostra de **120** carros andando na estrada POA/Osório, determine uma estimativa para a **velocidade média**, com uma confiabilidade de 95%.

Tem-se:

$$\bar{X} \pm \hat{\varepsilon}_{\bar{X}} \qquad \hat{\varepsilon}_{\bar{X}} = t_c \hat{\sigma}_{\bar{X}} \qquad \hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Mas: $t_c = 1{,}98$

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{47{,}4772}{120}} = 0{,}6290$$

$$\hat{\varepsilon}_{\bar{X}} = 1{,}98.0{,}6290 = 1{,}25$$

O IC de "1 – α" para μ é calculado por:

$$\left[\overline{X} - \hat{\varepsilon}_{\overline{X}};\ \overline{X} + \hat{\varepsilon}_{\overline{X}}\right]$$

$$[96{,}71 - 1{,}25;\ 96{,}71 + 1{,}25]$$

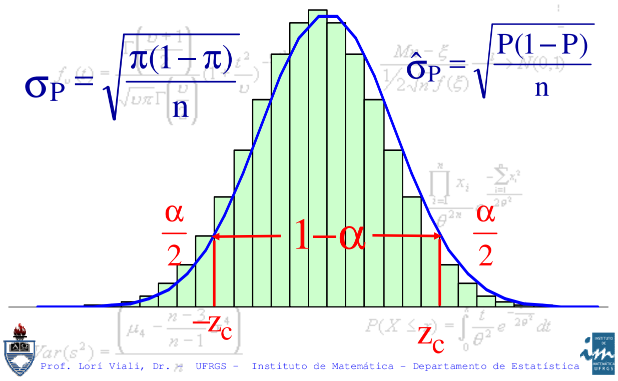
$$[95{,}46;\ 97{,}96]$$

(B)

Da Proporção

$$P(-z_c < Z < z_c) = 1 - \alpha$$

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} \qquad \hat{\sigma}_P = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$



De $P(-z_c < Z < z_c) = 1 - \alpha$

Tem-se:

$$P\left(-z_c < \frac{\overline{X} - \mu_P}{\sigma_P} < z_c\right) = 1 - \alpha$$

$$P(-z_c \cdot \sigma_P < P - \mu < z_c \cdot \sigma_P) = 1 - \alpha$$

$$P(-P - z_c \cdot \sigma_P < -\mu < -P + z_c \cdot \sigma_P) = 1 - \alpha$$

Assim:

$$P(-P - z_c \cdot \sigma_P < -\mu < -P + z_c \cdot \sigma_P) = 1 - \alpha$$

$$P(P - z_c \cdot \sigma_P < \mu < P + z_c \cdot \sigma_P) = 1 - \alpha$$

Então, o IC de "1 – α" para **π** é calculado por:

$$P \pm \hat{\varepsilon}_P \qquad \hat{\varepsilon}_P = z_c \hat{\sigma}_P \qquad \hat{\sigma}_P = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

Exemplo

Com base na distribuição das velocidades de uma amostra de **120** carros andando na estrada POA/Osório, determine uma estimativa para a **proporção de carros com velocidade acima de 100 km/h**, com uma confiabilidade de 95%.

Tem-se:

$$P \pm \hat{\varepsilon}_P \qquad \hat{\varepsilon}_P = z_c\,\hat{\sigma}_P \qquad \hat{\sigma}_P = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

Mas: $z_c = 1{,}96$

$$\hat{\sigma}_P = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}35.(1-0{,}35)}{120}} = 4{,}3541\%$$

$$\hat{\varepsilon}_{\overline{X}} = 1{,}96.4{,}3541 = 8{,}53\%$$

O IC de "1 – α" para π é calculado por:

$$[P - \hat{\varepsilon}_P;\ P + \hat{\varepsilon}_P]$$

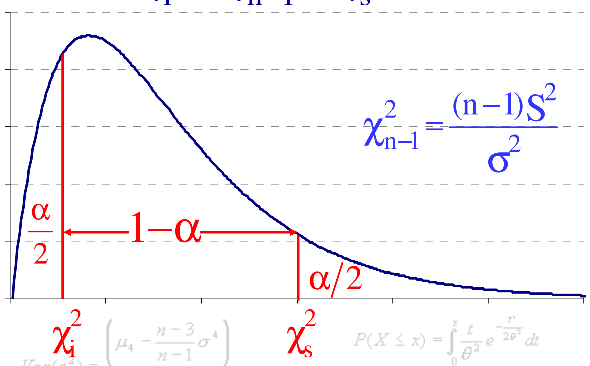
$$[35\% - 8{,}53\%;\ \ 35\% + 8{,}53\%]$$

$$[26{,}47\%;\ \ 43{,}53\%]$$

(C)

Da Variância (Desvio Padrão)

$$P(\chi_i^2 < \chi_{n-1}^2 < \chi_s^2) = 1 - \alpha$$



De $P(\chi_i^2 < \chi_{n-1}^2 < \chi_s^2) = 1 - \alpha$

Tem-se:

$$P(\chi_i^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_s^2) = 1 - \alpha$$

$$P(\frac{1}{\chi_s^2} < \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} < \frac{1}{\chi_i^2}) = 1 - \alpha$$

$$P(\frac{(n-1)S^2}{\chi_s^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_i^2}) = 1 - \alpha$$

Então o IC de "1 – α" para σ^2 é calculado por:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_s^2};\ \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}\right]$$

Então o IC de "1 – α" para σ é calculado por:

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_s^2}};\ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}}\right]$$

Exemplo

Com base na distribuição das velocidades de uma amostra de **120** carros andando na estrada POA/Osório, determine uma estimativa para a **variabilidade da velocidade**, com uma confiabilidade de 95%.

Tem-se:

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_s^2}};\ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}}\right]$$

Mas:

$$\chi_i^2 = 94{,}81$$

$$\chi_s^2 = 145{,}46$$

O IC de "1 – α" para σ é calculado por:

$$\left[\sqrt{\frac{119.47{,}4772}{145{,}46}};\ \sqrt{\frac{119.47{,}4772}{94{,}81}}\right]$$

$$[6{,}23;\ 7{,}72]$$

Dimensionamento da Amostra

É desejável um IC com alta confiabilidade (1 - α) e pequena amplitude (ε) . Isto requer uma amostra suficientemente grande, pois, para "n" fixo, confiança e precisão varia inversamente.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

A seguir os tamanhos mínimos necessários de amostras para estimar os principais parâmetros dentro de uma **confiabilidade** (1 – α) e uma **precisão** (ε) especificados.

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Para estimar a média de uma população, supondo σ conhecido

$$\varepsilon = z_c \sigma_{\bar{x}} = z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{\sigma . z_c}{\varepsilon}$$

$$n \geq \left(\frac{\sigma . z_c}{\varepsilon}\right)^2$$

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Para estimar a média de uma população, com σ conhecido

$$\varepsilon = t_c s_{\bar{x}} = t_c \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{s . t_c}{\varepsilon}$$

$$n \geq \left(\frac{s . t_c}{\varepsilon}\right)^2$$

t_c será obtido através de uma amostra piloto n'

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Para estimar a proporção populacional.

$$\varepsilon = z_c \sigma_{\bar{x}} = z_c \sqrt{\frac{P(1 - P)}{n}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{z_c}{\varepsilon} \sqrt{P(1 - P)}$$

$$n \geq \left(\frac{z_c}{\varepsilon}\right)^2 P(1 - P)$$

"p" será estimado através de uma amostra piloto n'

Prof. Lorí Viali, Dr. – UFRGS – Instituto de Matemática - Departamento de Estatística

Exemplo

Qual o tamanho mínimo de uma amostra para estimarmos a proporção de defeituosos de uma máquina com uma precisão de 3% e uma confiabilidade de 95%. Se (**a**) nada se sabe sobre esta proporção (**b**) ela não é superior a 10%.

Solução

(a)

$$n \geq \left(\frac{z_c}{\varepsilon}\right)^2 P(1-P)$$

$$n \geq \left(\frac{1,96}{0,03}\right)^2 0,50 \, . \, 0,5$$

$$n \geq 1068$$

Solução

(b)

$$n \geq \left(\frac{z_c}{\varepsilon}\right)^2 P(1-P)$$

$$n \geq \left(\frac{1,96}{0,03}\right)^2 0,1 \, . \, 0,9$$

$$n \geq 385$$