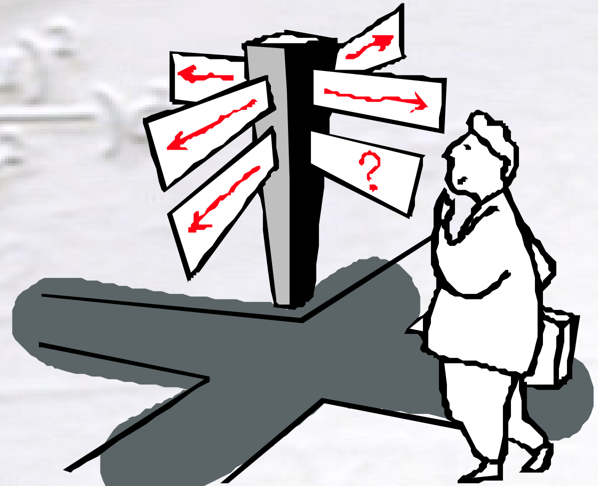
Testes de Hipóteses



2

Prof. Lorí Viali, Dr.

http://www.mat.ufrgs.br/~viali/

viali@mat.ufrgs.br

Testes para

- Uma amostra
  - Média
  - Proporção
  - Variância
- Duas amostras
  - Dependentes
    - Diferença de médias
  - Independentes
    - Diferença de médias
    - Diferença de proporções
    - Igualdade de variâncias

Testes para uma Amostra

Média (μ)

Proporção (π)

Variância (σ^2)

Teste para a média

$\mathcal{H}_0$: $\mu = \mu_0$

$\mathcal{H}_1$: $\mu > \mu_0$ *(teste unilateral/unicaudal à direita)*

$\mu < \mu_0$ *(teste unilateral/unicaudal à esquerda)*

$\mu \neq \mu_0$ *(teste bilateral/bicaudal)*.

(a) variância conhecida

Neste caso a variável teste é:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$Z > z_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$Z < z_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|Z| > z_c$

(teste bilateral/bicaudal).

Onde z_c é tal que:

$$\Phi(z_c) = 1 - \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$\Phi(z_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$\Phi(z_c) = \alpha/2 \text{ ou } \Phi(z_c) = 1 - \alpha/2$$

(teste bilateral/bicaudal).

Exemplo

A experiência passada mostrou que as notas de Probabilidade e Estatística, estão normalmente distribuídas com média $\mu = 5,5$ e desvio padrão $\sigma = 2,0$. Uma turma de $n = 64$ alunos deste semestre apresentou uma média de 5,9. Teste a hipótese de este resultado mostra uma melhora de rendimento a uma significância de 5%.

Solução:

Hipóteses:

H_0: $\mu = 5{,}5$

H_1: $\mu > 5{,}5$

Dados:

$\sigma = 2{,}0 \quad n = 64$

$\bar{x} = 5{,}9 \quad \alpha = 5\%$

Trata-se de um teste unilateral à direita com σ conhecido.

A variável teste é:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

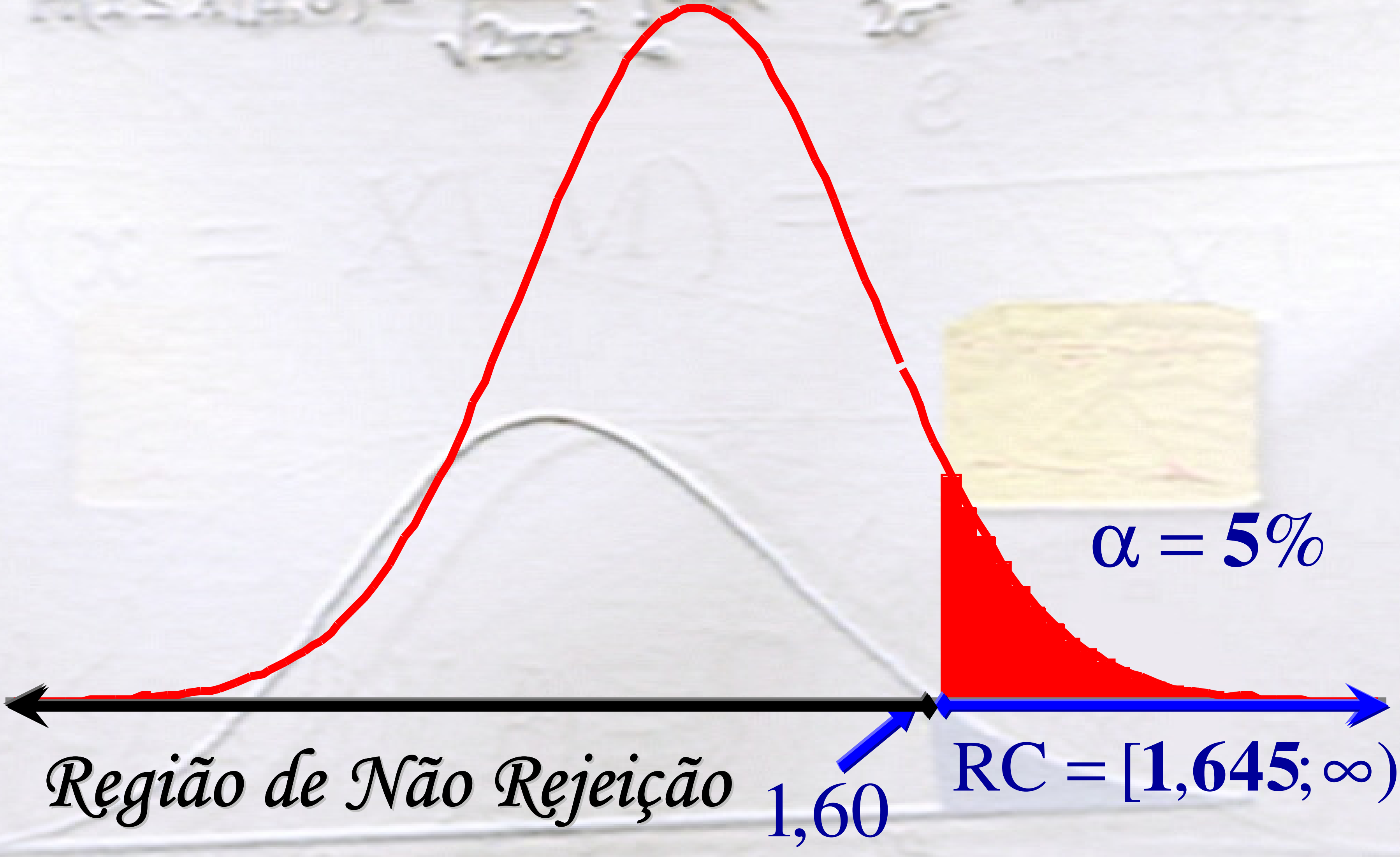
Então:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{5,9 - 5,5}{2,0 / \sqrt{64}} = \frac{0,4}{2,0 / 8} = \frac{3,2}{2,0} = 1,60$$

O valor crítico z_c é tal que: $\Phi(z_c) = 1 - \alpha$ = 1 – 0,05 = 95%. Então $z_c = \Phi^{-1}(0,95) =$ 1,645. *Assim RC = [1,645; ∞)*

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como z = 1,60 ∉ RC ou 1,60 < 1,645, Aceito H_0, isto é, a 5% de significância ***não*** *se pode afirmar que os resultados desta turma são melhores.*


α = 5%
Região de Não Rejeição
1,60
RC = [1,645; ∞)

OPÇÃO:

Trabalhar com a significância do resultado obtido (1,60), isto é, o valor-p. Para isto, deve-se calcular $P(Z > 1,60)$, isto é, $p = P(Z > 1,60) = 1 - \Phi(1,60) = \Phi(-1,60) =$ = 5,48%.

Como a significância do resultado (5,48%) é maior que a significância do teste (5%) não é possível rejeitar a hipótese nula.

(b) variância desconhecida

Neste caso a variável teste é:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\hat{\sigma}_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$t_{n-1} > t_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$t_{n-1} < t_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|t_{n-1}| > t_c$

(teste bilateral/bicaudal).

Onde t_c é tal que:

$$P(t < t_c) = 1 - \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$P(t < t_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$P(t < t_c) = \alpha/2 \text{ ou } P(t > t_c) = \alpha/2$$

(teste bilateral/bicaudal) .

Exemplo

Suponha que a sua empresa comprou um lote de lâmpadas. Você precisa testar, a 5% de significância, a afirmação do fabricante de que a duração média das lâmpadas é maior que 800 horas.

Para isto você usa uma amostra de 36 lâmpadas e encontra uma média 820 horas com desvio de 70 horas. Isto confirma a afirmação do fabricante?

Solução:

Hipóteses:

H_0: μ = 800 horas

H_1: μ > 800 horas

Dados:

$n = 36$

$\bar{x}$ = 820 horas

s = 70 horas

α = 5%

Trata-se de um teste unilateral à direita com σ desconhecido.

A variável teste é:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

Então:

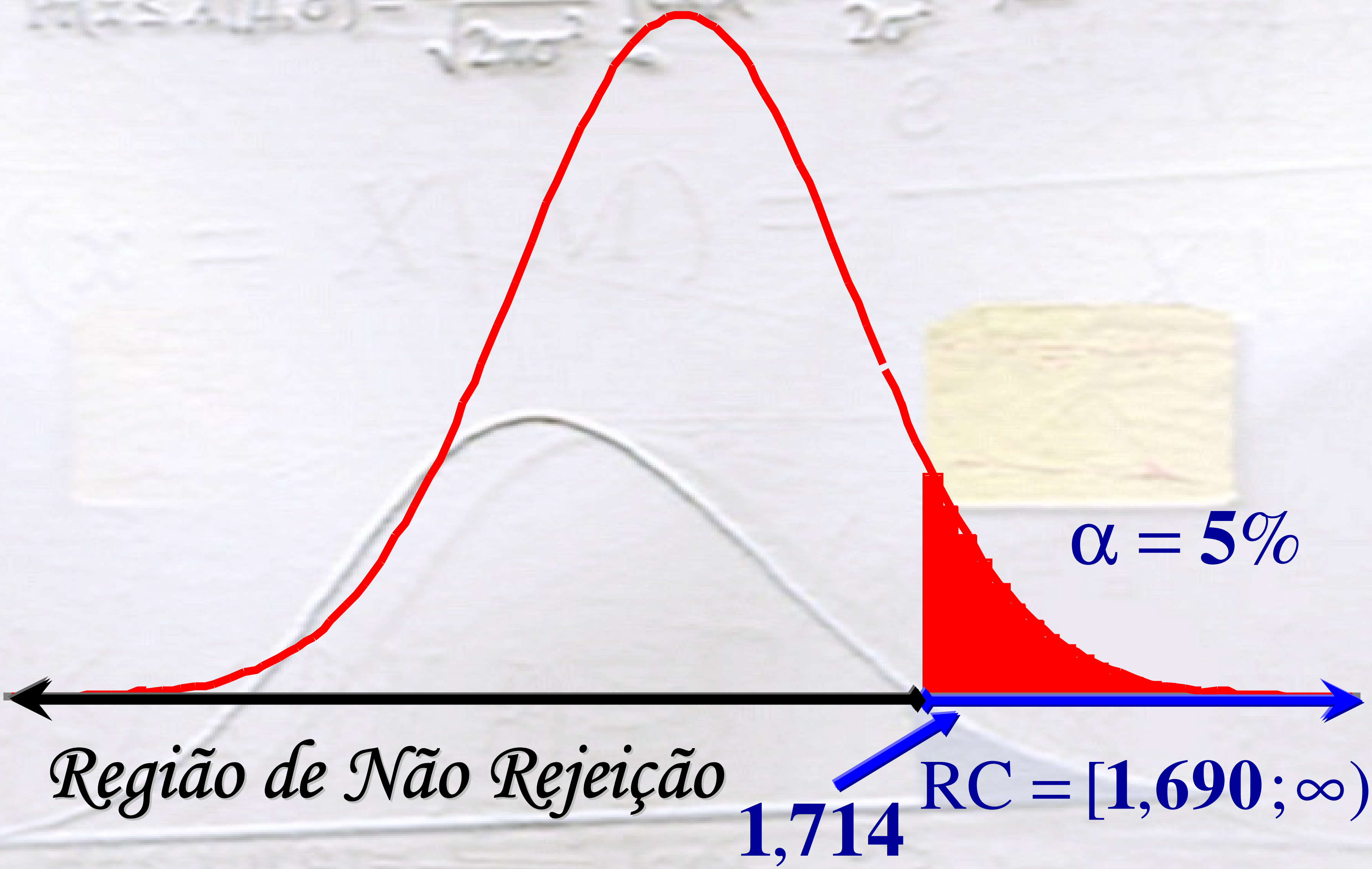
$$t_{35} = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{820 - 800}{70/\sqrt{36}} = \frac{20}{70/6} = \frac{120}{70} = 1{,}714$$

O valor crítico t_c é tal que: $P(T > t_c) = 1 - \alpha$

Então $t_c = 1{,}690$. Assim $RC = [1{,}690; \infty)$

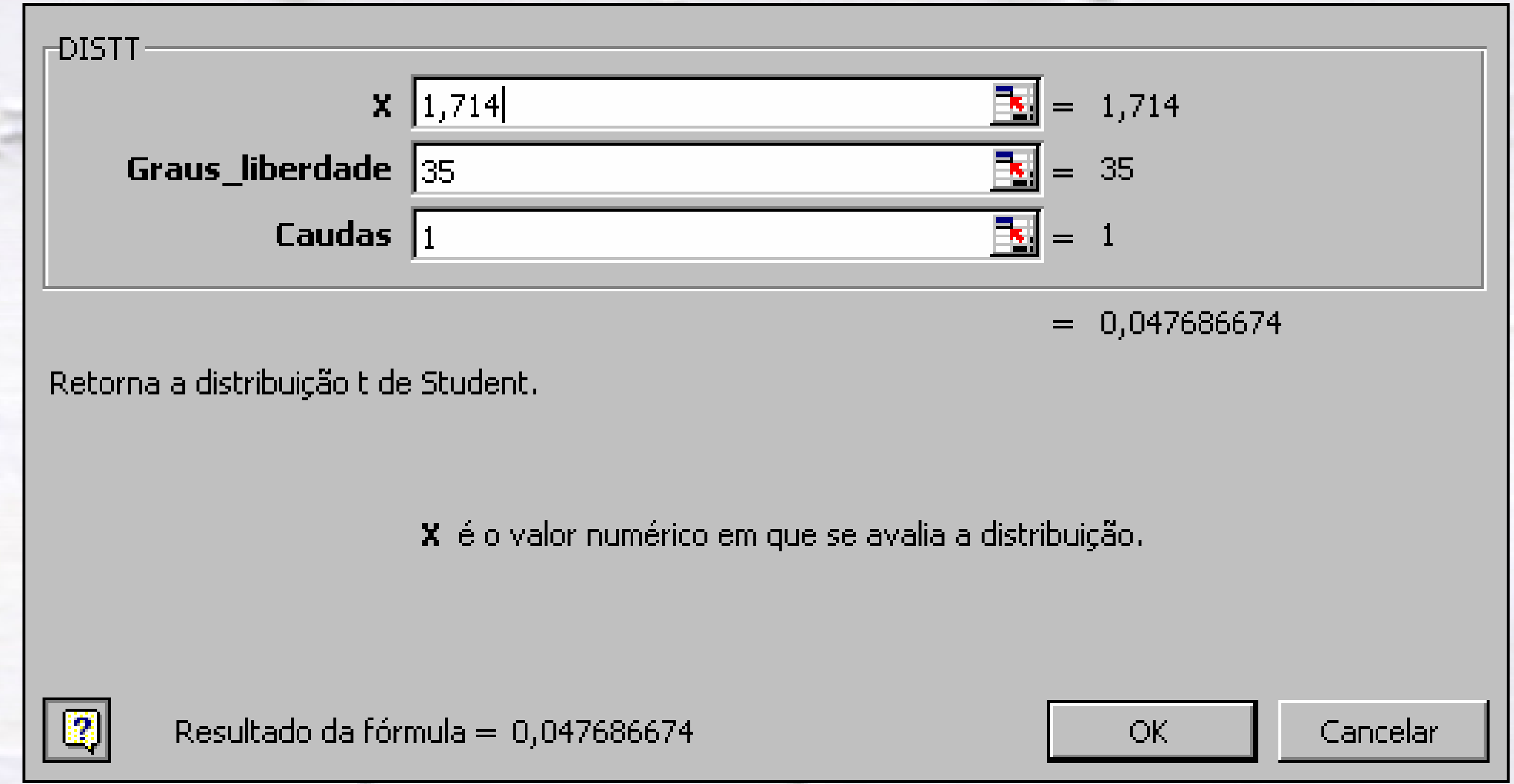
DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $t = 1{,}714 \in RC$ ou $1{,}714 > 1{,}690$, Rejeito H_0, isto é, a 5% de significância, pode-se afirmar que a duração média das lâmpadas é superior a 800 horas.


α = 5%
Região de Não Rejeição
1,714
RC = [1,690 ; ∞)

OPÇÃO:

Trabalhar com a significância do resultado obtido (1,714), isto é, o valor-p. Para isto, deve-se calcular $P(T_{35} > 1{,}714)$. Utilizando o Excel, tem-se:



Como a significância do resultado (4,77%) é menor que a significância do teste (5%) é possível rejeitar a hipótese nula.

Teste para a proporção

$\mathcal{H}_0 : \pi = \pi_0$

$\mathcal{H}_1 : \pi > \pi_0$ *(teste unilateral/unicaudal à direita)*

$\pi < \pi_0$ *(teste unilateral/unicaudal à esquerda)*

$\pi \neq \pi_0$ *(teste bilateral/bicaudal).*

Neste caso a variável teste é:

$$Z = \frac{\mathcal{P} - \mu_{\mathcal{P}}}{\sigma_{\mathcal{P}}} = \frac{\mathcal{P} - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$Z > z_0$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$Z < z_0$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|Z| > z_0$

(teste bilateral/bicaudal).

Exemplo

Afirma-se que 40% dos alunos de uma universidade são fumantes. Uma amostra de 225 estudantes selecionados ao acaso mostrou que apenas 72 eram fumantes. Teste a 1% a hipótese de que a afirmação foi exagerada.

Solução:

Dados:

$f = 72$

$n = 225$

$p = 72/225 = 32\%$

$\alpha = 1\%$

Hipóteses:

$H_0: \pi = 40\%$

$H_1: \pi < 40\%$

Trata-se de um teste unilateral à esquerda para a proporção. A variável teste é:

$$Z = \frac{P - \mu_P}{\sigma_P} = \frac{P - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$$

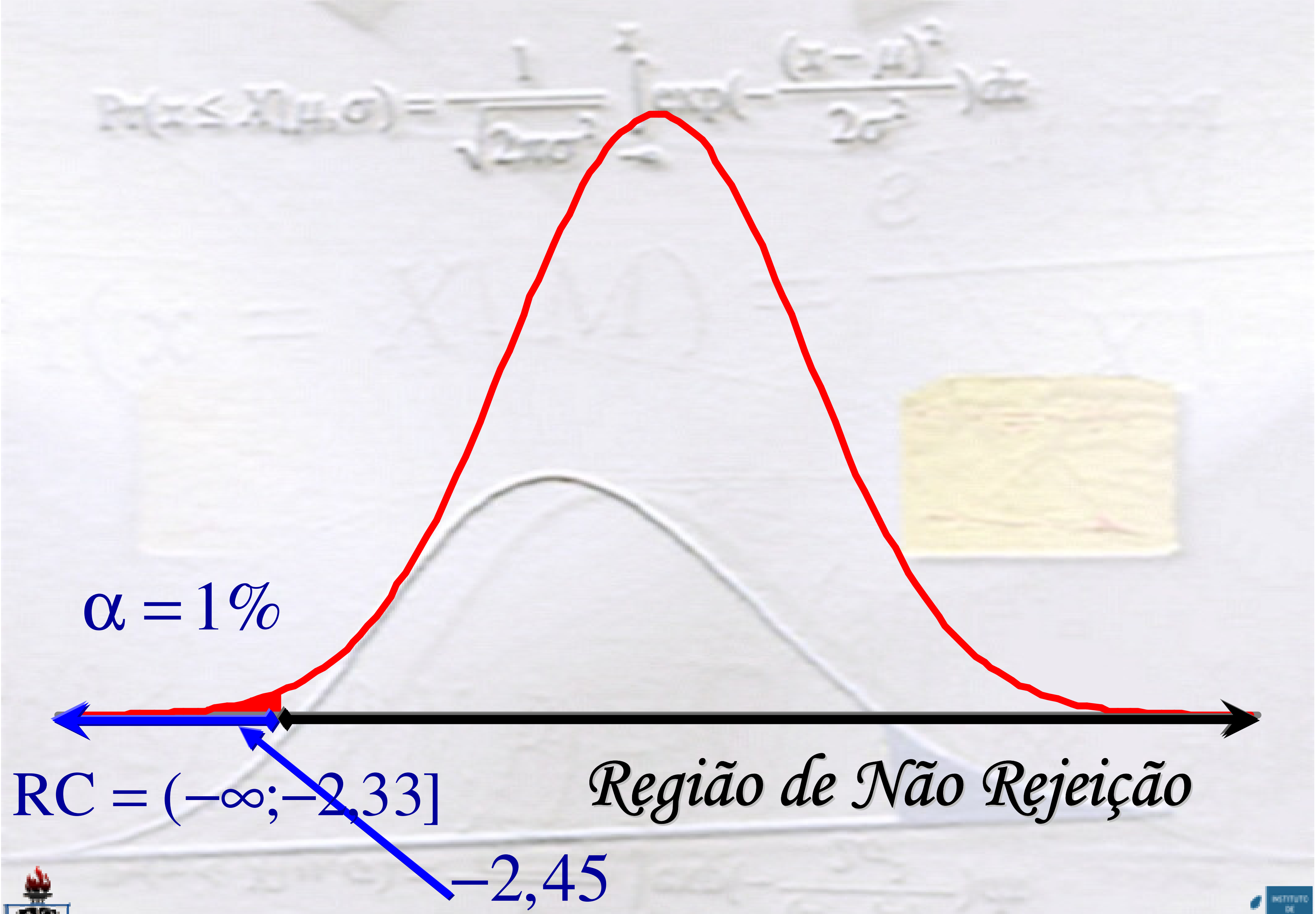
Então:

$$Z = \frac{P - \mu_P}{\sigma_P} = \frac{0,32 - 0,40}{\sqrt{\frac{0,40(1-0,40)}{225}}} = \frac{-0,08}{0,0326} = -2,45$$

O valor crítico z_c é tal que: $\Phi(z_c) = \alpha =$ $= 0{,}01 = 1\%$. Então $z_c = \Phi^{-1}(0{,}01) =$ $= -2{,}33$. Assim RC = $(-\infty; -2{,}33]$

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $z = -2{,}45 \in$ RC ou $-2{,}45 < -2{,}33$. Rejeito H_0, isto é, a 1% de significância posso afirmar que a afirmação é exagerada.



$\alpha = 1\%$
$RC = (-\infty; -2{,}33]$
Região de Não Rejeição
$-2{,}45$

OPÇÃO:

Trabalhar com a significância do resultado obtido (-2,45), isto é, o valor-p. Para isto, deve-se calcular $P(Z < -2,45)$, isto é, $p = P(Z < -2,45) = \Phi(-2,45) = 0,71\%$.

Como a significância do resultado (0,71%) é *menor* que a significância do teste (1%) é possível rejeitar a hipótese nula.

Teste para a variância

$$\mathcal{H}_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$\mathcal{H}_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$\sigma^2 < \sigma_0^2$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

(teste bilateral/bicaudal).

Neste caso a variável teste é:

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$$\chi^2_{n-1} > \chi^2_c$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$\chi^2_{n-1} < \chi^2_c$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$\chi^2_{n-1} > \chi^2_c \text{ ou } \chi^2_{n-1} < \chi^2_c$$

(teste bilateral/bicaudal).

Onde χ^2_c é tal que:

$$P(\chi^2_{n-1} > \chi^2_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$P(\chi^2_{n-1} < \chi^2_c) = 1 - \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$P(\chi^2_{n-1} < \chi^2_c) = \alpha/2 \text{ ou } P(\chi^2_{n-1} > \chi^2_c) = \alpha/2$$

(teste bilateral/bicaudal).

Exemplo

O fabricante de uma certa marca de surdina de carro divulga que as suas peças tem uma variância de 0,8 anos. Uma amostra aleatória de **16** peças mostrou uma variância de **um** ano. Utilizando uma significância de 5%, teste se a variância de todas as peças é superior a 0,8 anos.

Solução:

Hipóteses:

$H_0: \sigma^2 = 0,8$ anos

$H_1: \sigma^2 > 0,8$ anos

Dados:

$n = 16$

$s = 1$ ano

$\alpha = 5\%$

Trata-se de um teste unilateral à direita para a variância.

A variável teste é:

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

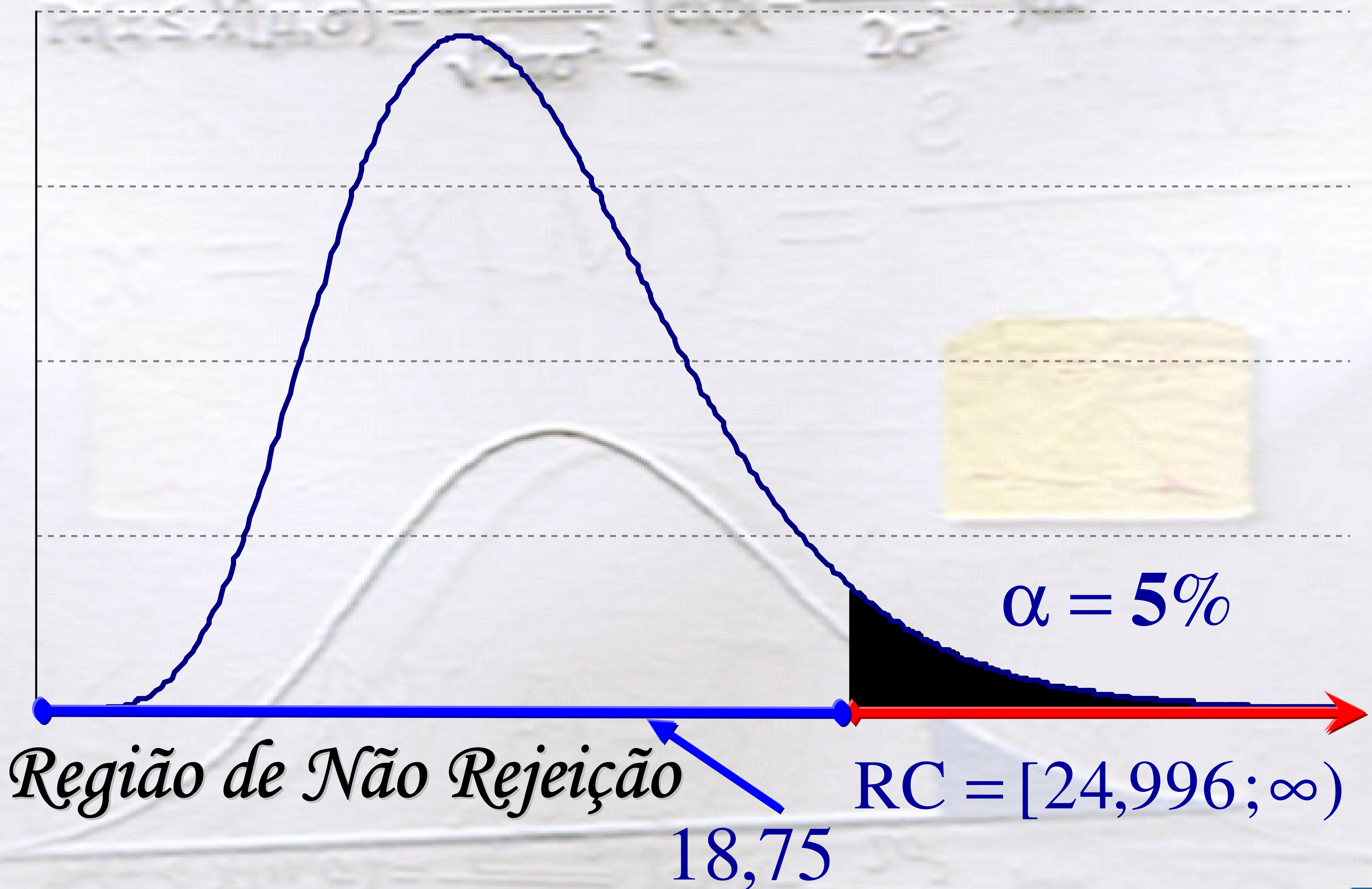
Então:

$$\chi^2_{15} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(16-1).1}{0,8} = \frac{15}{0,8} = 18,75$$

O valor crítico χ^2_c é tal que: $P(\chi^2 > \chi^2_c) = \alpha = 5\%$. Então: $\chi^2_c = 24{,}996$. *Assim:* $RC = [24{,}996; \infty)$

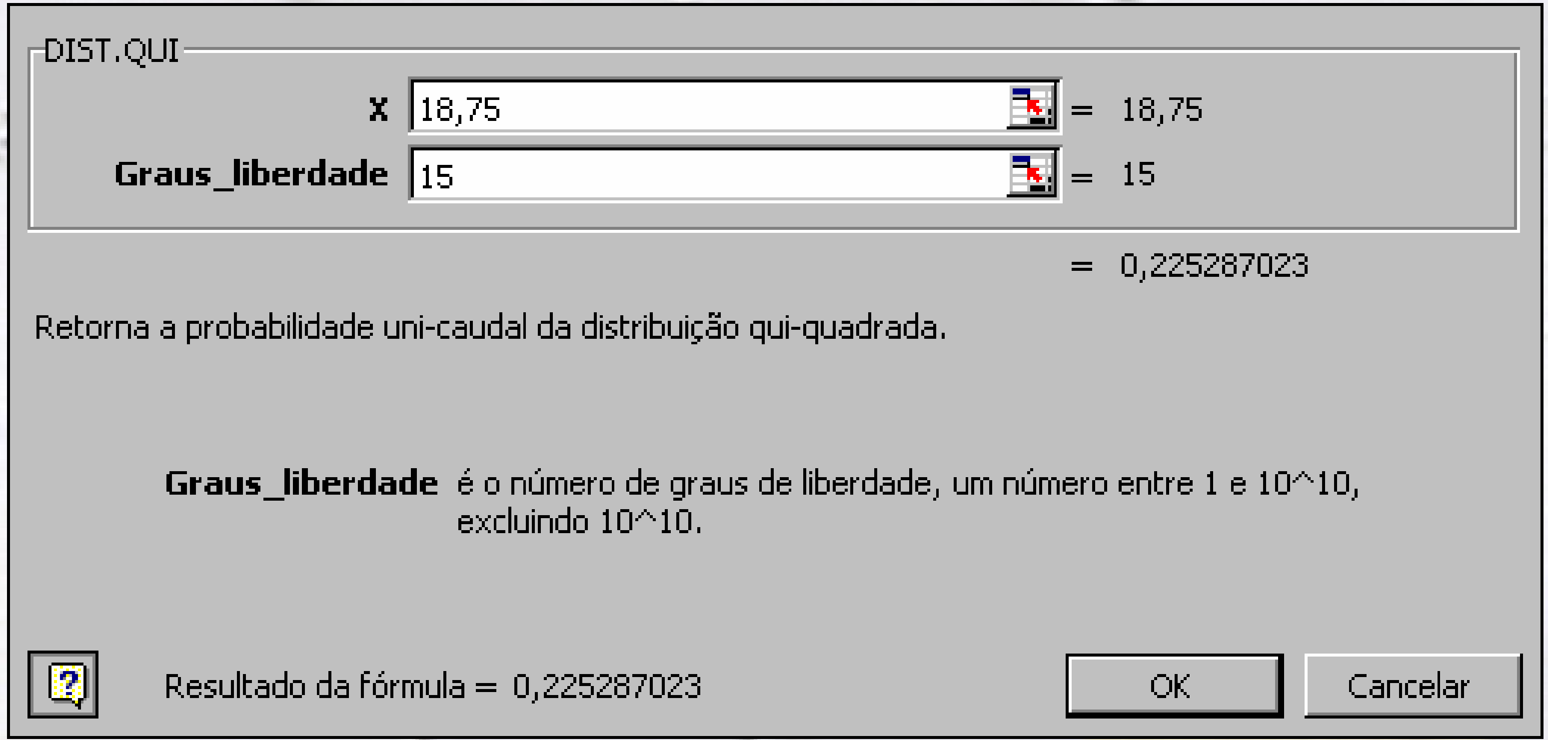
DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $\chi^2_{15} = 18{,}75 \notin RC$ ou $18{,}75 < 24{,}996$, Aceito H_0, isto é, a 5% de significância, **não** se pode afirmar que a variância é maior que 0,80 anos.


α = 5%
Região de Não Rejeição
18,75
RC = [24,996 ; ∞)

OPÇÃO:

Trabalhar com a significância do resultado obtido (18,75), isto é, o valor-p. Para isto, deve-se calcular $P(\chi^2_{15} > 18,75)$. Utilizando o Excel, tem-se:



Como a significância do resultado obtido (22,59%) é maior que a significância do teste (5%) não é possível rejeitar a hipótese nula.