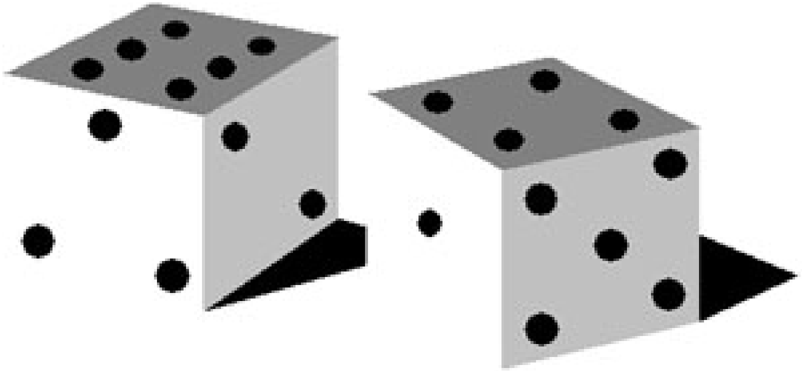
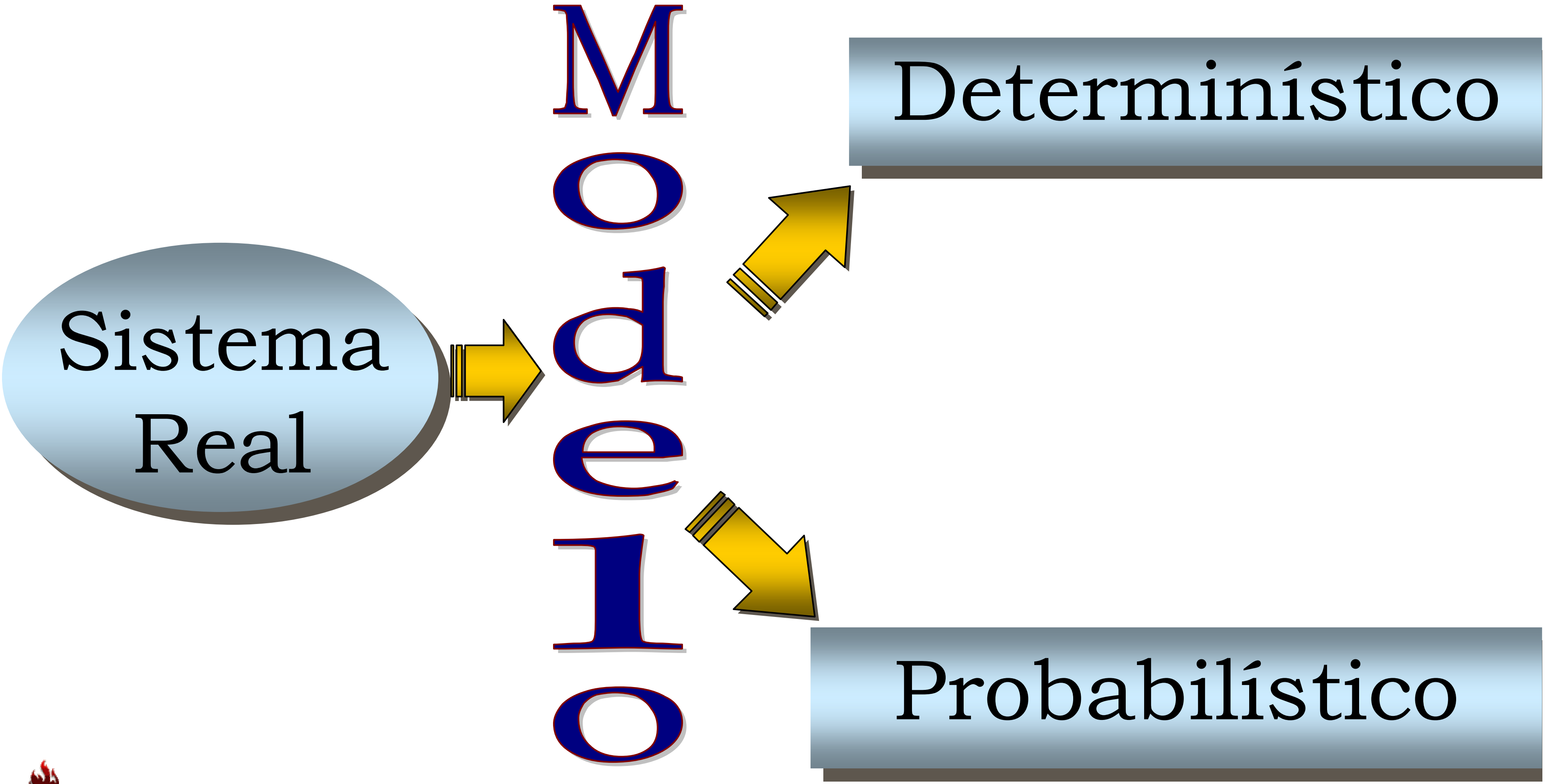


Mat02219 - Probabilidade

Prof. Lorí Viali, Dr.
viali@mat.ufrgs.br
http://www.mat.ufrgs.br/~viali/

1/4

Tipos de Modelos



Modelo Determinnístico

Causas → **Efeito**

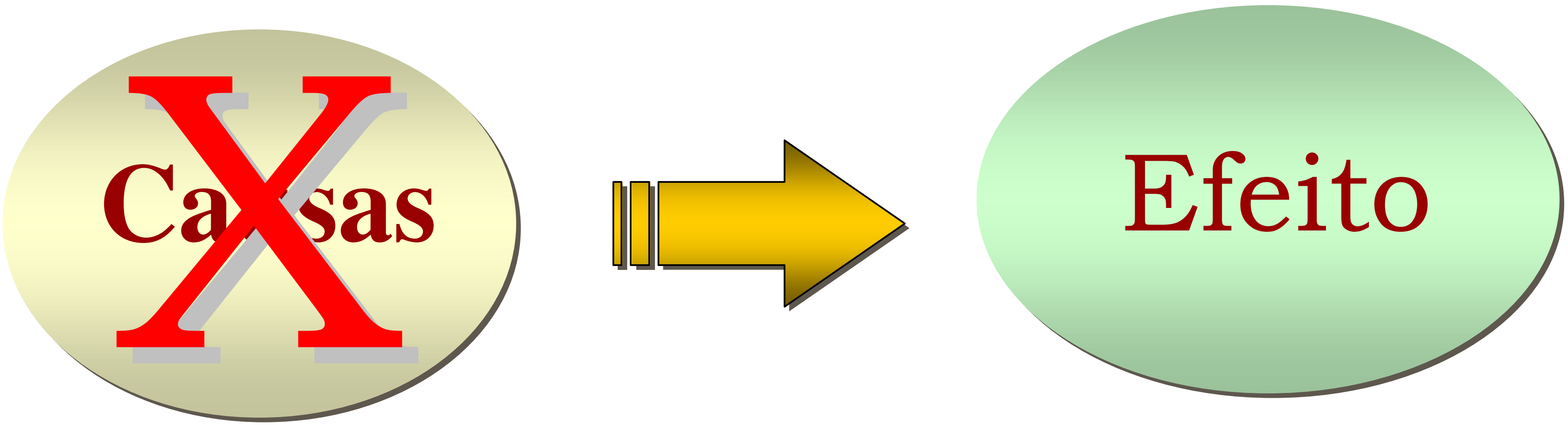
Exemplos

Gravitação → $F = GM_1M_2/r^2$

Aceleração clássica → $v = at$

Aceleração relativística → $v = \dfrac{at}{\sqrt{1 + \dfrac{a^2t^2}{c^2}}}$

Modelo Probabilístico



Exemplos

Binomial

$$f(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}.p^{x}.(1-p)^{n-x} & x\in\{0,1,\ldots,n\}\\ 0 & c.c.\end{cases}$$

Poisson

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{x}.e^{-\lambda}}{x!} & x\in \mathbf{N}\\ 0 & c.c.\end{cases}$$

Normal

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2}}, \quad x\in\Re$$

Experimento Aleatório

Experiência para o qual o modelo probabilístico é adequado.

Características

❶ Não é possível prever um resultado particular, mas pode-se enumerar todos os possíveis;

❷ Podem ser repetidos inúmeras vezes sob as mesmas condições;

❸ Quando repetidos um grande número de vezes apresentam regularidade em termos de freqüências.

Exemplos

E_1: Joga-se um dado e observa-se o número da face superior.

E_2: Joga-se uma moeda quatro vezes e observa-se o número de caras e coroas;

E_3: Joga-se uma moeda quatro vezes e observa-se a seqüência de caras e coroas;

E_4: Uma lâmpada nova é ligada e conta-se o tempo gasto até queimar;

E_5: Joga-se uma moeda até que uma cara seja obtida. Conta-se o número de lançamentos necessários;

E_6: Uma carta de um baralho comum de 52 cartas é retirada e seu naipe registrado;

E_7: Jogam-se dois dados e observa-se o par de valores obtido;

Espaço Amostra(l)

É o conjunto de resultados de uma experiência aleatória.

Exemplos

$$S_1 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

$$S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$S_3 = \{\text{ cccc, ccck, cckc, ckcc, kccc, cckk, kkcc, ckkc, kcck, ckck, kckc, kkkc, kkck, kckk, ckkk, kkkk}\}$$

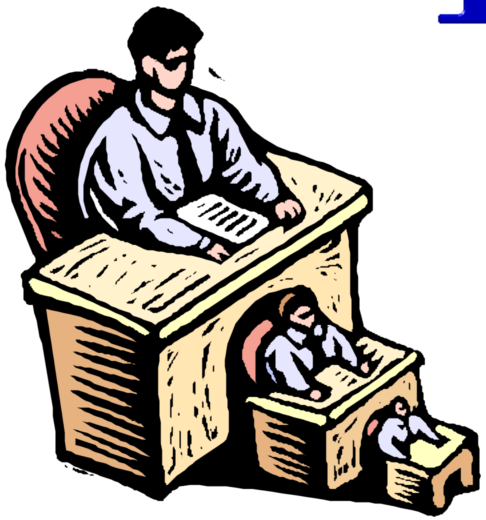
$$S_4 = \{ t \in \mathbf{R} \,/\, t \geq 0 \}$$

$$S_5 = \{1,\ 2,\ 3, ...\}$$

$S_6 = \{♦, ♠, ♣, ♥\}$

$$
\begin{aligned}
S_7 = \{\, & (1, 1), (1, 2), (1,3), (1, 4), (1, 5), (1, 6) \\
& (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6) \\
& (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6) \\
& (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6) \\
& (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6) \\
& (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \,\}
\end{aligned}
$$

Eventos



Um evento é um subconjunto de um espaço amostra.

Exemplo

Seja S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } um espaço amostra.

Então são eventos:

A = { 1, 3, 5}   B = { 6 }

C = { 4, 5, 6}   D = $\varnothing$ E = S

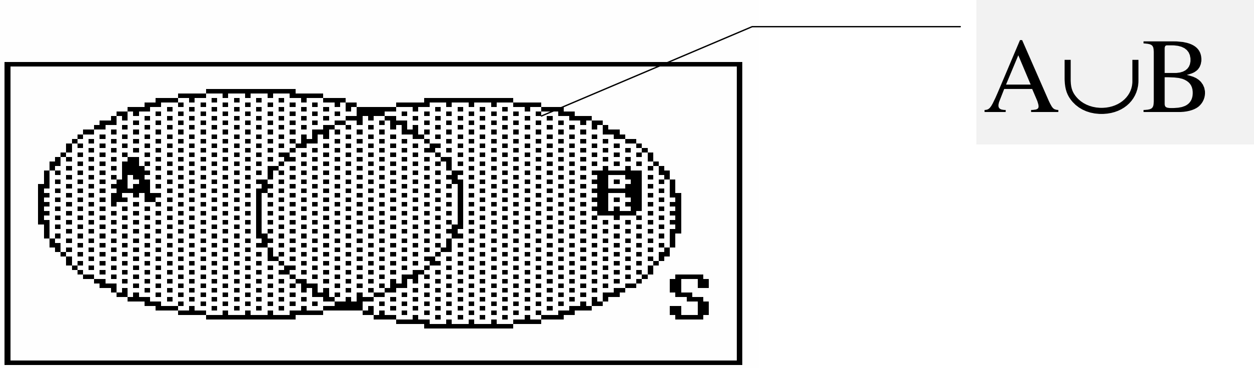
Ocorrência de um evento

Seja E um experimento com espaço amostra associado S. Diremos que o evento A ocorre se realizado E o resultado é um elemento de A.

Combinação de eventos

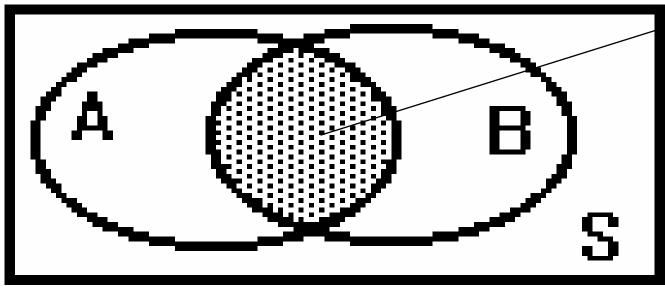
Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

A união B, A soma B ou A mais B, se e só se A ocorre ou B ocorre.



Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

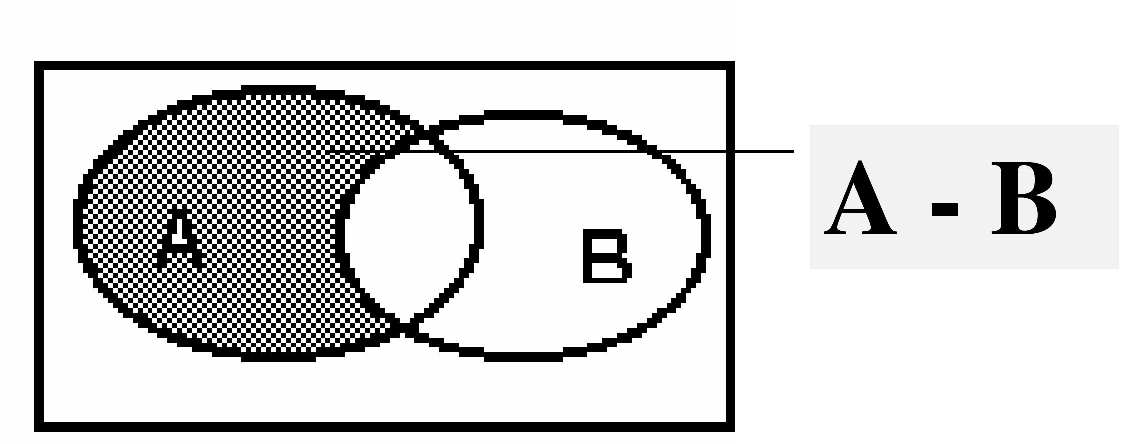
A produto B, A vezes B ou A interseção B, se e só se A ocorre e B ocorre.



$A \cap B$

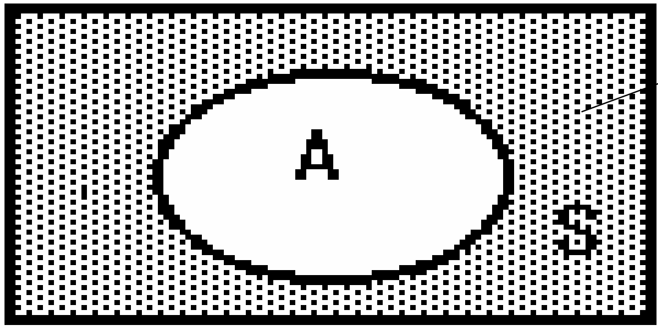
Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

A menos B, A diferença B, se e só se A ocorre e B não ocorre.



Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

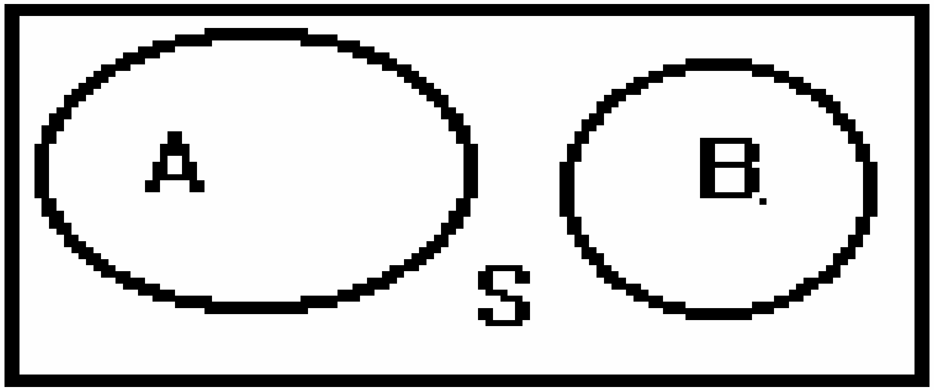
Complementar de A (não A) se e só se A não ocorre.



$$A' = A^C = \overline{A}$$

Eventos mutuamente excludentes

Dois eventos A e B são mutuamente excludentes se não puderem ocorrer juntos.



Propriedades das operações entre eventos

Leis Comutativas

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Leis Associativas

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Leis Distributivas

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup \ )$$

Leis de De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Outras Propriedades

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cap \overline{B} = A - B$$

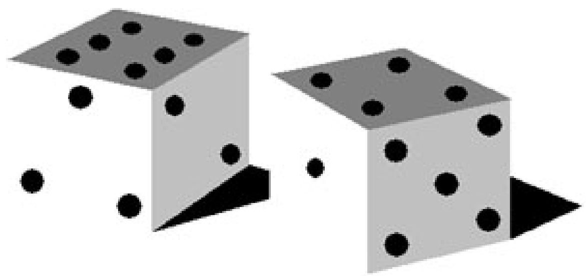
$$\overline{A} \cap B = B - A$$

Conceitos de Probilidade

- ♣ CLÁSSICO
- ♥ FREQÜENCIAL
- ♠ AXIOMÁTICO

CLÁSSICO

$$P(A) = \frac{\text{(número de casos favoráveis)}}{\text{(número de casos possíveis)}}$$



Exemplo

Qual a probabilidade de ganhar na Loto Fácil?

Solução:

Casos favoráveis = 1

Casos possíveis:

$$\binom{25}{15} = 3268760$$

$$\mathrm{P(Loto\ Fácil)} =$$

$$= \frac{\text{Número de favoráveis}}{\text{Número de possíveis}} =$$

$$= \frac{1}{\binom{25}{15}} = \frac{1}{3268760} = 0{,}000031\%$$

Freqüência Relativa

$$fr_A = \frac{(\text{número de vezes que A ocorre})}{(\text{número de vezes que E é repetido})}$$

Exemplo

Um dado é lançado 120 vezes e apresenta "FACE SEIS" 18 vezes.

Então, a freqüência relativa de "FACE SEIS" é:

$$fr_6 =$$

$$= \frac{\text{número de vezes que "f\_seis" ocorre}}{\text{número de vezes que o dado é jogado}}$$

$$= \frac{18}{120} = 0{,}15 = 15\%$$

Conceito freqüencial de probabilidade

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} fr_A$$

Conceito Axiomático

P(A) é um número real que deve satisfazer as seguintes propriedades:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(S) = 1$

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

se $A \cap B = \varnothing$

Conseqüências dos Axiomas (Teoremas)

$$(1)\ P(\varnothing) = 0$$

$$(2)\ P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$(3)\ P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$(4)\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$(5)\ P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$

$$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) +$$

$$+ P(A \cap B \cap C)$$

Probabilidade Condicionada

Motivação

Considere uma urna com 50 fichas, onde 40 são pretas e 10 são brancas.

Suponha que desta urna são retiradas “duas” fichas, ao acaso e sem reposição:

Sejam os eventos:

A = { a primeira ficha é branca}

B = { a segunda ficha é branca}

Então:

$$P(A) = 10/50 = 0,20 = 20\%$$

$$P(B) = ?/49$$

Neste caso, não se pode avaliar P(B), pois para isto é necessário saber se A ocorreu ou não, isto é, se saiu ficha branca na primeira retirada.

Se for informado que A ocorreu, então a probabilidade de B, será:

$$P(B|A) = 9/49 = 0{,}1837 = 18{,}37\%$$

Observe a notação

Esta representação é lida:

P de B dado A;

P de B dado que A ocorreu;

P de B condicionada a A.

Definição:

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$$

Mas:

Se $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$ então:

$$P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$$

Também:

Se $P(B|A) = P(A \cap B) / P(A)$ então:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$$

Assim:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = P(A|B).P(B)$$

Esse resultado é conhecido como:

Teorema da multiplicação

Independência

Dois eventos A e B são ditos independentes se a probabilidade de um ocorrer não altera a probabilidade do outro ocorrer, isto é:

Definição:

(1) $P(A|B) = P(A)$

(2) $P(B|A) = P(B)$

(3) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Observação:

(1) $P(A|B) = P(A)$

(2) $P(B|A) = P(B)$

(3) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Independência (em geral)

Diremos que os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ são independentes só se:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Para provar que dois eventos são independentes basta verificar uma situação, para três quatro situações e para n eventos deve-se verificar $2^n - n - 1$ situações.

Independência em pares

Dados os eventos A_1, A_2, ..., A_n eles são independentes aos pares se e só se:

$P(A_i \cap A_j) = P(A_i).P(A_j)$ para qualquer i, j = 1, 2, ..., n.

Ser independente aos pares não significa ser independente.

Considere o seguinte espaço amostra:

$S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ tal que $P(\{a_i\}) = ¼$.

Sejam A $\{a_1, a_3\}$, $B = \{a_3, a_4\}$ e $C = \{a_2, a_3\}$.

Então: $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$.

Assim $P(AB) = P(AC) = P(BC) = ¼ = (1/2)^2$

Mas $P(ABC) = P(\{a_3\}) = ¼ \neq (1/2)^3$

Partição de um espaço amostra

Diz-se que os conjuntos:

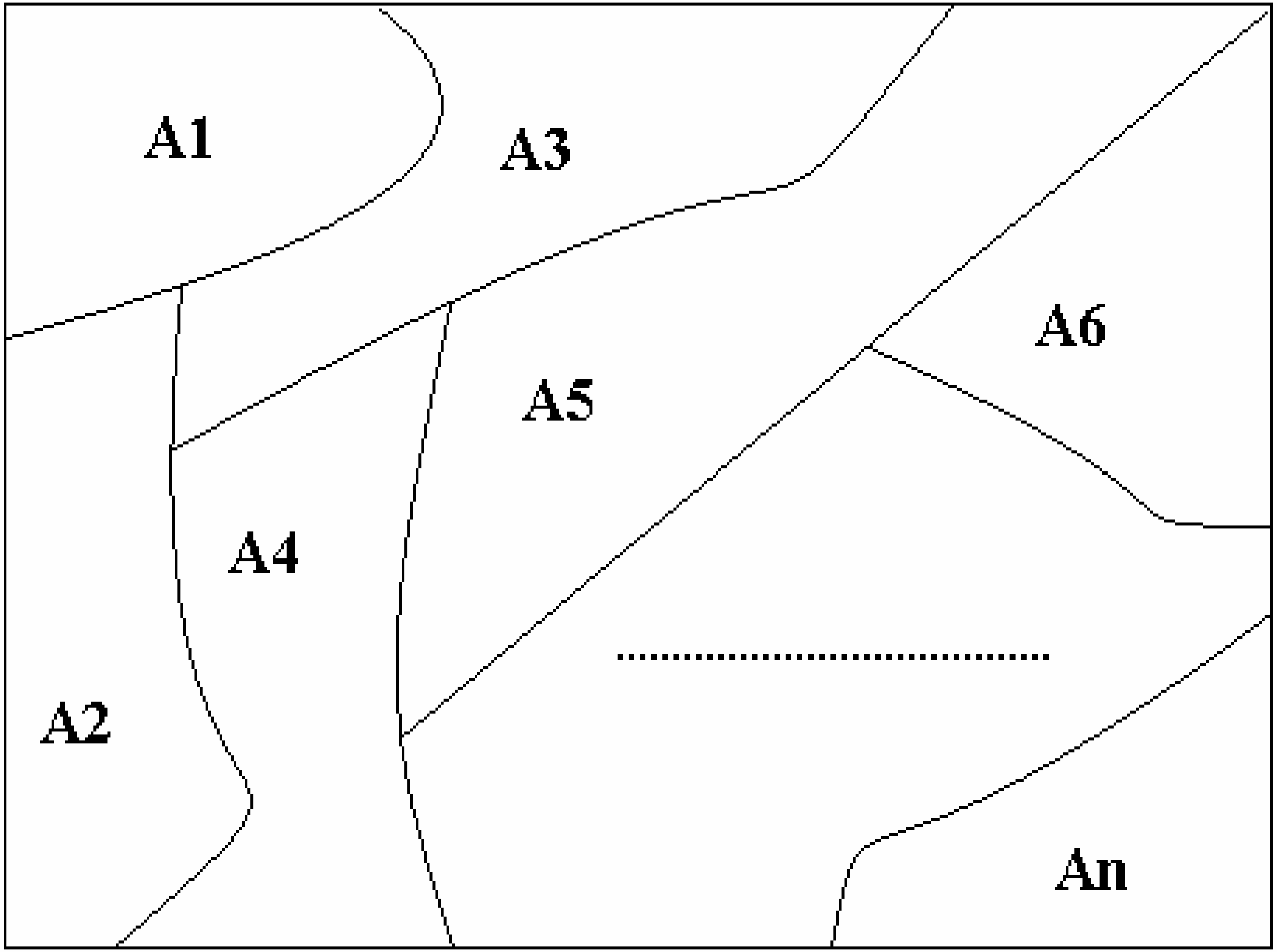
$A_1, A_2, ..., A_n$

eventos de um mesmo espaço amostra S, formam uma partição deste espaço se:

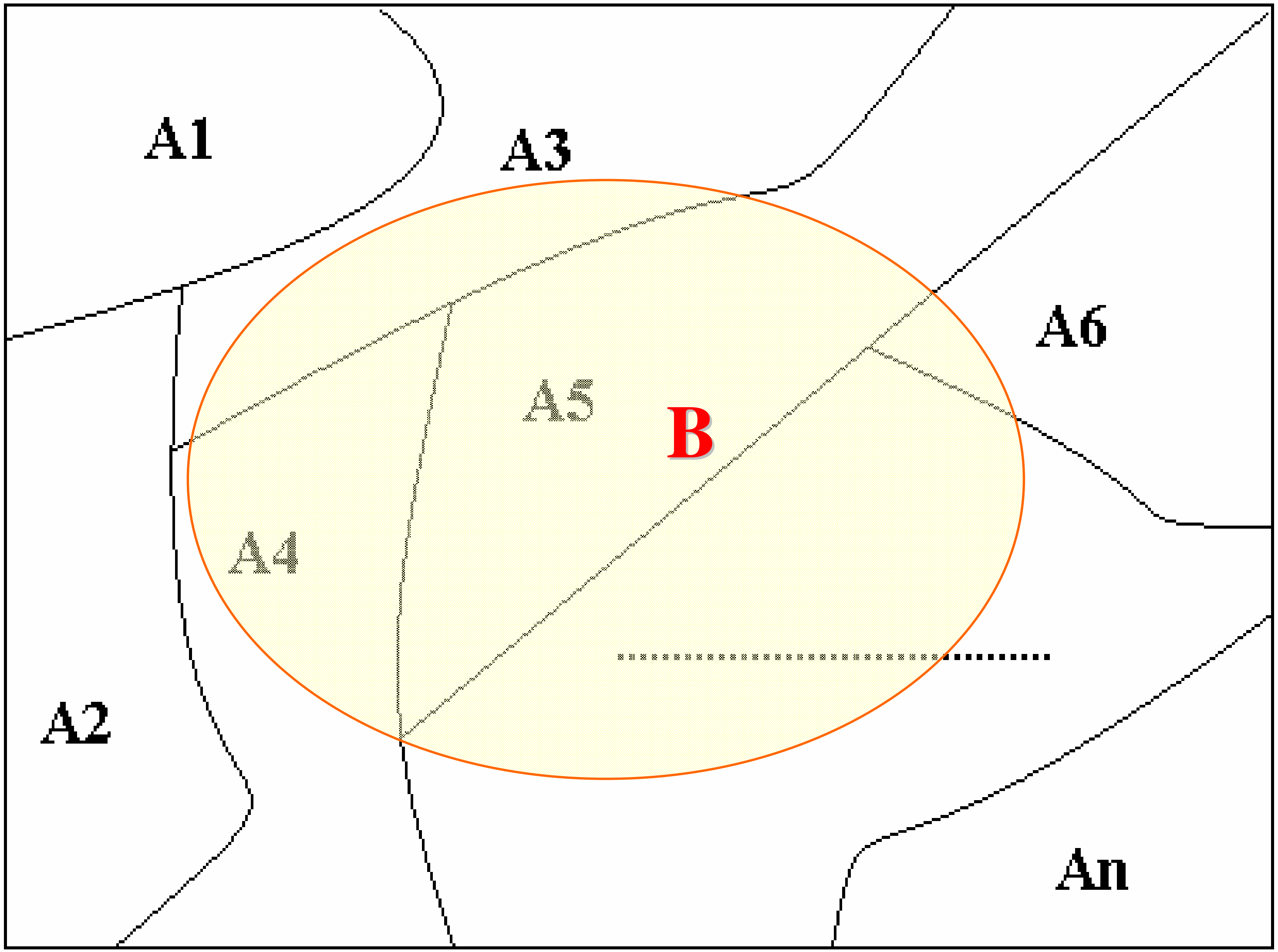
(1) $A_i \cap A_j = \varnothing$, para todo $i \neq j$

(2) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$

(3) $P(A_i) > 0$, para todo i

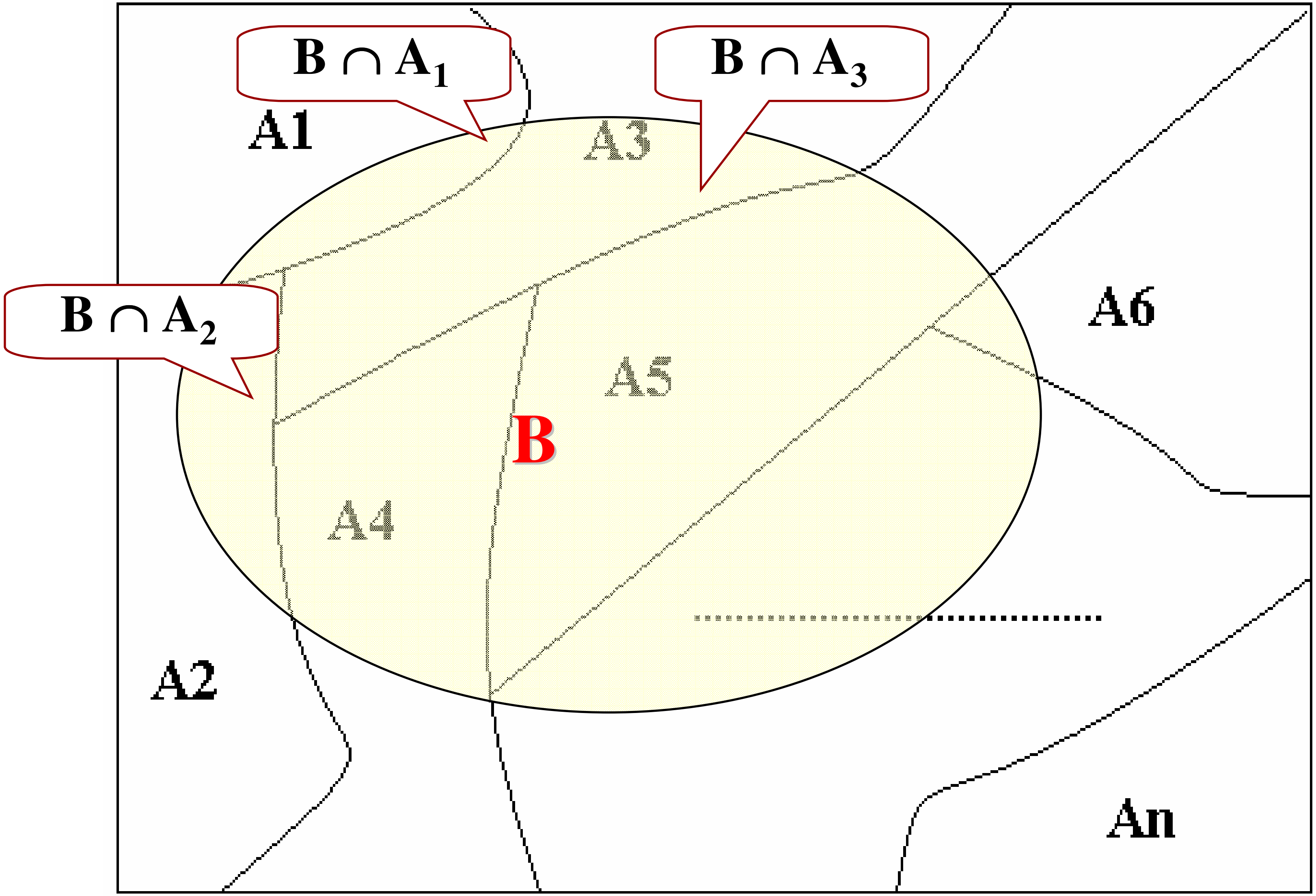

A1
A3
A6
A5
A4
A2
An

Teorema da probabilidade total


A1
A3
A6
A5
B
A4
A2
An

B pode ser escrito como:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$$



B ∩ A1
B ∩ A3
B ∩ A2
A1
A3
A6
A5
B
A4
A2
An

P(B) será então:

$$P(B) = P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_1) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)]$$

$$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n) =$$

$$= \sum P(B \cap A_i) = \sum P(A_i).P(B/A_i)$$

Assim: $P(B) = \sum P(A_i).P(B/A_i)$

Exemplo

Uma peça é fabricada por três máquinas diferentes. A máquina "A" participa com 20% da produção, a "B" com 30% e a "C" com 50%.

Das peças produzidas por “A”, 5% são defeituosas, das de “B” 3% e das de “C” 1%.

Selecionada uma peça ao acaso da produção global qual a probabilidade de ela ser defeituosa.

Solução

Tem-se:

$$P(A) = 20\% \qquad P(D|A) = 5\%$$

$$P(B) = 30\% \qquad P(D|B) = 3\%$$

$$P(C) = 50\% \qquad P(D|C) = 1\%$$

$$P(D) = \sum P(A_i).P(D|A_i)$$

Então:

$P(D) =$

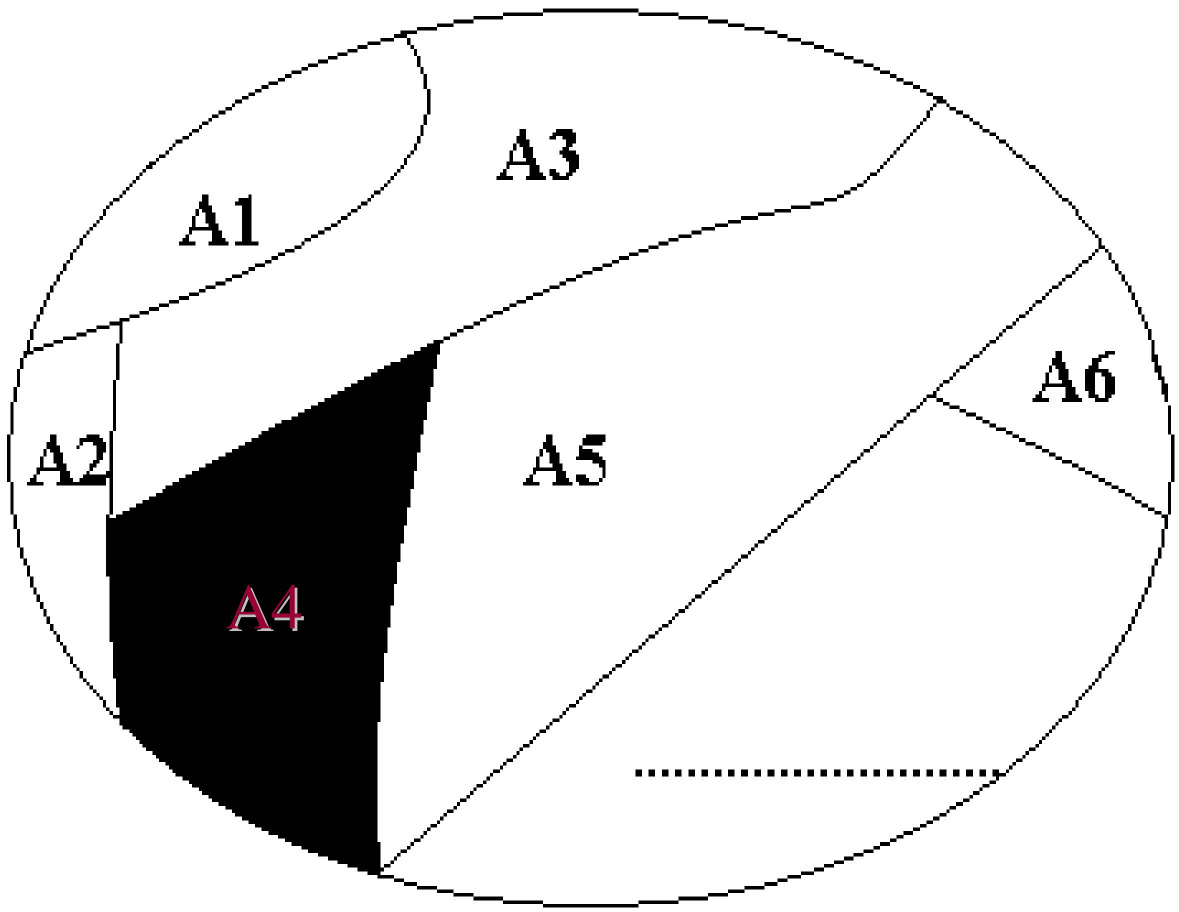
$= P(A).P(D|A) + P(B).P(D|B) + P(C).P(D|C) =$

$= 0{,}20.0{,}05 + 0{,}30.0{,}03 + 0{,}50.0{,}01 =$

$= 0{,}01 + 0{,}009 + 0{,}005 =$

$= 0{,}024 = 2{,}40\ \%$

Teorema
de
Bayes


A1
A3
A2
A6
A5
A4

Calcula a probabilidade de ocorrência de um dos "A_i" (que formam a partição) dado que ocorreu um evento qualquer "B".

Aplicando a expressão da probabilidade condicionada vem:

$$P(A_i | B) =$$

$$= P(A_i \cap B) / P(B) =$$

$$= P(A_i).P(B|A_i) / P(B)$$

Na expressão:

$$P(A_i | B) = P(A_i).P(B|A_i) / P(B)$$

o valor de P(B) (denominador) é obtido através do Teorema da Probabilidade Total.

Exemplo

Considerando o exercício anterior, suponha que uma peça seja selecionada e se verifique que ela é defeituosa. Qual a probabilidade de ela ter sido produzida pela máquina A?

Solução

Tem-se:

$P(A) = 20\%$ $\qquad$ $P(D|A) = 5\%$

$P(B) = 30\%$ $\qquad$ $P(D|B) = 3\%$

$P(C) = 50\%$ $\qquad$ $P(D|C) = 1\%$

$$P(D) = 2{,}40\%$$

Então:

$$P(A \mid D) =$$

$$= \frac{P(A).P(D \mid A)}{P(A).P(D \mid A) + P(B).P(D \mid B) + P(C).P(D \mid C)} =$$

$$= \frac{0,20.0,05}{0,20.0,05 + 0,30.0,03 + 0,50.0,01} =$$

$$= \frac{0,01}{0,024} = 41,67\%$$

Revisão de Combinatória

Fatorial

$$n! = n.(n-1).(n-2). \ldots .3.2.1$$

Obs.: (i) $0! = 1$

(ii) $n! = n.(n-1)!$

Princípio Fundamental da Contagem

Suponha que se possa fazer "n" escolhas independentes com:

- m_1 maneiras de fazer a escolha 1,
- m_2 maneiras de fazer a escolha 2,
- ....,
- m_n maneiras de fazer a escolha n.

Então existem $m_1.m_2. \ldots .m_n$ maneiras diferentes de fazer a seqüência inteira de escolhas.

Exemplo

Quantos números distintos de dois algarismos existem?

$$m_1.m_2 = 9.9 = 81$$

Permutações

Uma permutação é uma das possíveis maneiras de arranjar, ou ordenar, um conjunto de objetos.

O número de permutações de "r" objetos distintos é dado por:

$$P_r = r.(r - 1).(r - 2). \ldots . 3.2.1 = r!$$

Exemplo

Dado o conjunto { a, b, c, d }. O número de permutações possíveis é:

$$P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$$

Arranjos

O número de arranjos de "n" objetos distintos, tomados "r" a cada vez, onde $r \leq n$, é dado por:

$$A(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1)$$

Arranjos

O número de arranjos pode ser expresso em função do fatorial da seguinte forma:

$$A(n, r) = n! / (n - r)!$$

Exemplo

De um baralho de 52 cartas, 5 são retiradas sucessivamente e sem reposição. Quantas seqüências são possíveis?

$A(52, 5) = 52! / (52 - 5)! = 52.51.50.49.48 = 311\ 875\ 200$

Observação:

A PERMUTAÇÃO é um caso particular do ARRANJO, quando n = r.

$$A(n, r) = n! / (n - r)! = A(n, n) =$$

$$= n! / (n - n)! = n! / 0! = n!$$

Arranjo Completo

Se "r" elementos forem tomados de "n", onde são permitidas as repetições, isto é, o mesmo elemento pode ocorrer mais de uma vez, então o número de arranjos é dado por:

$$AC = n^r$$

Exemplo

De um baralho de 52 cartas, 5 são retiradas sucessivamente e <u>com</u> reposição. Quantas seqüências são possíveis?

$$AC(52, 5) = 52^5 = 418\ 195\ 493$$

Combinações

O número de combinações, ou subconjuntos, de "n" objetos tomados em grupos de "r", onde r ≤ n é dado por:

$$C(n, r) = n! / r!(n - r)!$$

Exemplo

Quantos são os cartões diferentes no jogo da Mega Sena?

$$C(n, r) = C(60, 6) =$$

$$60! / 6!(60 - 6)! = 50\ 063\ 860$$

Relação entre os três principais resultados

$$A(n, r) = P_r . C(n, r)$$

Pois

$$P_r . C(n, r) = r! . [n! / r!(n - r)!] =$$

$$= n! / (n - r)! = A(n, r)$$