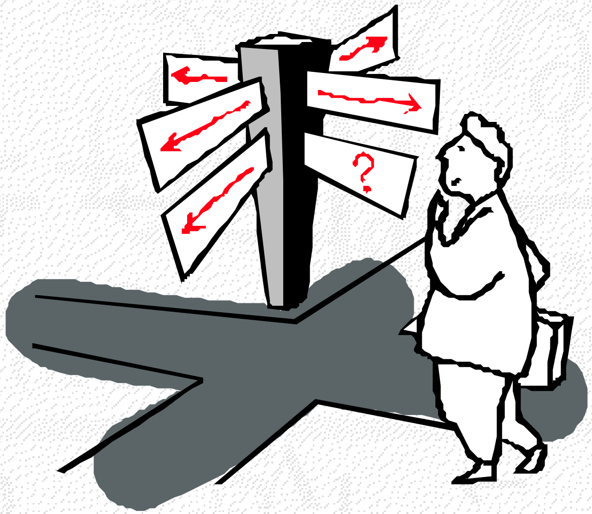


Testes de Hipóteses 1

Prof. Lorí Viali, Dr.
http://www.ufrgs.br/~viali/
viali@mat.ufrgs.br

Objetivos

Testar o valor hipotético de um parâmetro (testes paramétricos) ou de relacionamentos ou modelos (testes não paramétricos).

Tipos de Testes de Hipóteses

Testes

Paramétricos

Não-paramétricos

Testes não-paramétricos

Um teste não paramétrico testa outras situações que não parâmetros populacionais. Estas situações podem ser relacionamentos, modelos, dependência ou independência e aleatoriedade.

Alguns motivos para o seu uso

- São menos exigentes do que os paramétricos;
- As probabilidades na maioria dos testes são exatas;
- Independem da forma da população da qual a amostra foi obtida;

Alguns motivos para o seu uso

- Aplicação mais fácil;
- São úteis nos casos em que é difícil estabelecer uma escala de valores quantitativos para os dados.
- São mais eficientes do que os paramétricos, quando os dados não são normais.

Algumas restrições ao seu uso

- Em geral não levam em consideração a magnitude dos dados. Em muitos casos isso se traduz num desperdício de informações;

- Quando todas as exigências do modelo estatístico estão satisfeitas, o teste paramétrico tem mais poder;

Algumas restrições ao seu uso

- Em, geral, não permitem testar interações. Isto restringe a sua aplicação aos modelos mais simples;
- A obtenção, utilização e interpretação das distribuições de probabilidade, são em geral, mais trabalhosas.

Testes Paramétricos

Envolvem parâmetros populacionais.

Um parâmetro é qualquer medida que descreve uma população.

Os principais parâmetros são:

μ	*(a média)*
σ^2	*(a variância)*
σ	*(o desvio padrão)*
π	*(a proporção)*

Etapas dos testes paramétricos de hipóteses

(1)

Formular a hipótese nula ($\mathcal{H}_0$)

$$\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0$$

Expressar em valores aquilo que deve ser testado;

Esta hipótese é sempre de igualdade;

Deve ser formulada com o objetivo de ser rejeitada.

(2)

Formular a hipótese alternativa ($\mathcal{H}_1$)

(Testes simples)

$\mathcal{H}_1$: $\theta = \theta_1$

(Testes compostos)

$\mathcal{H}_1$: $\theta > \theta_0$ *(teste unilateral/unicaudal à direita)*

$\theta < \theta_0$ *(teste unilateral/unicaudal à esquerda)*

$\theta \neq \theta_0$ *(teste bilateral/bicaudal).*

(3)

Definir um valor crítico (α)

- *Isto envolve definir um ponto de corte a partir do qual a hipótese nula será rejeitada (aceita a hipótese alternativa).*
- *Esta hipótese é de fato a expressão daquilo que ser quer provar.*

(4)
Calcular a estatística teste

- A estatística teste é obtida através dos dados amostrais, isto é, ela é a evidência amostral;

- A forma de cálculo depende do tipo de teste envolvido, isto é, do modelo teórico ou modelo de probabilidade.

(5)
Tomar uma decisão

- A estatística teste e o valor crítico são comparados e a decisão de aceitar ou rejeitar a hipótese nula é formulada;

- Se for utilizado um software estatístico pode-se trabalhar com a significância do resultado (p-value) ao invés do valor crítico.

(6)

Formular uma conclusão

- Expressar em termos do problema (pesquisa) qual foi a conclusão obtida;

- Não esquecer que todo resultado baseado em amostras está sujeito a erros e que geralmente apenas um tipo de erro é controlado.

Em resumo

População: Valor do parâmetro

Questão a ser feita

Qual é a diferença entre o valor observado da estatística e o valor hipotético da parâmetro?

Amostra: Valor da estatística.

Decisão a ser tomada

Diferença pequena

Não rejeitar a hipótese

Diferença grande

Rejeitar a hipótese

Conceitos Básicos

Exemplo

Dispõem-se de duas moedas com aparências idênticas, só que uma (M_1) é equilibrada, isto é, P(Cara) = P(Coroa) = 50%, enquanto que a outra (M_2) é viciada de tal forma que favorece cara na proporção de 80%, ou seja, P(Cara) = 80% enquanto que P(Coroa) = 20%.

Supõem-se que uma das moedas é lançada e que com base na variável

$$X = \text{número de caras},$$

deve-se decidir qual delas foi lançada. Neste caso o teste a ser feito envolve as seguintes hipóteses:

Hipóteses

$\mathcal{H}_0$: A moeda lançada é a equilibrada (M_1)

(p = 50%)

$\mathcal{H}_1$: A moeda lançada é a viciada (M_2)
(p = 80%)

p = proporção de caras.

Decisão

Tem-se que tomar a decisão de apontar qual foi a moeda lançada, baseado apenas em uma amostra de, por exemplo, 5 lançamentos. Lembrar que a população de lançamentos possíveis é, neste caso, infinita.

A decisão, é claro, estará sujeita a erros, pois se estará tomando a decisão em condições de incerteza, isto é, baseado em uma amostra de apenas 5 lançamentos das infinitas possibilidades.

A decisão será baseada nas distribuições amostrais das duas moedas.

A tabela mostra as probabilidades de se obter os valores: $x = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5, da variável X = número de caras, em uma amostra de $n = 5$, lançamentos de cada uma das moedas.

$$Sob\ \mathcal{H}_0 \quad X \sim \mathcal{B}(5;\ 0{,}5)$$

Assim:

$$\mathcal{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{5}{x} 0{,}5^x\, 0{,}5^{5-x} =$$

$$= \binom{5}{x} 0{,}5^5 = \binom{5}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \binom{5}{x} \Big/ 32$$

$$\text{Sob } \mathcal{H}_1 \; X \sim \mathcal{B}(5;\, 0{,}8)$$

Assim:

$$\mathcal{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{5}{x} 0{,}2^x 0{,}8^{5-x} =$$

$$= \binom{5}{x}\left(\frac{4}{5}\right)^x \left(\frac{1}{5}\right)^{5-x} = \binom{5}{x}\frac{4^x}{5^5} = \binom{5}{x} 4^x \Big/ 3125$$

Distribuições amostrais ($n = 5$)

x	$P(X = x)$ sob $\mathcal{H}_0$	$P(X = x)$ sob $\mathcal{H}_1$
0	$1/32 \rightarrow 3{,}125\%$	$1/3125 \rightarrow 0{,}032\%$
1	$5/32 \rightarrow 15{,}625\%$	$20/3125 \rightarrow 0{,}640\%$
2	$10/32 \rightarrow 31{,}250\%$	$160/3125 \rightarrow 5{,}120\%$
3	$10/32 \rightarrow 31{,}250\%$	$640/3125 \rightarrow 20{,}480\%$
4	$5/32 \rightarrow 15{,}625\%$	$1280/3125 \rightarrow 40{,}960\%$
5	$1/32 \rightarrow 3{,}125\%$	$1024/3125 \rightarrow 32{,}768\%$
Total	$1 \rightarrow 100\%$	$1 \rightarrow 100\%$

Regra de Decisão

Para poder aceitar ou rejeitar $\mathcal{H}_0$ e como conseqüência, rejeitar ou aceitar $\mathcal{H}_1$, é necessário estabelecer uma regra de decisão, isto é, é necessário estabelecer para que valores da variável X iremos rejeitar $\mathcal{H}_0$

Região de Rejeição

Desta forma, estabelecendo-se que se vai rejeitar H_0, se a moeda der um número de caras igual a 4 ou 5, pode-se então determinar as probabilidades de tomar as decisões corretas ou erradas.

Assim o conjunto de valores que levará a rejeição da hipótese nula será denominado de região crítica (RC) e, neste caso, este conjunto é igual a:

$$RC = \{\ 4, 5\ \}$$

Região de não-rejeição ou aceitação

A faixa restante de valores da variável é denominada de região de aceitação ou de não-rejeição (RA) e, neste caso, este conjunto vale:

$$RA = \{ 0, 1, 2 , 3 \}$$

Erro do Tipo I ou Nível de Significância do Teste

Então se H_0 for rejeitada porque X assumiu o valor 4 ou 5, pode-se estar cometendo um erro.

A probabilidade deste erro é igual a probabilidade de ocorrência destes valores sob H_0, isto é:

$$\alpha = P(\text{Erro do Tipo I}) =$$

$$= P(\text{Rejeitar } H_0 \,/\, H_0 \text{ é verdadeira}) =$$

$$= P(X = 4 \text{ ou } 5 \,/\, p = 0{,}50) =$$

$$= 5/32 + 1/32 = 6/32 = 18{,}75\% =$$

= Nível de significância do teste.

Erro do Tipo II

O outro tipo de erro possível de ser cometido é aceitar H_0 quando ela é falsa e é denominado de **erro do tipo II**.

Erro do Tipo II

$$\beta = P(\text{Erro do Tipo II}) =$$

$$= P(\text{Aceitar } H_0 \,/\, H_0 \text{ é falsa}) =$$

$$P(X = 0,\ 1\ ,\ 2 \text{ ou } 3 \,/\, p = 80\%) =$$

$$= 1/3125 + 20/3125 + 160/3125 + 640/3125 =$$

$$= 821/3125 = 26{,}27\%$$

$\beta = (1+20+160+640)/3125$

$821/3125 = 26{,}27\%$

x	$P(X=$	
0	$1/32 \rightarrow 3{,}125\%$	$1/3125$ … 2%
1	$5/32 \rightarrow 15{,}625\%$	$20/3125$ … $0{,}640\%$
2	$10/32 \rightarrow 31{,}250\%$	$160/3125 \rightarrow 5{,}120\%$
3	$10/32 \rightarrow 31{,}250\%$	$640/3125 \rightarrow 20{,}480\%$
4	$5/32 \rightarrow 15{,}625\%$	$1280/3125 \rightarrow 40{,}960\%$
5	$1/32 \rightarrow 3{,}1$ …	$1024/3125 \rightarrow 32{,}768\%$
Total	$1 \rightarrow 10$ …	… 00%

$\alpha = 5/32 + 1/32$

$6/32 = 18{,}75\%$

Em Resumo

Realidade	Decisão	
	Aceitar H_0	Rejeitar H_0
H_0 é verdadeira	**Decisão correta** $1 - \alpha = P(\text{Aceitar } H_0 / H_0 \text{ é verdadeira})$	**Erro do Tipo I** $\alpha = P(\text{Cometer Erro do tipo I}) = P(\text{Rejeitar } H_0 / H_0 \text{ é verdadeira})$ = Nível de significância do teste
H_0 é falsa	**Erro do Tipo II** $\beta = P(\text{Cometer Erro do tipo II}) = P(\text{Aceitar } H_0 / H_0 \text{ é falsa}) = P(\text{Aceitar } H_0 / H_1 \text{ é verdadeira})$	**Decisão correta** $1 - \beta = P(\text{Rejeitar } H_0 / H_0 \text{ é falsa})$ = Poder do teste.

Exemplo

1

Uma urna contém quatro fichas das quais θ são azuis e $4 - \theta$ são vermelhas. Para testar a hipótese nula de que $\theta = 2$ contra a alternativa de $\theta \neq 2$, retiram-se duas fichas ao acaso e sem reposição. Rejeita-se a hipótese nula se as duas fichas forem da mesma cor. Determine o nível de significância e o poder do teste.

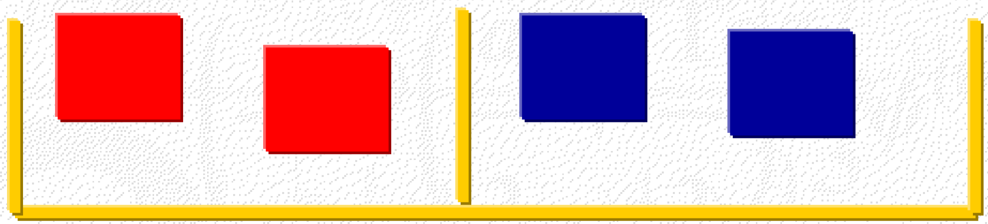
Espaço amostra

Região De Não Rejeição

$$S = \{\underbrace{VV,\ AA}_{\text{Região Crítica}},\ \overbrace{AV,\ VA}^{\text{Região De Não Rejeição}}\}$$

Região Crítica

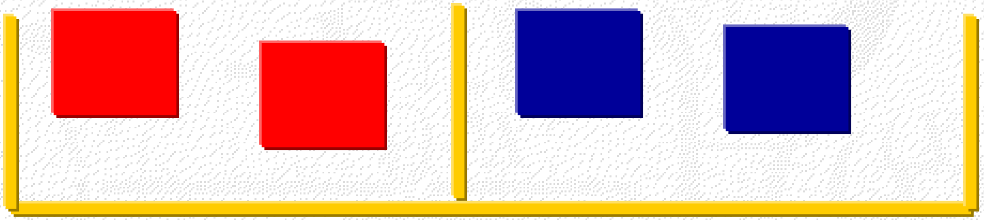
Sob $\mathcal{H}_0$: $\theta = 2$



Cálculo do Erro do Tipo I, i. é, nível de significância do teste

O erro do tipo I é a probabilidade de rejeitar H_0 quando ela é verdadeira, neste caso ele é a probabilidade de retirarmos duas fichas da mesma cor, quando a urna tem duas de cada cor.

$$\text{Sob } \mathcal{H}_0: \ \theta = 2$$



$$\alpha = P(\text{Erro do Tipo I}) =$$

$$= P(\text{Rejeitar } \mathcal{H}_0 / \mathcal{H}_0 \text{ é verdadeira}) =$$

$$= P(VV, \ AA / \theta = 2) =$$

$$= \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{12} + \frac{2}{12} =$$

$$= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = 33{,}33\%$$

Cálculo do Poder do Teste

O poder do teste é a probabilidade de Rejeitar H_0 quando ela é falsa, é uma decisão correta. É calculada sob a região crítica. Neste caso é a $P(VV, AA \,/\, H_0 \text{ é falsa})$

MAS

$$1-\beta = P(VV, AA / H_0 \text{ é falsa}) =$$

$$= P(VV, AA / H_1 \text{ é verdadeira}) =$$

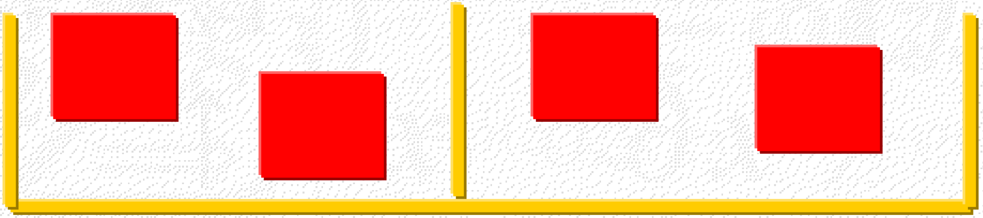
$$= P(VV, AA / \theta \neq 2).$$

Assim devemos analisar quatro situações:

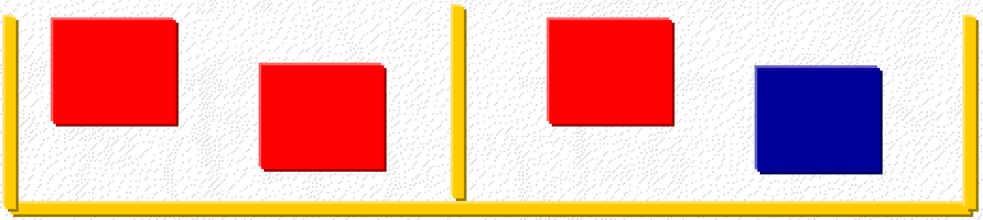
$$\theta = 0,\ \theta = 1,\ \theta = 3 \text{ e } \theta = 4$$

ISTO É:

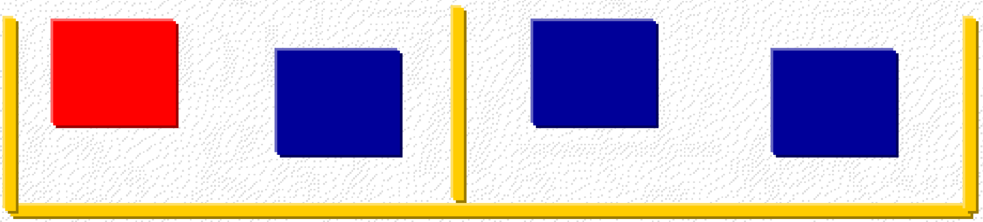
$$\theta = 0$$



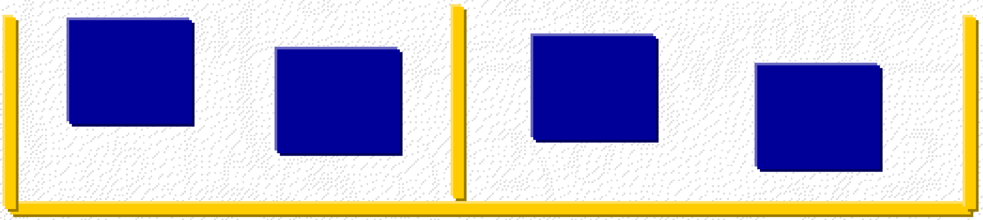
$$\theta = 1$$



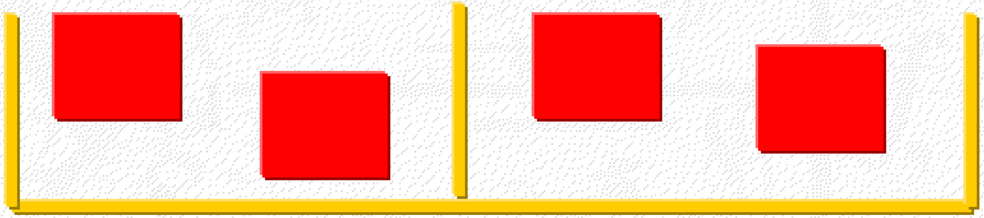
$$\theta = 3$$



$$\theta = 4$$



$\theta = 0$

Neste caso 

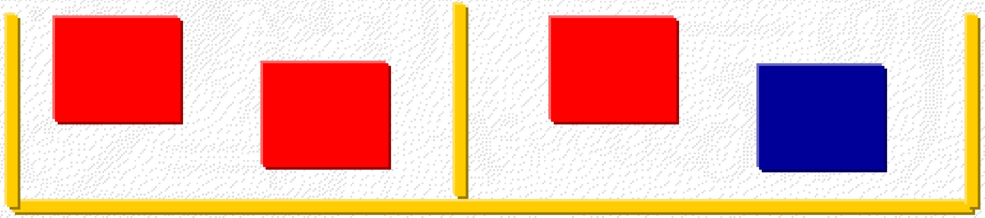
Então:

$$1-\beta = P(VV, AA / \theta \neq 2) =$$

$$= P(VV, AA / \theta = 0) =$$

$$= \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{3} + 0 = 1 = 100\%$$

$\theta = 1$

Neste caso 

Então:

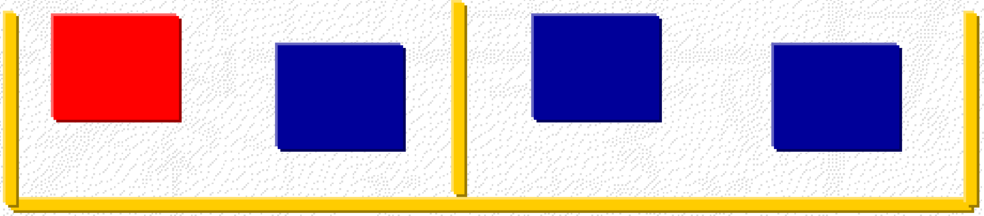
$$1 - \beta = P(VV, AA / \theta \neq 2) =$$

$$= P(VV, AA / \theta = 1) =$$

$$= \frac{3}{4} . \frac{2}{3} + 0 = \frac{1}{2} = 50\%$$

$\theta = 3$

Neste caso



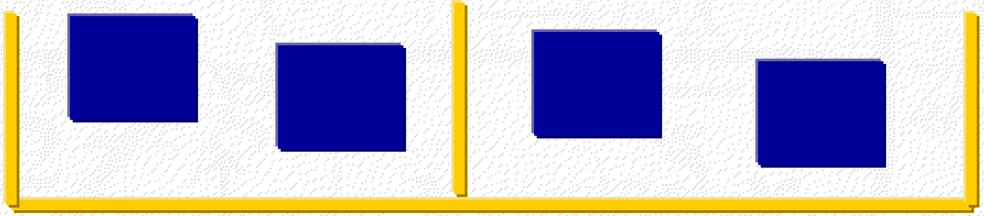
Então:

$$1\text{-}\beta = P(VV,\ AA \,/\, \theta \neq 2) =$$

$$= P(VV,\ AA \,/\, \theta = 3) =$$

$$= 0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2} = 50\%$$

$\theta = 4$

Neste caso 

Então:

$$1-\beta = P(VV,\ AA / \theta \neq 2) =$$

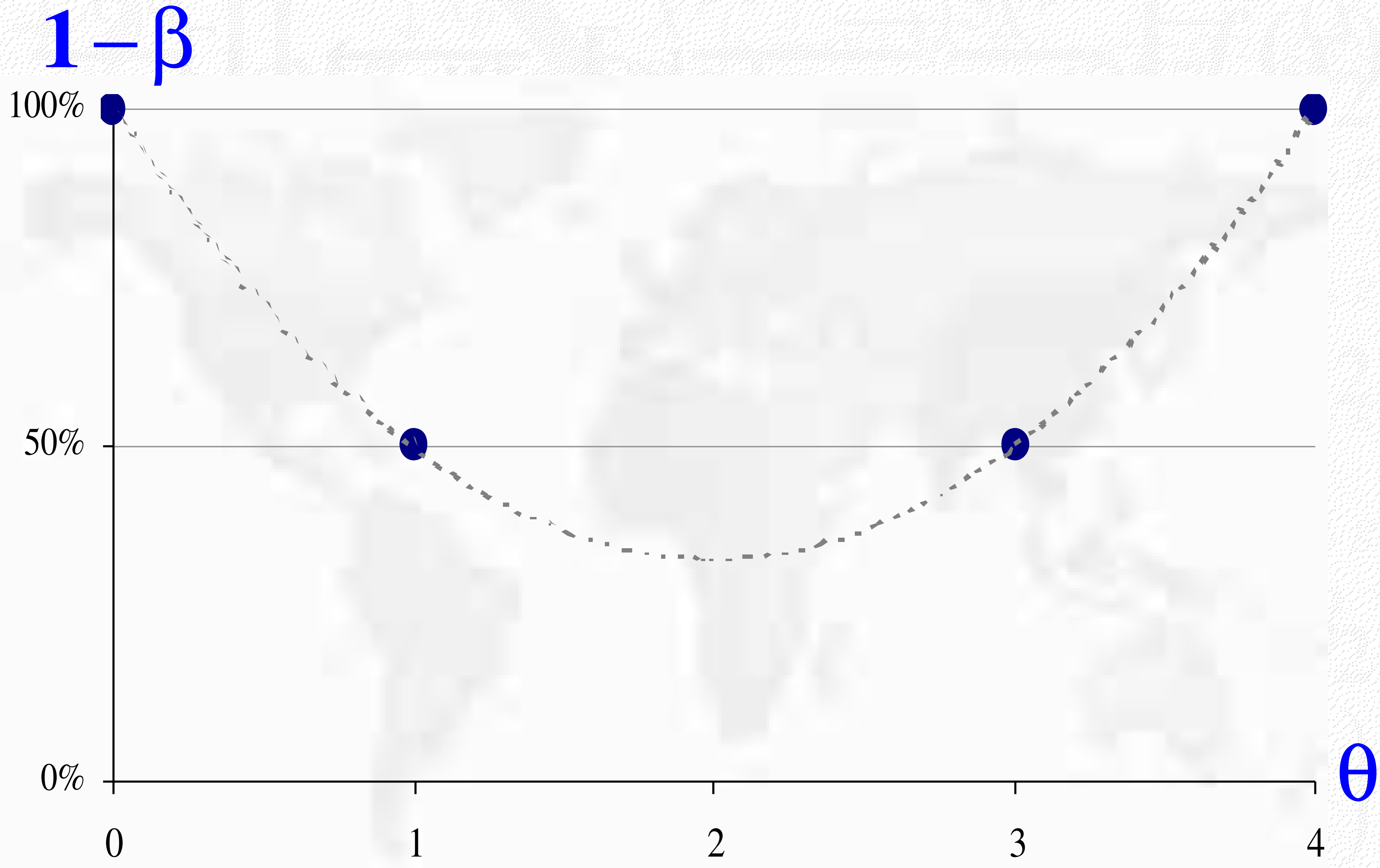
$$= P(VV,\ AA / \theta = 0) =$$

$$= 0 + \frac{4}{4}.\frac{3}{3} = 1 = 100\%$$

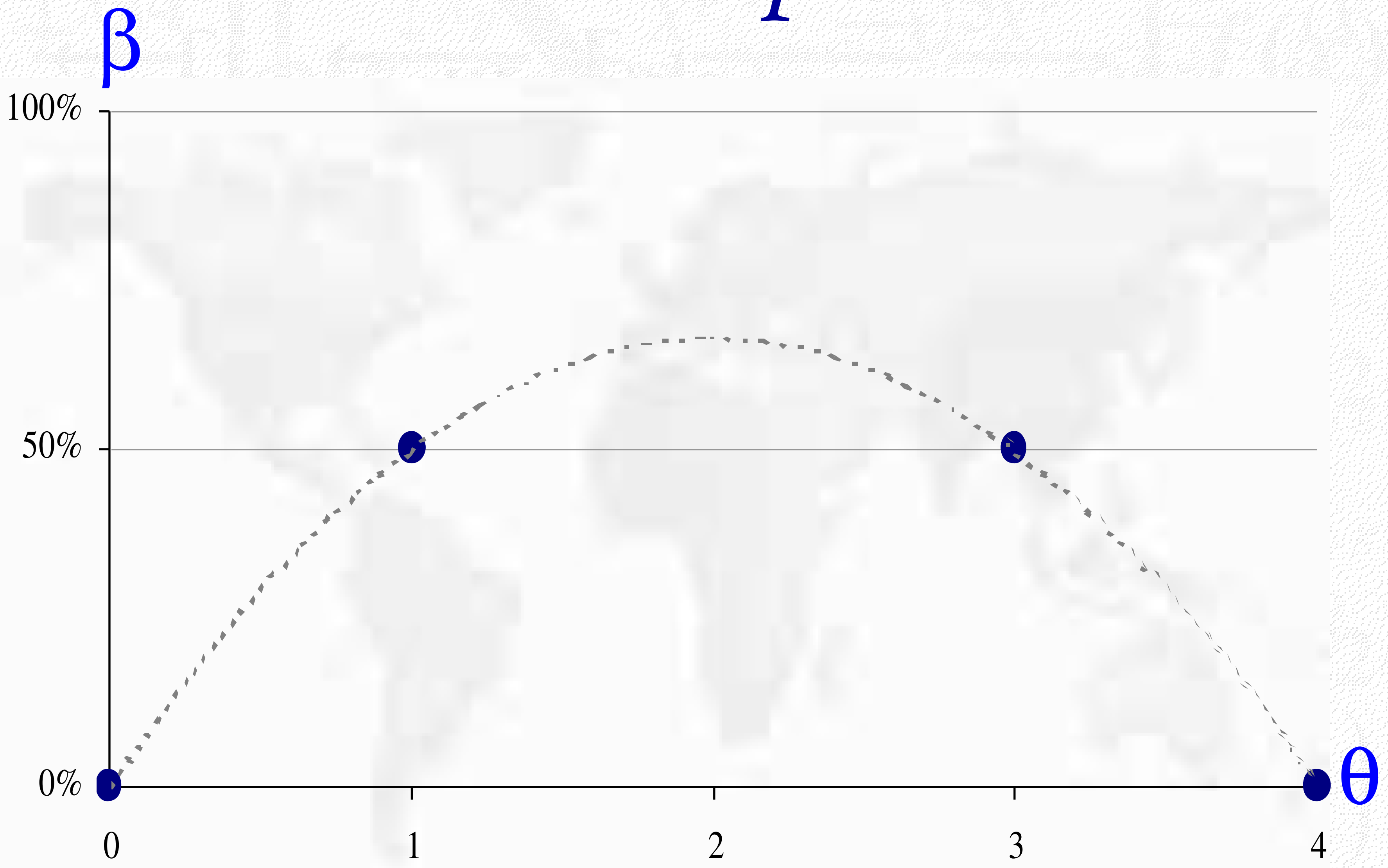
Em Resumo, tem-se:

θ	β	$1 - \beta$	α
0	0%	100%	
1	50%	50%	
2	-	-	33,33%
3	50%	50%	
4	0%	100%	

Poder do Teste



Erro do Tipo II



Exemplo

2

Um dado é lançado seis vezes para testar a hipótese nula de que $P(F_1) = 1/6$ contra a alternativa de que $P(F_1) > 1/6$ Rejeita-se a hipótese nula se X = "número de faces um for maior ou igual a quatro". Determinar o nível de significância e o poder do teste.

Espaço amostra

Região De Rejeição (Crítica)

$$S = \{\underbrace{0,\ 1,\ 2,\ 3}_{},\ \overbrace{4,\ 5,\ 6}^{}\}$$

Região de Não Rejeição

$$\mathcal{H}_0:\ p = 1/6$$

$$\mathcal{H}_0:\ p > 1/6$$

Cálculo do Erro do Tipo I, i. é, nível de significância do teste

O erro do tipo I é a probabilidade de rejeitar $\mathcal{H}_0$ quando ela é verdadeira, neste caso ele é a probabilidade de obtermos $X \geq 4$, quando $n = 6$ e $p = 1/6$.

$$Sob\ \mathcal{H}_0:\ p = 1/6$$

$$\alpha = P(\text{Erro do Tipo I}) =$$

$$= P(\text{Rejeitar } \mathcal{H}_0 / \mathcal{H}_0 \text{ é verdadeira}) =$$

$$= P(X \geq 4 / p = 1/6) =$$

$$= \binom{6}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^0 =$$

$$= \frac{15.25}{6^6} + \frac{6.5}{6^6} + \frac{1}{6^6} = \frac{406}{6^6} = 0{,}87\%$$

Cálculo do Poder do Teste

O poder do teste é a probabilidade de Rejeitar $\mathcal{H}_0$ quando ela é falsa, é uma decisão correta. É calculada sob a região crítica. Neste caso é $P(X \geq 4 / \mathcal{H}_0 \text{ é falsa})$

MAS

$$1-\beta = P(X \geq 4 \,/\, H_0 \text{ é falsa}) =$$

$$= P(X \geq 4 \,/\, H_1 \text{ é verdadeira}) =$$

$$= P(X \geq 4 \,/\, p > 1/6).$$

Neste caso, o poder do teste é uma função de p. Vamos avaliar esta função para alguns valores de "p".

Poder do teste para $p > 1/6$

p	$1-\beta$	p	$1-\beta$	p	$1-\beta$
0,20	1,70	0,55	44,15	0,90	98,41
0,25	3,76	0,60	54,43	0,95	99,78
0,30	7,05	0,65	64,71	1,00	100,00
0,35	11,74	0,70	74,43		
0,40	17,92	0,75	83,06		
0,45	25,53	0,80	90,11		
0,50	34,37	0,85	95,27		

Poder do Teste x Erro do Tipo II