

Mat2248

Probabilidade 1

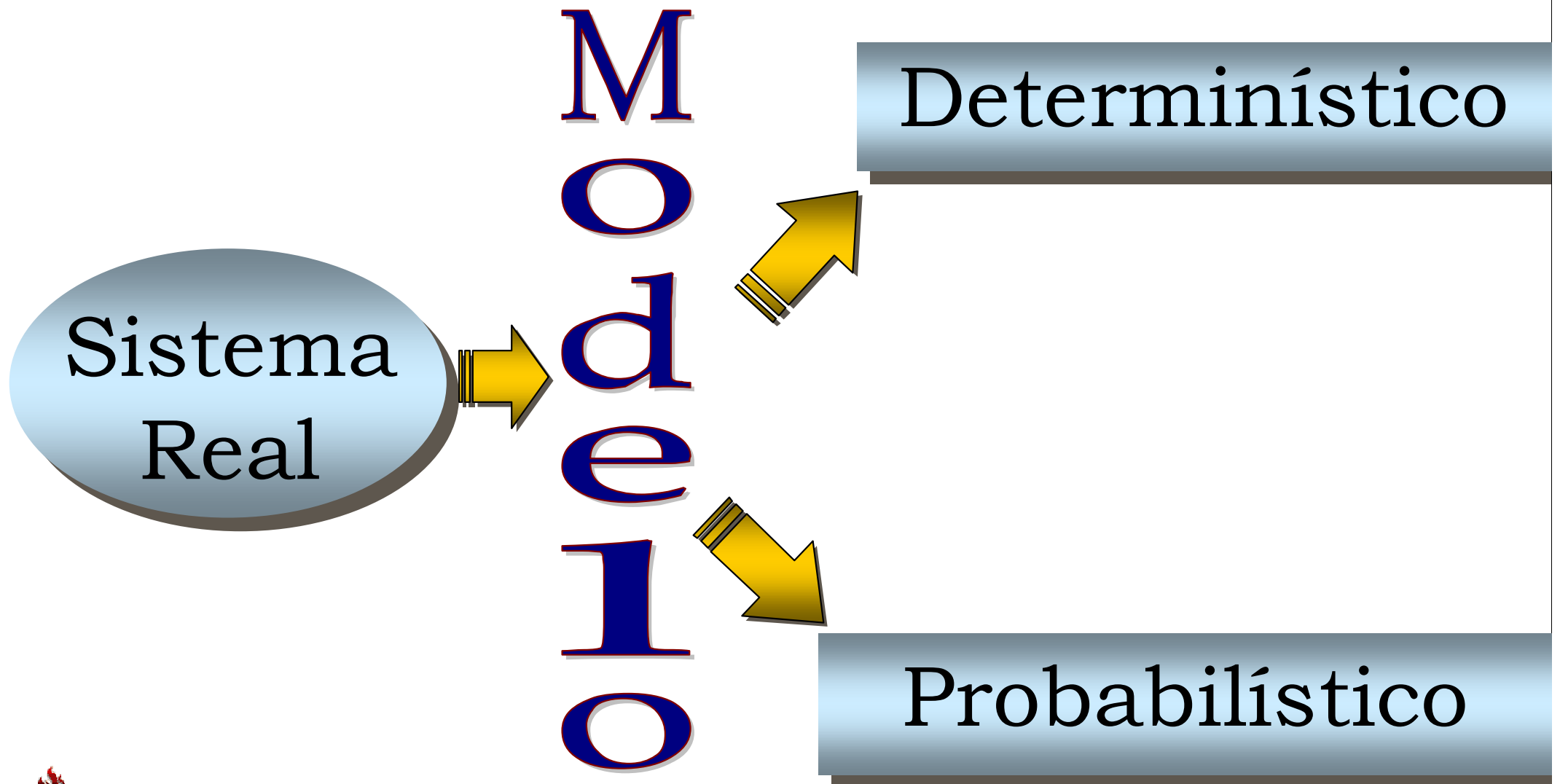
Prof. Lorí Viali, Dr.

viali@mat.ufrgs.br

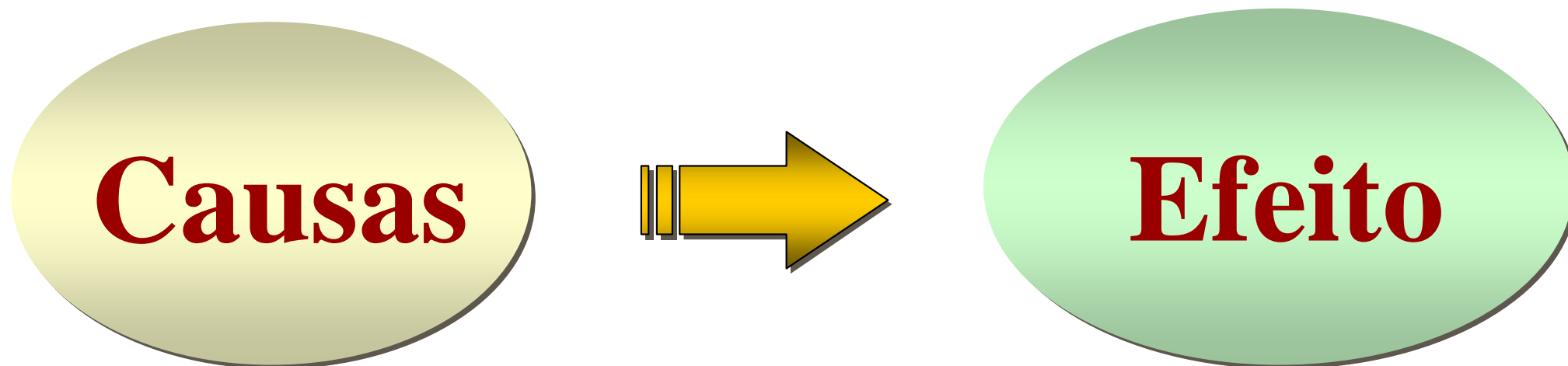
<http://www.mat.ufrgs.br/~viali/>

1/5

Tipos de Modelos

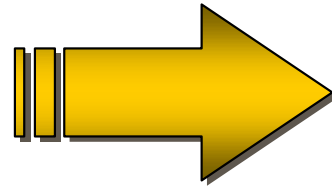


Modelo Determinístico



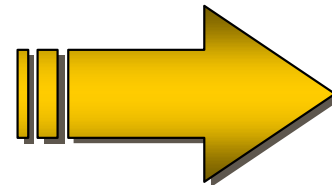
Exemplos

Gravitação



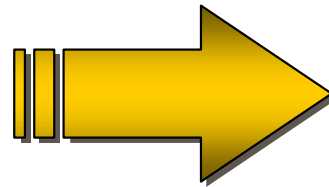
$$F = GM_1M_2/r^2$$

Aceleração
clássica



$$v = at$$

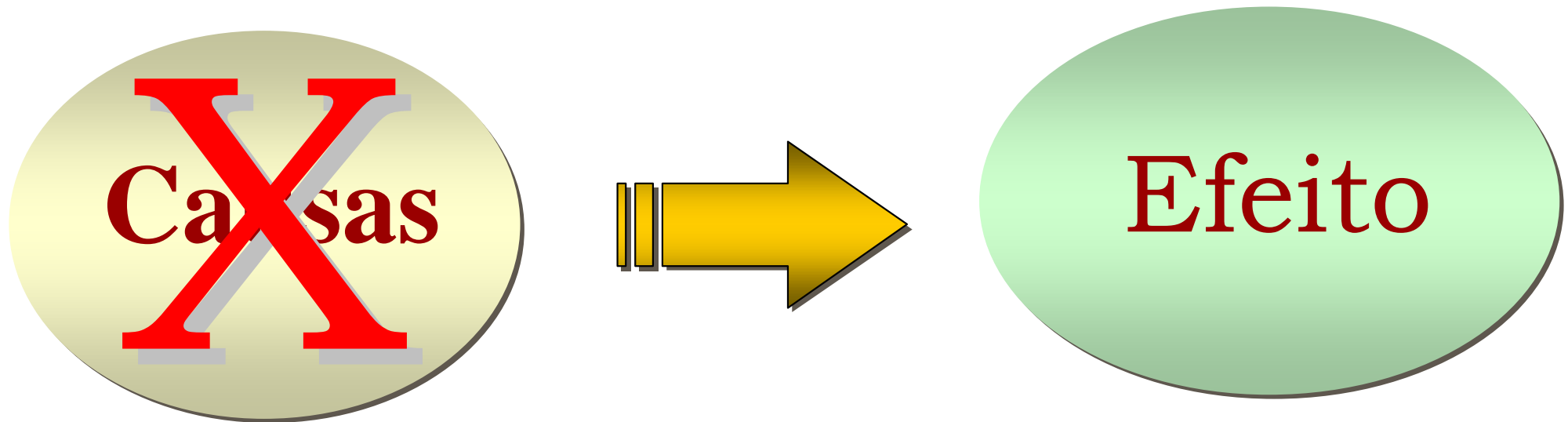
Aceleração
relativística



$$v = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}}$$



Modelo Probabilístico



Exemplos

Binomial

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} & x \in \{0, 1, \dots, n\} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Poisson

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} & x \in \mathbf{N} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$



Experimento Aleatório

Experiência para o qual o
modelo probabilístico é adequado.



Características

① Não é possível prever um resultado particular, mas pode-se enumerar todos os possíveis;



2 Podem ser repetidos inúmeras vezes sob as mesmas condições;



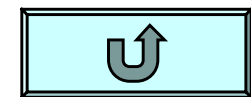
③ Quando repetidos um grande número de vezes apresentam regularidade em termos de frequências.



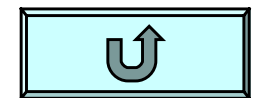
Exemplos



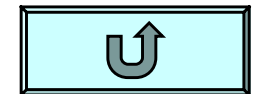
E_1 : Joga-se um dado e observa-se o número da face superior.



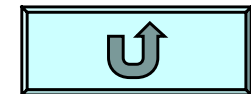
E_2 : Joga-se uma moeda quatro vezes e observa-se o número de caras e coroas;



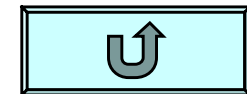
E_3 : Joga-se uma moeda quatro vezes e observa-se a sequência de caras e coroas;



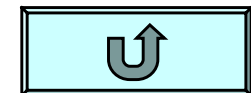
E₄: Uma lâmpada nova é ligada e conta-se o tempo gasto até queimar;



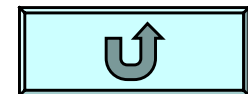
E_5 : Joga-se uma moeda até que uma cara seja obtida. Conta-se o número de lançamentos necessários;



E_6 : Uma carta de um baralho comum de 52 cartas é retirada e seu naipe registrado;



E₇: Jogam-se dois dados e observa-se o par de valores obtido;



Espaço Amostra(1)

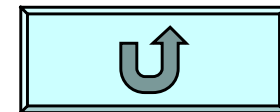
É o conjunto de resultados de
uma experiência aleatória.



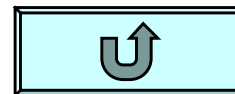
Exemplos



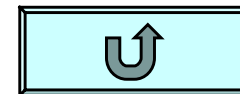
$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



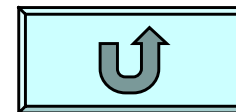
$$S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$



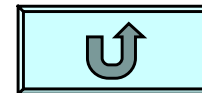
$$S_3 = \{ cccc, ccck, cckc, ckcc, \\ kccc, cckk, kkcc, ckkc, \\ kcck, ckck, kckc, kkkc, \\ kkck, kckk, ckkk, kkkk \}$$



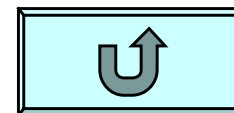
$$S_4 = \{ t \in \mathbf{R} / t \geq 0 \}$$



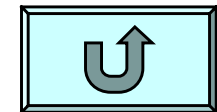
$$S_5 = \{1, 2, 3, \dots\}$$



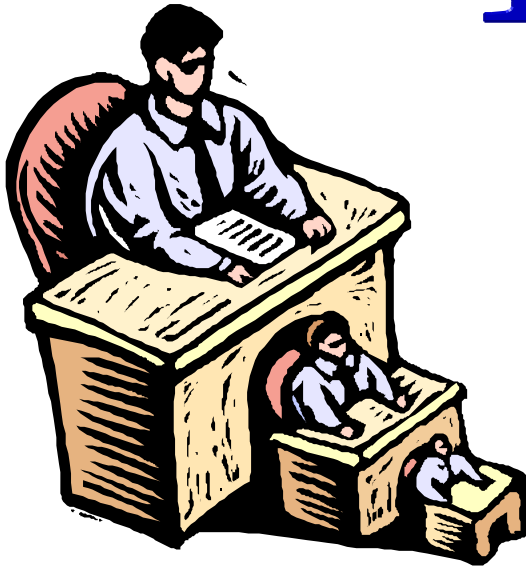
$$S_6 = \{ \spadesuit, \heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit \}$$



$$S_7 = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6) \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6) \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6) \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6) \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6) \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \}$$



Eventos



Um evento é um subconjunto de um espaço amostra.

Exemplo

Seja $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
um espaço amostra.

Então são eventos:

$$A = \{ 1, 3, 5 \} \quad B = \{ 6 \}$$

$$C = \{ 4, 5, 6 \} \quad D = \emptyset \quad E = S$$



Ocorrência de um evento

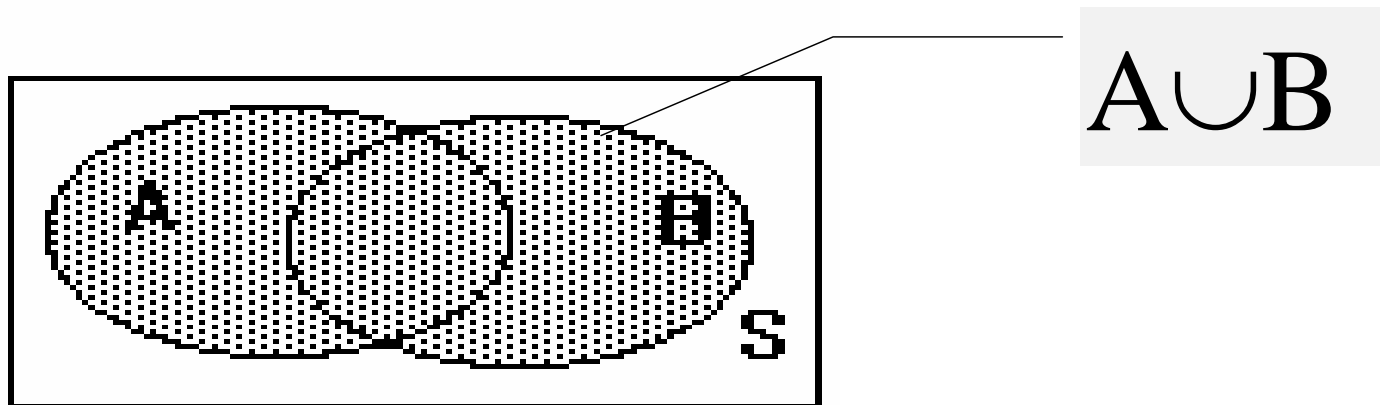
Seja E um experimento com espaço amostra associado S . Diremos que o evento A ocorre se realizado E o resultado é um elemento de A .



Combinação de eventos

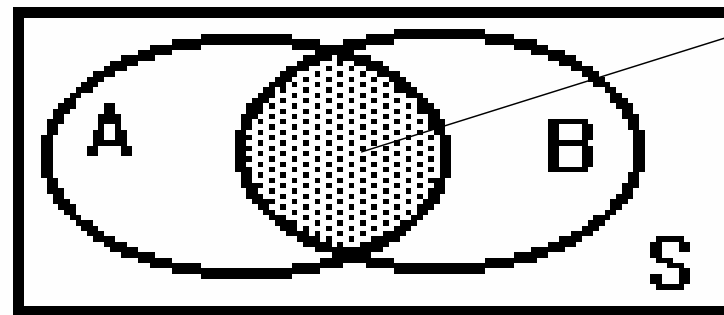
Sejam A e B eventos de um espaço S . Diremos que ocorre o evento:

A união B , A soma B ou A mais B ,
se e só se A ocorre ou B ocorre.



Sejam A e B eventos de um espaço S . Diremos que ocorre o evento:

A produto B , A vezes B ou A interseção B , se e só se A ocorre e B ocorre.

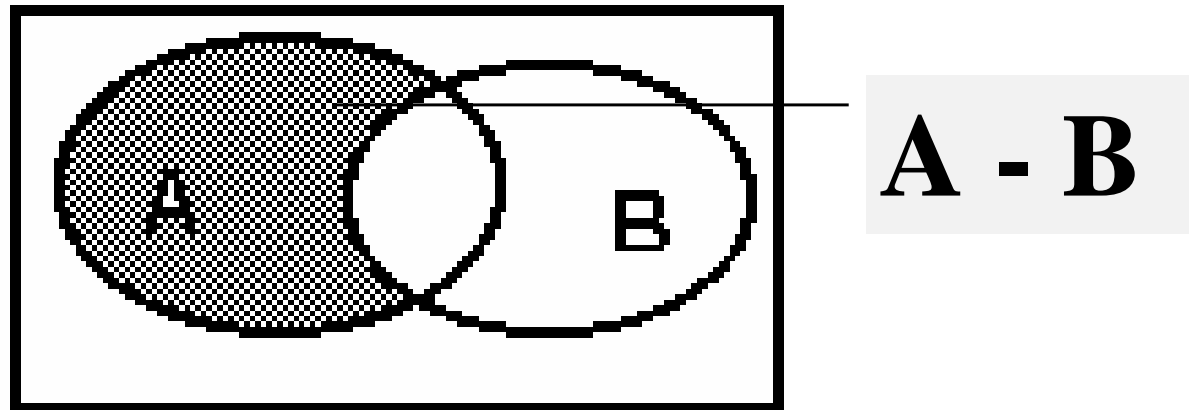


$$A \cap B$$



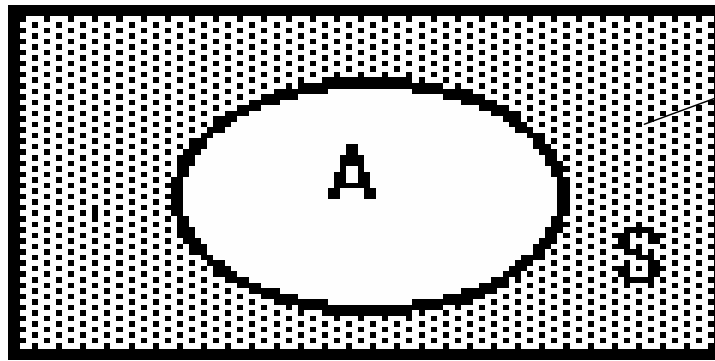
Sejam A e B eventos de um espaço S . Diremos que ocorre o evento:

A menos B , A diferença B , se e só se A ocorre e B não ocorre.



Sejam A e B eventos de um espaço S . Diremos que ocorre o evento:

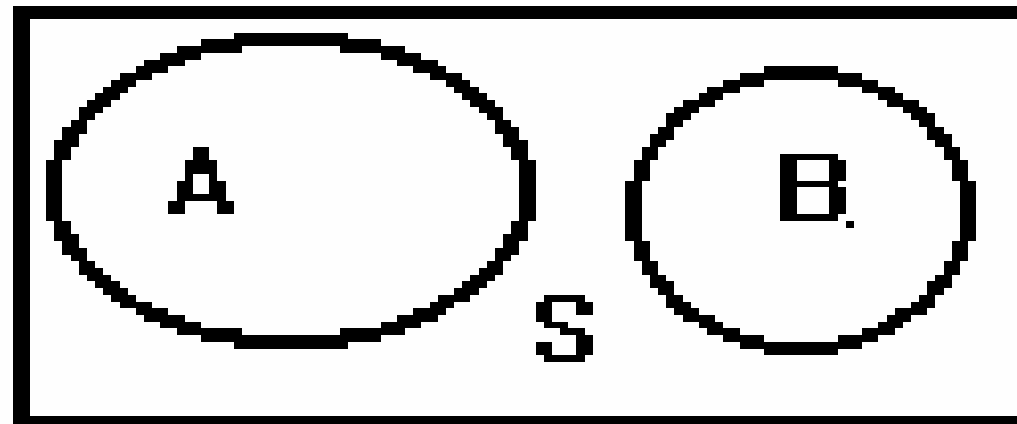
Complementar de A (não A) se e só se A não ocorre.



$$A' = A^C = \overline{A}$$

Eventos mutuamente excludentes

Dois eventos A e B são mutuamente excludentes se não puderem ocorrer juntos.



Propriedades das operações entre eventos



Leis Comutativas

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Leis Associativas

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$



Leis Distributivas

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Leis de De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$



Outras Propriedades

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cap \overline{B} = A - B$$

$$\overline{A} \cap B = B - A$$



Conceitos de Probabilidade

♣ CLÁSSICO

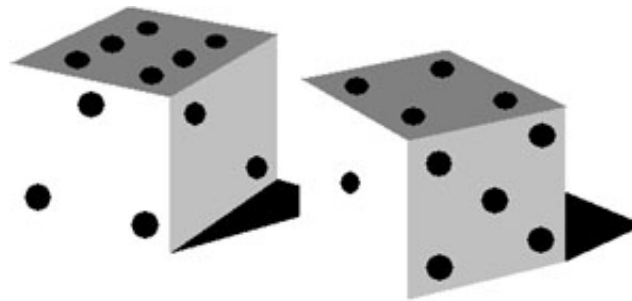
♥ FREQUÊNCIA

♠ AXIOMÁTICO



CLÁSSICO

$$P(A) = \frac{\text{(número de casos favoráveis)}}{\text{(número de casos possíveis)}}$$



Exemplo

Qual a probabilidade de
ganhar no Toto-Bola?



Solução:

Casos favoráveis = 1

Casos possíveis:

$$\binom{25}{15} = 3268760$$



$$\begin{aligned}
 P(\text{Toto_Bola}) &= \\
 &= \frac{\text{Número de favoráveis}}{\text{Número de possíveis}} = \\
 &= \frac{1}{\binom{25}{15}} = \frac{1}{3268760} = 0,000031\%
 \end{aligned}$$



Frequência Relativa

$$\text{fr}_A = \frac{\text{(número de vezes que A ocorre)}}{\text{(número de vezes que E é repetido)}}$$



Exemplo

Um dado é lançado 120 vezes e apresenta “FACE SEIS” 18 vezes.

Então, a frequência relativa de “FACE SEIS” é:



$$\begin{aligned} fr_6 &= \\ &= \frac{\text{número de vezes que "f_seis" ocorre}}{\text{número de vezes que o dado é jogado}} \\ &= \frac{18}{120} = 0,15 = 15\% \end{aligned}$$



Conceito freqüencial de probabilidade

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} fr_A$$



Conceito Axiomático

$P(A)$ é um número real que deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$(1) 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$(2) P(S) = 1$$

$$(3) P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\text{se } A \cap B = \emptyset$$



Conseqüências dos Axiomas (Teoremas)



$$(1) \quad P(\emptyset) = 0$$

$$(2) \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$(3) \quad P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$



$$(4) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$(5) P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - \\ - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + \\ + P(A \cap B \cap C)$$



Probabilidade Condicionada



Motivação

Considere uma urna com 50 fichas, onde 40 são pretas e 10 são brancas.



Suponha que desta urna são retiradas “duas” fichas, ao acaso e sem reposição:

Sejam os eventos:

$A = \{ \text{a primeira ficha é branca} \}$

$B = \{ \text{a segunda ficha é branca} \}$



Então:

$$P(A) = 10/50 = 0,20 = 20\%$$

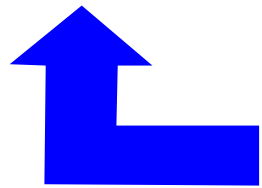
$$P(B) = ?/49$$

Neste caso, não se pode avaliar $P(B)$, pois para isto é necessário saber se A ocorreu ou não, isto é, se saiu ficha branca na primeira retirada.



Se for informado que A ocorreu,
então a probabilidade de B, será:

$$P(B/A) = 9/49 = 0,1837 = 18,37\%$$



Observe a notação



Esta representação é lida:

P de B dado A ;

P de B dado que A ocorreu;

P de B condicionada a A .



Definição:

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$$



Mas:

Se $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$ então:

$$P(A \cap B) = P(A/B).P(B)$$

Também:

Se $P(B/A) = P(A \cap B) / P(A)$ então:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$



Assim:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = P(A/B).P(B)$$

Esse resultado é conhecido como:

Teorema da multiplicação



Independência

Dois eventos A e B são ditos independentes se a probabilidade de um ocorrer não altera a probabilidade do outro ocorrer, isto é:



$$(1) \quad P(A/B) = P(A)$$

$$(2) \quad P(B/A) = P(B)$$

$$(3) \quad P(A \cap B) = P(A).P(B)$$



Partição de um espaço amostra

Diz-se que os conjuntos:

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

eventos de um mesmo espaço amostra S , formam uma partição deste espaço se:

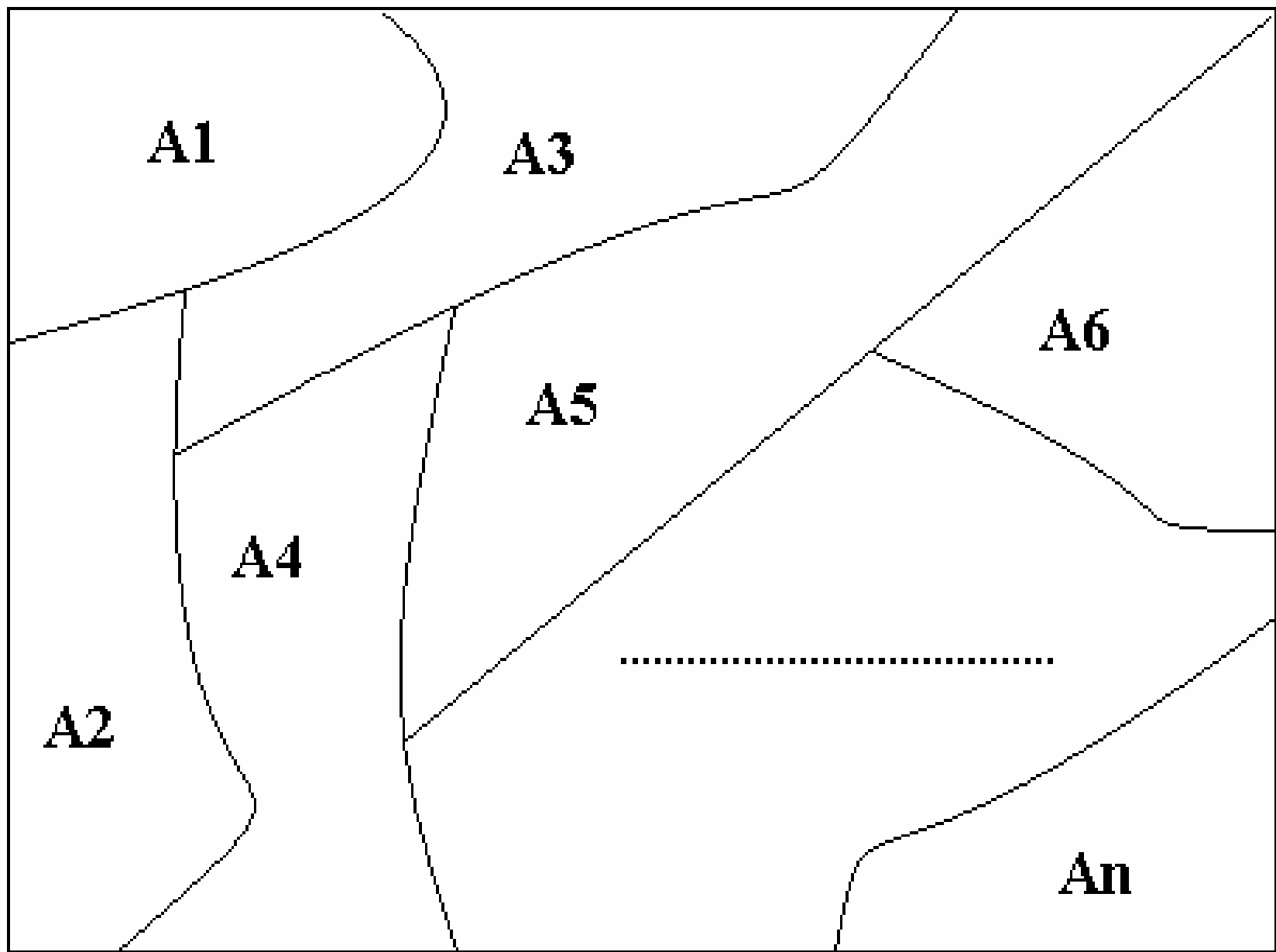


(1) $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$

(2) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$, para todo $i \neq j$

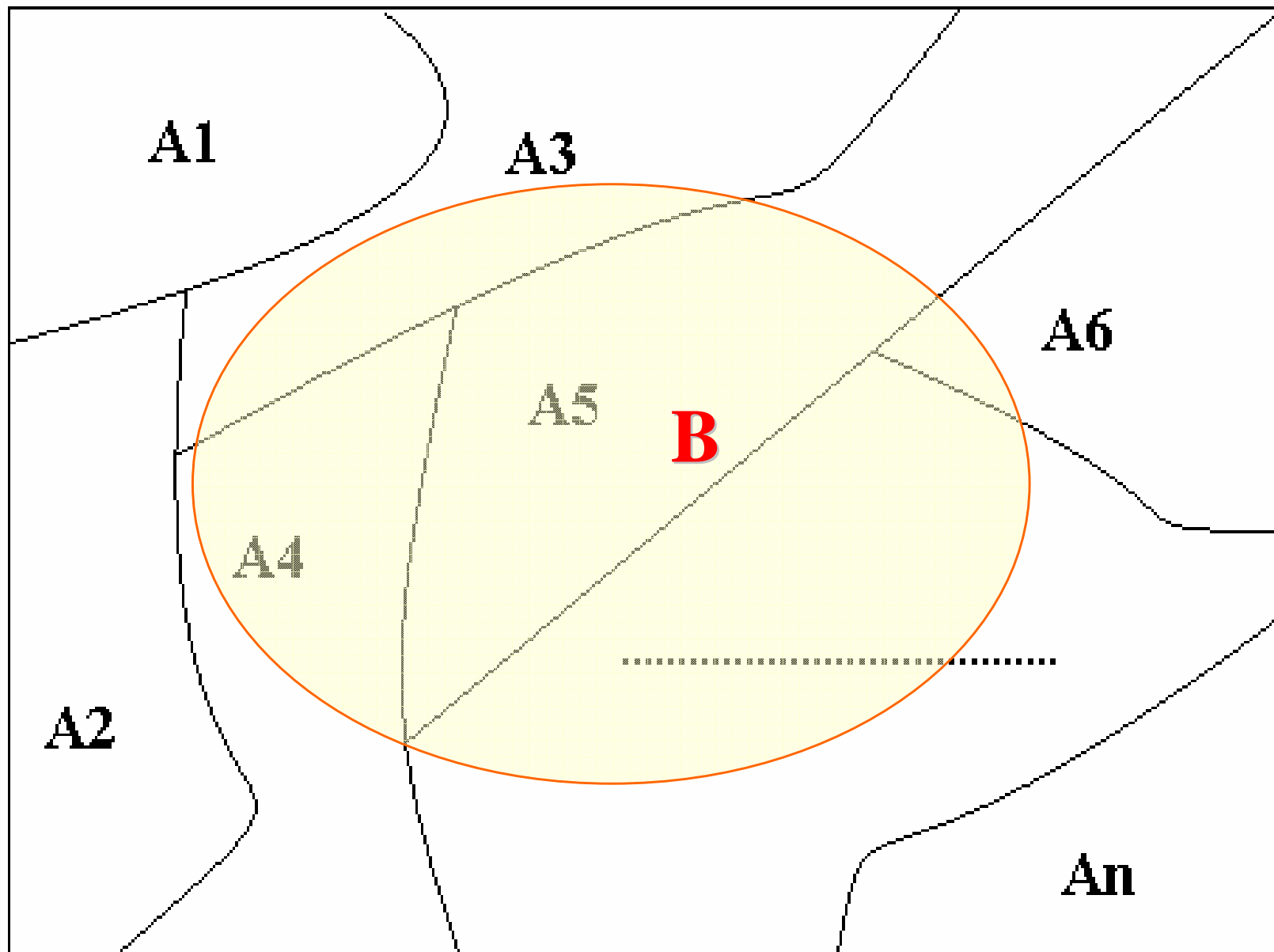
(3) $P(A_i) > 0$, para todo i





Teorema da probabilidade total

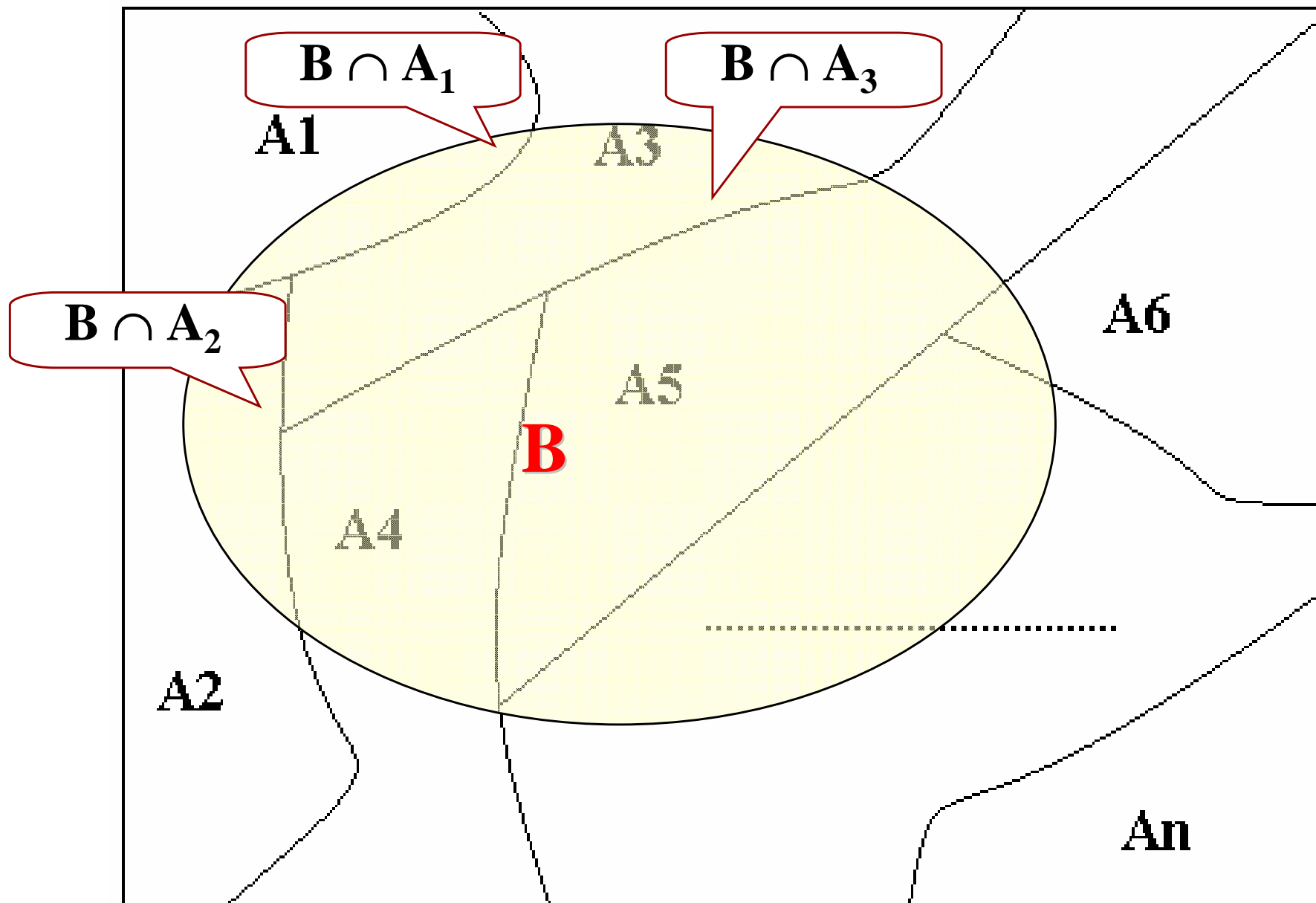




B pode ser escrito como:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$$





$P(B)$ será então:

$$P(B) = P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)]$$

$$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n) =$$

$$= \sum P(B \cap A_i) = \sum P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

Assim: $P(B) = \sum P(A_i) \cdot P(B/A_i)$



Exemplo



Uma peça é fabricada por três máquinas diferentes. A máquina “A” participa com 20% da produção, a “B” com 30% e a “C” com 50%.



Das peças produzidas por “A”, 5% são defeituosas, das de “B” 3% e das de “C” 1%.

Selecionada uma peça ao acaso da produção global qual a probabilidade de ela ser defeituosa.



Solução



Tem-se:

$$P(A) = 20\%$$

$$P(D/A) = 5\%$$

$$P(B) = 30\%$$

$$P(D/B) = 3\%$$

$$P(C) = 50\%$$

$$P(D/C) = 1\%$$

$$P(B) = \sum P(A_i).P(B/A_i)$$



Então:

$$P(D) =$$

$$= P(A).P(D/A) + P(B).P(D/B) + P(C).P(D/C) =$$

$$= 0,20.0,05 + 0,30.0,03 + 0,50.0,01 =$$

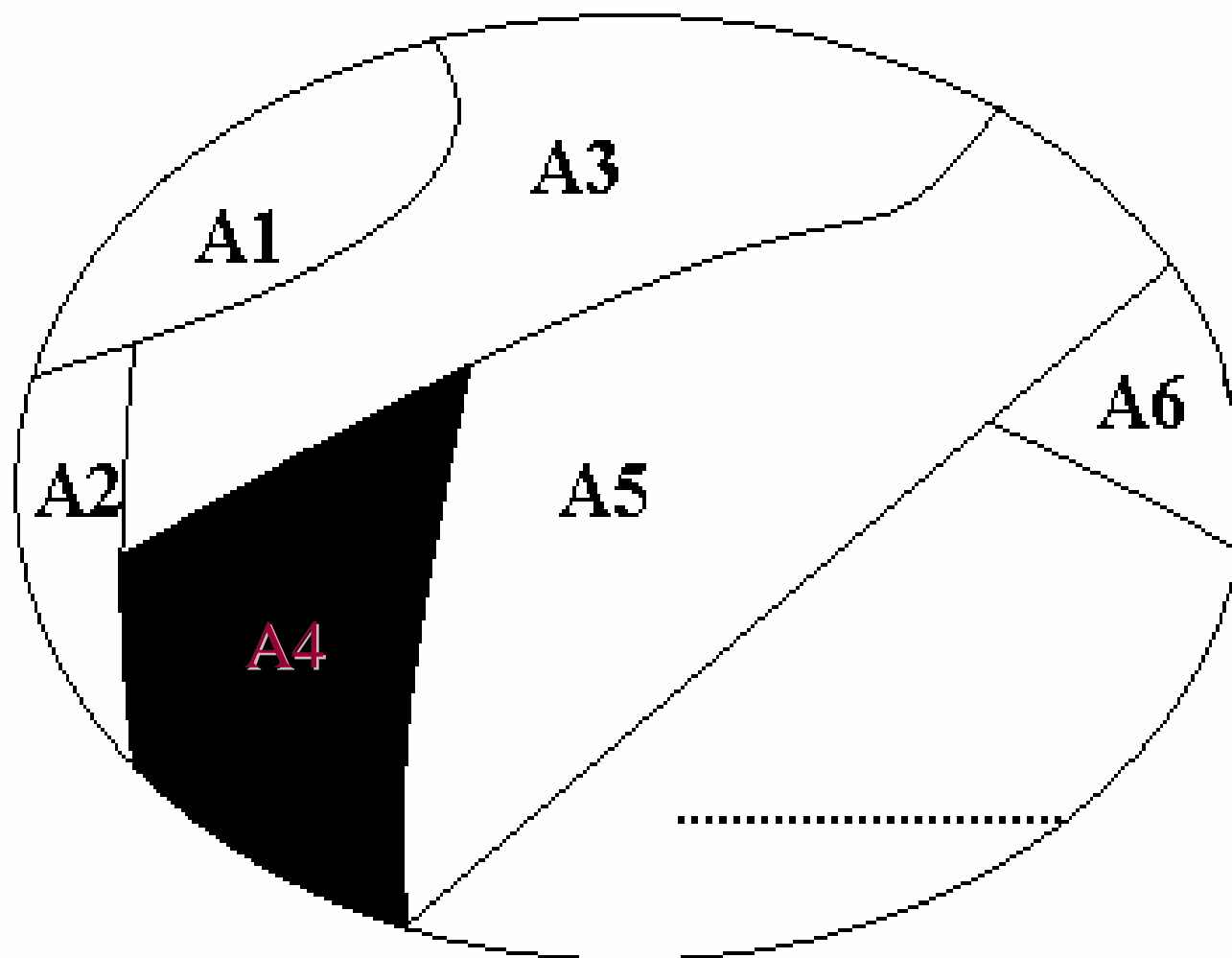
$$= 0,01 + 0,009 + 0,005 =$$

$$= 0,024 = 2,40 \%$$



Teorema de Bayes





Calcula a probabilidade de ocorrência de um dos “ A_i ” (que formam a partição) dado que ocorreu um evento qualquer “ B ”.



Aplicando a expressão da
probabilidade condicionada vem:

$$\begin{aligned} P(A_i / B) &= \\ &= P(A_i \cap B) / P(B) = \\ &= P(A_i) \cdot P(B / A_i) / P(B) \end{aligned}$$



Na expressão:

$$P(A_i / B) = P(A_i).P(B/A_i) / P(B)$$

o valor de $P(B)$ (denominador) é
obtido através do Teorema da
Probabilidade Total.



Exemplo



Considerando o exercício anterior, suponha que uma peça seja selecionada e se verifique que ela é defeituosa. Qual a probabilidade de ela ter sido produzida pela máquina A?



Solução



Tem-se:

$$P(A) = 20\%$$

$$P(D/A) = 5\%$$

$$P(B) = 30\%$$

$$P(D/B) = 3\%$$

$$P(C) = 50\%$$

$$P(D/C) = 1\%$$

$$P(D) = 2,40\%$$



Então:

$$\begin{aligned} P(A / D) &= \\ &= \frac{P(A).P(D / A)}{P(A).P(D / A) + P(B).P(D / B) + P(C).P(D / C)} = \\ &= \frac{0,20.0,05}{0,20.0,05 + 0,30.0,03 + 0,50.0,01} = \\ &= \frac{0,01}{0,024} = 41,67\% \end{aligned}$$



Revisão de Combinatória

Fatorial

$$n! = n.(n - 1).(n - 2). \dots .3.2.1$$

Obs.: (i) $0! = 1$

(ii) $n! = n.(n - 1)!$



Princípio Fundamental da Contagem



Suponha que se possa fazer “n” escolhas independentes com:

- m_1 maneiras de fazer a escolha 1,
- m_2 maneiras de fazer a escolha 2,
- ,
- m_n maneiras de fazer a escolha n.

Então existem $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ maneiras diferentes de fazer a seqüência inteira de escolhas.



Exemplo

Quantos números distintos de dois algarismos existem?

$$m_1.m_2 = 9.9 = 81$$



Permutações

Uma permutação é uma das possíveis maneiras de arranjar, ou ordenar, um conjunto de objetos.

O número de permutações de “r” objetos distintos é dado por:

$$P_r = r.(r - 1).(r - 2). \dots . 3.2.1 = r!$$



Exemplo

Dado o conjunto $\{ a, b, c, d \}$. O número de permutações possíveis é:

$$P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$$



Arranjos

O número de arranjos de “n” objetos distintos, tomados “r” a cada vez, onde $r \leq n$, é dado por:

$$A(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1)$$



Arranjos

O número de arranjos pode ser expresso em função do fatorial da seguinte forma:

$$A(n, r) = n! / (n - r)!$$



Exemplo

De um baralho de 52 cartas, 5 são retiradas sucessivamente e sem reposição. Quantas seqüências são possíveis?

$$A(52, 5) = 52! / (52 - 5)! = 52.51.50.49.48 = 311\,875\,200$$



Observação:

A PERMUTAÇÃO é um caso particular do ARRANJO, quando $n = r$.

$$\begin{aligned} A(n, r) &= n! / (n - r)! = A(n, n) = \\ &= n! / (n - n)! = n! / 0! = n! \end{aligned}$$



Arranjo Completo

Se “r” elementos forem tomados de “n”, onde são permitidas as repetições, isto é, o mesmo elemento pode ocorrer mais de uma vez, então o número de arranjos é dado por:

$$AC = n^r$$



Exemplo

De um baralho de 52 cartas, 5 são retiradas sucessivamente e com reposição. Quantas seqüências são possíveis?

$$AC(52, 5) = 52^5 = 418\,195\,493$$



Combinações

O número de combinações, ou subconjuntos, de “n” objetos tomados em grupos de “r”, onde $r \leq n$ é dado por:

$$C(n, r) = n! / r!(n - r)!$$



Exemplo

Quantos são os cartões diferentes no jogo da Mega Sena?

$$C(n, r) = C(60, 6) = \\ 60! / 6!(60 - 6)! = 50\,063\,860$$



Relação entre os três principais resultados

$$A(n, r) = P_r \cdot C(n, r)$$

Pois

$$\begin{aligned} \text{Pr. } C(n, r) &= r! \cdot [n! / r!(n - r)!] = \\ &= n! / (n - r)! = A(n, r) \end{aligned}$$

