

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
EDITAL DAS LICENCIATURAS - 2004**

**FUNÇÕES COMPLEXAS E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS;
PARA CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**Prof. Dra. Vera Clotilde Garcia
Acad. Débora da Silva Soares
Acad. Juliana Fronza**

2005

SUMÁRIO

1. Introdução e justificativa da proposta.....	3
2. Múltiplos significados para a noção de função.....	5
3. Origem e evolução dos Números complexos.....	8
4. Geometria das transformações.....	12
5. Atividades articulando complexos e geometria	14
6. Funções de variável complexa.....	22
7. Funções complexas não lineares.....	25
8. Resolução das atividades (5).....	35
9. Bibliografia Recomendada.....	82
10. Anexos.....	83

1. Introdução e justificativa da proposta

Este texto trata do ensino das funções complexas em cursos universitários de formação de professores. Ele foi criado com dois objetivos principais: ampliar os significados atribuídos à noção de função, incluindo as concepções de função como transformação e como movimento; introduzir as funções complexas e suas representações por meio de equações e por meio de gráficos.

Justifica-se, este trabalho, quando nos damos conta que, nos cursos de Licenciatura em Matemática, trabalha-se muito pouco com números complexos e, com relação à função, dá-se muita ênfase aos aspectos importantes para o Cálculo Diferencial e Integral de uma variável real. Para muitos professores licenciados em Matemática, função passa a ser uma equação, como $y=ax+b$ ou $y=x^2$, com representação gráfica bem definida no plano XOY.

Partimos para este trabalho motivados pela fala do Prof. Elon de Lages Lima

“esta definição (função como conjunto de pares ordenados) apresenta o inconveniente de ser formal e estática e não transmitir a idéia intuitiva de função como correspondência, transformação, dependência (uma grandeza em função da outra) ou resultado de um movimento. Quem pensaria numa rotação como um conjunto de pares ordenados? Os matemáticos...olham para uma função como uma correspondência, não como um conjunto de pares ordenados.” (p.82)

Na linha teórica, estudamos resultados da Didática da Matemática na linha francesa. Artigue (1999) refere pesquisas que mostram que a aprendizagem se funda, de maneira decisiva, na flexibilidade do funcionamento matemático via articulação de pontos

de vista, registros de representações, competências e habilidades matemáticas. Articulação quer dizer comunicação entre partes, entre partes e o todo, e conexão entre as partes.

São questões importantes para ensino superior: a) reconstrução e rupturas de conhecimentos e pontos de vista anteriores; b) flexibilidade no modo de fazer Matemática.

Nessa perspectiva, desenvolve-se este texto. A idéia é planejar e desenvolver com os futuros professores uma ação didática que se caracterize pela reconstrução de conhecimentos anteriores a respeito de função e de números complexos, pela articulação de saberes e pela ênfase na flexibilidade dos modos de registrar e resolver problemas.

O trabalho no tema das funções complexas, no âmbito da formação de professores, pode favorecer a reconstrução, reorganização e ampliação dos conhecimentos anteriores a respeito de “função”, assim como relacionar tópicos de Geometria, Geometria Analítica e Números Complexos, em geral afastados entre si, no nível médio.

Este estudo propõe, para as funções complexas, um enfoque diferente daquele que usualmente é enfatizado, nos cursos superiores. Neste nível funções complexas são tratadas no âmbito da Análise Matemática, com questões a respeito de suas derivadas e integrais, com múltiplos teoremas. A nossa proposta consiste em tratar as funções complexas como transformações do plano, funções que transformam figuras ou regiões em outras, causando algum tipo de mudança ou deformação.

As atividades partem das transformações geométricas e dos registros da geometria euclidiana, passam para o mundo da geometria analítica e logo, para os registros complexos, nas formas algébrica e trigonométrica. O estudo inclui algumas das funções complexas não lineares. Oferecemos para os futuros professores exercícios resolvidos mostrando, entre os modos de resolvê-los, a utilização das ferramentas e conceitos da Álgebra Linear.

2. Múltiplos significados para a noção de função

A noção de função surgiu como o instrumento matemático indispensável para o estudo quantitativo dos fenômenos naturais, iniciado por Galileu (1564-1642) e Kepler (1571-1630). O estudo da natureza pedia uma linguagem matemática apropriada. O estudo do movimento da queda dos corpos, do movimento dos planetas e dos movimentos curvilíneos impulsionaram o desenvolvimento do conhecimento matemático relativo às funções. A noção de função está associada na sua origem à noção de lei natural.

Assim, o conceito de função, historicamente, tem significado de modelo para um fenômeno real, uma relação especial entre as grandezas variáveis que constituem um acontecimento natural ou das ciências experimentais.

No século XVII, Descartes utilizou equações com x e y para introduzir uma relação de dependência entre quantidades variáveis, de modo a permitir o cálculo de valores de uma delas a partir dos valores da outra. Na mesma época, Newton usava o termo “fluente” para expressar sua noção de função, muito ligado com a noção de curva. No fim do século, Leibniz usa o termo “função” para referir segmentos de reta cujos comprimentos dependiam de retas e curvas. Logo depois o termo foi usado para referir quantidades dependentes entre si.

Nos séculos XVIII e XIX a noção de função passou a ser identificada com a de expressão analítica. Em 1716, João Bernouilli define “*função de uma certa variável: uma quantidade que é composta de qualquer forma por variáveis e constantes*”. Em 1748, Euler, substitui o termo *quantidade* por *expressão analítica*. Constitui-se, na época, a identificação entre função e suas representações, como se uma função fosse uma equação.

Também ocorre uma proliferação nos significados dados à “variável”, juntamente com o significado dado à função. O termo “variável”, que inicialmente referia grandezas físicas que variavam e eram interdependentes, passa a ser associado à medidas de uma curva, com significado geométrico. Logo depois, assume o significado de um mero símbolo de linguagem: x , ou y , por exemplo. Nesta linha, função pode ser vista como lei natural, como relação entre medidas de uma curva ou como uma equação, uma expressão em linguagem matemática.

Em 1837, Dirichlet separou o conceito de função da sua representação analítica, formulando-os em termos de correspondência arbitrária entre conjuntos numéricos. *Uma função é uma correspondência entre duas variáveis, tal que a todo valor da variável independente se associa um só valor da variável dependente.* O termo “variável”, no entanto, nada tem a ver com grandezas físicas, é apenas um símbolo.

No século XX, com o desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos iniciada por Cantor, a noção de função passa a referir correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos, numéricos ou não. O grupo Bourbaki elaborou em 1939 a definição hoje utilizada nos meios matemáticos, para função: *Uma função é uma tripla ordenada (X, Y, f) , onde X e Y são conjuntos e f é um subconjunto de $X \times Y$, tal que se $(x, y) \in f$ e $(x, y') \in f$ então $y = y'$.*

Esta definição, excessivamente formal, tornou o conceito muito abstrato e distante de suas origens.

Em pesquisa desenvolvida com alunos formandos do Curso de Licenciatura da UFRGS, verificamos que os professores se formam com três concepções de função: associação ou correspondência entre os conjuntos, relação entre variáveis e “regra” ou fórmula. A concepção de função como uma transformação entre figuras geométricas ou regiões, assim como a compreensão de que um movimento também é uma função estão ausentes dos programas usuais. Ou seja, o professor licenciado não estabelece ligação entre as transformações e movimentos da Geometria e o conceito de função.

Para o professor, em geral, função é regra, fórmula, gráfico, diagrama de setas ou conjunto de pares ordenados. Para o professor do nível médio, distante da Universidade, função só tem relação com funções reais. Domínio e imagem aparecem sempre como subconjuntos do conjunto dos reais ou dos inteiros, não há lugar no currículo para as funções cujo domínio são partes do plano ou do espaço. Assim, função não tem relação com movimento e transformação de figuras planas.

O estudo das funções complexas traz a possibilidade de estabelecer tais articulações: as transformações geométricas podem ser vistas como funções complexas, que podem ser representadas por fórmulas, regras e gráficos; as funções complexas podem expressar movimentos ou transformações de figuras planas.

2. Origem e evolução dos números complexos

Estudando Maor (2003), encontramos um excelente resumo da evolução dos números complexos, chegando às funções complexas.

Durante dois mil anos a matemática cresceu sem se importar com o fato de que as raízes quadradas dos negativos não podiam ser calculadas. Para os gregos, bastavam os números positivos, aqueles que eram usados na geometria.

O matemático hindu Brahmagupta 628dc usou números negativos, mas a Europa medieval os ignorou, considerando-os absurdos.

Na Europa, só em 1225 os negativos foram reconhecidos. Fibonacci, em 1225, interpretou uma raiz negativa, que surgiu num problema financeiro, como uma perda, em vez de um ganho. Em 1530, Bombelli interpretou os números como comprimentos de uma linha e as quatro operações como movimentos ao longo dessa linha, dando assim uma interpretação geométrica para os números reais. Mas somente quando se percebeu que a subtração poderia ser interpretada como inverso da adição foi que se tornou possível uma aceitação total dos números negativos no nosso sistema numérico.

Em 1545, Cardano tentou encontrar dois números cuja soma fosse 10 e cujo produto fosse 40. Isso leva á equação quadrática $x^2-10x+40=0$, cujas soluções eram números desconhecidos, por trazerem a necessidade de tirar raiz quadrada de um número negativo.

Com a passagem do tempo, quantidades da forma $x + (\text{raiz quadrada de } (-1)) y$ – hoje chamadas de números complexos e escritas como $x+iy$ onde x,y são números reais e raiz $-1 = i$ – foram encontrando seu lugar na matemática. Por exemplo, a solução geral da equação cúbica exige que se lide com essas quantidades, mesmo que a solução final se revele real. Mas foi apenas no século XIX que os matemáticos se acostumaram com estes números, aceitando-os como números de qualidade.

Dois desenvolvimentos ajudaram neste processo. Em primeiro lugar, por volta de 1800, ficou demonstrado que a quantidade $x+iy$ poderia receber uma interpretação geométrica simples. Num sistema de coordenadas retangulares, marcamos o ponto P cujas coordenadas são x e y . Se interpretarmos os eixos dos x e dos y como eixos real e imaginário, respectivamente, então o número complexo $x+iy$ será representado pelo ponto $P(x,y)$, ou de modo equivalente, pelo segmento de linha OP , denominado vetor, pois OP é individualizado por seu comprimento (módulo), por uma direção (ângulo entre o segmento e o eixo positivo dos x) e sentido, de O para P . Podemos então somar ou subtrair números complexos do mesmo modo como somamos ou subtraímos vetores, somando e subtraindo, separadamente, as componentes.

Esta representação gráfica foi sugerida mais ou menos ao mesmo tempo por Wessel, norueguês, Argand, francês, e Gauss, alemão.

O segundo desenvolvimento foi devido a Hamilton. Em 1835 ele definiu os números complexos de maneira formal ao trata-los como pares ordenados de números reais, sujeitos a certas regras de operação.

Um “número complexo” é definido como o par ordenado (a,b) , onde a e b são reais.
A) Dois pares (a,b) e (c,d) são iguais se e só se $a=c$ e $b=d$.

B) Multiplicando (a,b) por um real K , produz-se o par (ka,kb) .

C) A soma dos pares (a,b) e (c,d) é o para $(a+c, b+d)$ e seu produto é $(ac-bd, ad+bc)$.

O significado por trás da aparentemente estranha definição de multiplicação torna-se claro se multiplicarmos o par $(0,1)$ por si mesmo; de acordo com a regra, obtemos $(-1,0)$. Pode-se denotar o par $(1,0)$ por 1 e o par $(0,1)$ por i . Assim

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a+bi.$$

Uma vez superadas as dificuldades psicológicas de aceitar os números complexos, estava aberto o caminho para novas produções.

Em 1799, Gauss deu a primeira demonstração rigorosa de um fato já conhecido: um polinômio de grau n sempre possui pelo menos uma raiz no domínio dos complexos. De fato, se considerarmos raízes repetidas como raízes separadas, um polinômio de grau n terá exatamente n raízes complexas. O teorema de Gauss é conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra.

A aceitação dos números complexos teve impacto também na Análise.

Formalmente, podemos estender a definição de Euler (enunciada no capítulo anterior) de uma função para as variáveis complexas, sem mudar uma palavra, basta permitir que as constantes e variáveis assumam valores complexos. Mas, de um ponto de vista geométrico, tal função não pode ser representada por um gráfico em um sistema de coordenadas de duas dimensões, porque cada uma das variáveis agora exige, para sua representação, um sistema de coordenadas de duas dimensões, isto é um plano.

Para interpretar geometricamente tal função, devemos pensar nisso como uma transformação de um plano no outro.

Definimos função complexa do seguinte modo: quando z designa um número complexo qualquer, chamamos z de **variável complexa**. Se, para cada valor de z em um domínio D , o valor de uma segunda variável complexa w é determinado, então w é uma **função** da variável complexa z no conjunto D :

$$w = f(z)$$

O conjunto D é o **domínio de definição** da função w . Os valores $f(z)$, correspondentes a todos os z em D , constituem um outro conjunto C de números complexos, conhecido como **Imagem** da função f .

Propriedades de uma função real $f(x)$, de uma variável real x , são demonstradas geometricamente pelo gráfico da função. A equação $y = f(x)$ estabelece uma correspondência entre pontos x no eixo XX e pontos y no eixo YY , isto é, ela leva ponto x em pontos y . A curva assim obtida é o gráfico de $f(x)$. Da mesma maneira, usamos uma superfície para exibir graficamente uma função real $f(x,y)$ das variáveis reais x e y .

Entretanto, quando $w = f(z)$ e as variáveis w e z são complexas, não dispomos de tal representação gráfica da função f , uma vez que precisamos de um plano para a representação de cada uma das variáveis.

Algumas informações sobre a função podem, entretanto, ser obtidas graficamente, exibindo-se conjuntos de pontos correspondentes z e w .

É mais simples, em geral, desenhar dois planos complexos separadamente para as variáveis z e w : para cada ponto (x,y) no plano z , no domínio de definição de f , existe um ponto (u,v) no plano w , onde $w = u + iv$.

A correspondência entre pontos nos dois planos se diz uma **transformação** de pontos no plano z em pontos no plano w pela função f . Pontos w são, então, imagens de pontos z .

5. Geometria das transformações

Inspirados pelo estudo de Eves (1992) e pelos textos de Lindquist e Shulte (1994), delineamos um quadro que mostra parcialmente a evolução histórica da Geometria, salientando sua natureza mutável, com diferentes conotações, no correr dos séculos: geometria intuitiva, geometria científica, geometria dedutiva, geometria das transformações, geometria avançada.

Geometria intuitiva, ou geometria do subconsciente, é aquela que tem sua origem nas observações do espaço físico real. O homem observa, compara, reconhece. Nasce aí as noções primitivas: distância, figuras geométricas simples, paralelismo e perpendicularismo.

Geometria científica surge do trabalho da mente humana sobre as noções primitivas, consolidando-as conscientemente, num conjunto de regras e leis mais gerais.

Geometria dedutiva, ou demonstrativa, foi introduzida pelos gregos e corresponde ao uso do pensamento lógico dedutivo para ampliar o corpo de leis e regras iniciais, constituindo a geometria euclidiana. Nesta concepção, “espaço” deixa de ser o real e passa a ser idealizado, lugar onde os objetos podem se deslocar livremente e ser comparados um com os outros.

Geometria das transformações é uma maneira mais global do que local de ver a geometria, que teve origem na percepção de que existem várias geometrias, a euclidiana e as não euclidianas, criadas no século XIX. Nesta época, “espaço” passa a ser visto como um lugar onde os objetos podem ser comparados entre si. A idéia central passa a ser um grupo de transformações congruentes do espaço em si mesmo e *“a geometria passa a ser considerada como o estudo das propriedades das configurações de pontos que*

permanecem inalteradas quando o espaço circundante é sujeito a essas transformações” (Eves, 1992, pág.27).

Na Geometria Euclidiana, as isometrias formam um grupo de transformações congruentes que se caracterizam por manter inalteradas as propriedades das configurações de pontos do plano. São também chamadas de movimentos rígidos, pois preservam linhas retas, retas paralelas, ângulos entre retas e congruência entre segmentos. Ou seja, um quadrado sujeito a uma isometria continua quadrado, com mesmas medidas, embora ocupe outra posição no plano. São as simetrias, as rotações, as reflexões e translações de objetos do plano. As homotetias preservam as mesmas condições, com exceção da congruência, mantendo, porém, a semelhança entre as figuras, por isso não são consideradas isometrias. Um quadrado sujeito a uma homotetia pode tornar-se maior ou menor, mas ainda é um quadrado.

Definem-se transformações geométricas como *“funções que associam a cada ponto do plano um outro ponto, também do plano através de certas regras....Se F é uma figura (portanto um conjunto de pontos) definiremos $F' = T(F)$ como o conjunto dos pontos imagem dos pontos de F (pela transformação T)”* (Wagner, 1993, p.70).

5. Atividades articulando complexos e geometria

Os objetivos desta seqüência de atividades são:

1. articular conhecimentos de Geometria, Geometria Analítica e Números Complexos;
2. ampliar os significados produzidos para função, no Curso de Licenciatura, trabalhando a noção de transformação linear e transformação geométrica;
3. enfatizar as aplicações geométricas das funções números complexos.

0.1. REFLEXÃO

“Seja R uma reta no plano π . A *reflexão* em torno do eixo R é a transformação $\rho : \pi \rightarrow \pi$, que associa a cada ponto X do plano o ponto X' tal que R é a mediatriz do segmento XX' .”
(LIMA, 2001)

Atividades:

- Partindo de um segmento qualquer \overline{AB} e de uma reta R , trace a reflexão de AB com relação a R .
- Partindo de um sistema de eixos coordenados e um ponto $P(x,y)$, no 1º quadrante, encontre a imagem de P pela função reflexão em torno do eixo dos XX . Expresse essa função por uma equação analítica $w = f(x,y)$, com $w \in \mathbb{R}^2$.
- Partindo de um sistema de eixos coordenados e um ponto $P(x,y)$, no 1º quadrante, encontre a imagem de P pela função reflexão em torno do eixo YY . Expresse essa função por uma equação analítica $w = g(x,y)$, com $w \in \mathbb{R}^2$.
- Considere o plano XOY como representante do plano complexo. Associe a cada ponto (x,y) o número complexo $z = x+iy$.

Expresse ambas as funções reflexão como uma equação complexa, $w=f(z)$, com z e w números complexos.

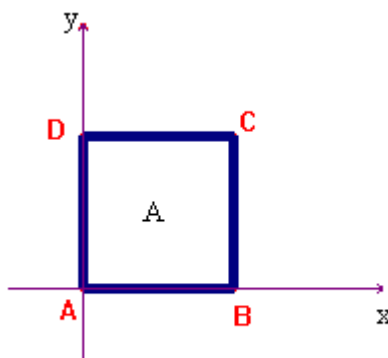
Reflexão em torno do eixo XX : $f(z) = \dots\dots$

Reflexão em torno do eixo dos YY : $g(z) = \dots\dots$

- A figura abaixo representa a região complexa $A = \{ z = x+iy / 0 \leq x, y \leq 1 \}$.

Encontre as regiões $B=f(A)$ e $C= g(A)$, imagem de A pelas funções definidas acima.

Certifique-se se B e C correspondem a transformações de A por efeito da reflexão em torno do eixo XX e em torno do eixo dos YY , respectivamente:



0.2 HOMOTETIA

“ Fixado um ponto O no plano π e dado um número real $k > 0$, a *homotetia de centro O e razão k* é a transformação que a cada ponto A do plano π associa o ponto $A' = H_{O,k}(A)$ tal que $OA' = k \cdot AO$. (WAGNER, 1993)

OBS.: Vamos considerar $k > 0$ para não precisar referir noções de orientação nesta definição.

Atividades:

- Partindo de um segmento \overline{AB} e de um ponto O no plano π , trace as homotetias de AB de centro O com razão 2 e com razão $\frac{1}{2}$.
- Partindo de um sistema de eixos coordenados XOY e um ponto $P(x,y)$, no 1º quadrante, encontre a imagem de P pelas funções homotetia de centro O e razões 2 e $\frac{1}{2}$, respectivamente.. Expresse essa função por uma equação analítica $w = f(x,y)$, com $w \in \mathbb{R}^2$.
- Considere o plano XOY como representante do plano complexo. Associe a cada ponto (x,y) o número complexo $z = x+iy$.

Expresse a função homotetia de centro O e razão K , onde K é um número real não nulo, como uma equação complexa, $w=f(z)$, com z e w números complexos.

Homotetia de centro O e razão k : $f(z) = \dots\dots\dots$

d) Volte à FIGURA 1. Encontre a região $B=f(A)$, imagem de A pela função definida acima com $k = 2$. Certifique-se se B corresponde à transformação de A por efeito da homotetia de razão 2 A com relação a O .

d) Encontre C , resultado da transformação de A pela função complexa

$f(z) = \frac{\bar{z}}{2}$ C resulta de uma reflexão composta com uma homotetia.

0.3 SIMETRIA

“A *simetria* em torno do ponto O é a transformação φ (do plano ou do espaço) que faz corresponder a cada ponto X o ponto $\varphi(X) = X'$ tal que O é o ponto médio do segmento XX' .” (LIMA, 2001)

Atividades:

- Partindo de um segmento \overline{AB} e de um ponto O , encontre o simétrico de AB em torno do ponto.
- Dado um sistema de eixos coordenados XOY e um ponto $P(x,y)$, no 1º quadrante, encontre a imagem de P pela função simetria em torno de O . Expresse essa função por uma equação analítica $w=f(x,y)$, com $w \in \mathbb{R}^2$.
- Considere o plano XOY como representante do plano complexo. Associe a cada ponto (x,y) o número complexo $z = x+iy$.

Expresse a função simetria de centro O como uma equação complexa, $w=f(z)$, com z e w números complexos.

Simetria de centro O : $f(z) = \dots\dots\dots$

d) Volte à FIGURA 1 Encontre a região $B=f(A)$, imagem de A pela função definida acima.

Certifique-se de que B resulta do movimento de simetria de A com relação a O .

B representa uma figura simétrica a A .

e) Encontre C , resultado da transformação de A pela função complexa $f(z) = -3\bar{z}$

C resulta de uma reflexão composta com uma homotetia e com uma simetria.

0.4. TRANSLAÇÃO

“Seja AB um segmento orientado, no plano π ou no espaço E . (*Orientado* significa que a ordem em que os extremos são citados é relevante: primeiro A , e depois B .) A *translação*

determinada por AB é a transformação (correspondência biunívoca) $\tau : \pi \rightarrow \pi$, ou $\tau : E \rightarrow E$, definida por $\tau(X) = X'$, de modo que (AB, XX') e (AX, BX') sejam os pares de lados opostos de um paralelogramo.” (LIMA, 2001)

Atividades:

- Partindo de um segmento \overline{AB} orientado e de um outro segmento XY , não paralelo com \overline{AB} . Encontre a translação de \overline{XY} determinada por \overline{AB} .
- Partindo de um sistema de eixos coordenados XOY e um ponto $P(x,y)$, no 1º quadrante, encontre a imagem de P pela função translação determinada por um segmento orientado \overline{OA} , de origem em O e extremidade em $A(u,v)$, um ponto do 1º quadrante, não alinhado com OP . Expresse essa função por uma equação analítica $w = f(x,y)$, com $w \in \mathbb{R}^2$.
- Considere o plano XOY como representante do plano complexo. Associe a cada ponto (x,y) o número complexo $z = x+iy$. Expresse a função translação determinada pelo número complexo $u+iv = (u,v)$ como uma equação complexa, $w=f(z)$, com z e w números complexos.

Translação determinada por $u+iv$: $f(z) = \dots\dots\dots$

- Volte à FIGURA 1. Encontre a região $B=f(A)$, imagem de A pela função acima com $u+iv= 2+3i$. Certifique-se que B resulta do movimento de translação de A , 2 unidades na direção do eixo XX e 3 unidades na direção do eixo YY , como determina o número $2+3i$.
- Encontre C , resultado da transformação de A pela função complexa $f(z) = -3\bar{z} + 1+2i$. C resulta de uma reflexão composta com uma homotetia, e com uma simetria e com uma translação.

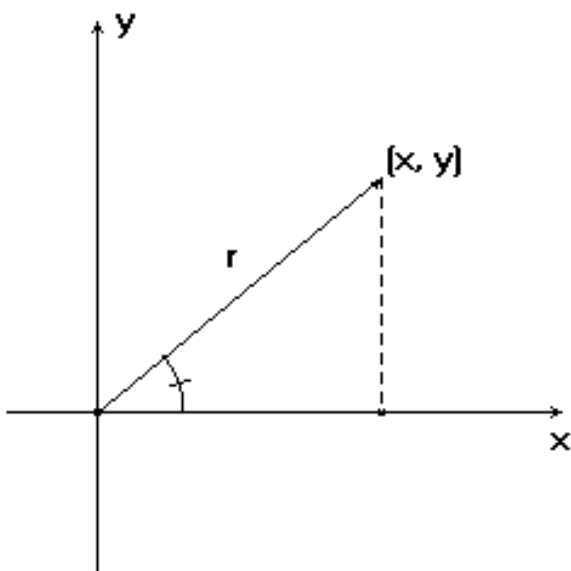
05. ROTAÇÃO

“Fixemos um ponto O no plano π agora orientado (como a tradição recomenda, o sentido positivo é o anti-horário). Dado um ângulo α , a *rotação de centro O e amplitude α* é a transformação que a cada ponto A do plano π associa o ponto $A' = R_\alpha(A)$ de forma que se

tenha $AO' = AO$, $\widehat{AOA'} = \alpha$ e o sentido de A para A' (em torno de O), positivo.”
(WAGNER, 1993)

Atividades:

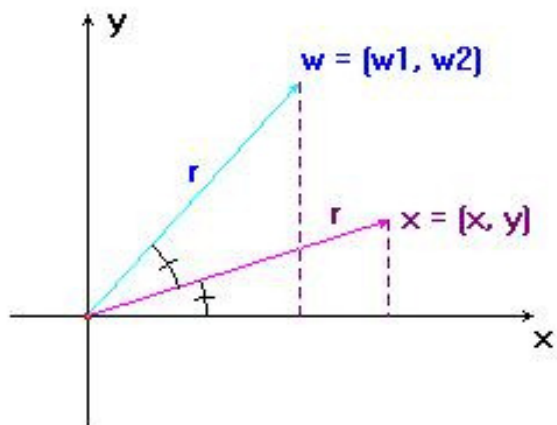
- a) Partindo de um ponto O e de um segmento \overline{AB} , de forma que O, A e B não sejam colineares, construa a rotação de \overline{AB} de centro O e amplitude 45° .
- b) Partindo de um sistema de eixos coordenados XOY e um ponto P(x,y), no 1º quadrante, encontre a imagem de P pela função rotação de P com centro O e amplitude α , onde α é um ângulo qualquer. Neste caso, para facilitar a visualização, pode-se pensar em α como um ângulo agudo, com medida próxima a 45° .



Suponha que o segmento OP faça um ângulo θ com o eixo XX e que tenha medida

r.

Para visualizar o ponto (w_1, w_2) , resultado da rotação de (x, y) , por um ângulo α , analise o gráfico seguinte.



Expresse essa função por uma equação analítica $w = f(x, y)$, com $w \in \mathbb{R}^2$.

c) Considere o plano XOY como representante do plano complexo. Associe a cada ponto (x, y) o número complexo $z = x + iy$.

Este número pode ser expresso em coordenadas polares, r e θ .

O ângulo θ é chamado um **argumento** de z e é denotado por: $\theta = \arg z$.

O argumento de z não é univocamente determinado por que nós podemos somar ou subtrair qualquer múltiplo de 2π de θ para obter um outro valor do argumento. No entanto, só existe um único valor (em radianos) do argumento que satisfaz $-\pi < \theta \leq \pi$.

O **módulo** r de um número complexo $z = a + bi$, denotado por $|z|$, é definido por

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Se $z = x + yi$ é um número complexo não-nulo, $r = |z|$ e θ mede o ângulo do eixo real positivo ao vetor z , então, como sugere a figura,

$$x = r \cdot \cos \theta, \quad y = r \cdot \sin \theta \text{ de modo que } z = x + yi \text{ pode ser escrito como}$$

$z = r \cdot \cos \theta + ir \cdot \sin \theta$ ou $z = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$. Esta é a chamada *forma polar* de z

Da análise da figura acima, considerando $x = x + iy$ e $w = w_1 + i w_2$ e aplicando regras da trigonometria básica, obtemos:

$$x = r \cos \theta \qquad w_1 = r \cos (\alpha + \theta)$$

$$y = r \sin \theta \qquad w_2 = r \sin (\alpha + \theta)$$

A partir destas relações, expresse a função rotação de $z = x + iy$, em torno de O , com amplitude α , como uma equação complexa, $w = f(z)$, com z e w números complexos.

Rotação em torno de O com amplitude α : $f(z) = K \cdot z$, $K = \cos \alpha + i \sin \alpha$

A função linear complexa $f(z) = K \cdot z$, com $|K| = 1$ corresponde ao movimento de rotação no plano complexo.

c) Volte à figura do exercício da reflexão letra (e).

Encontre a região $B = f(A)$, imagem de A pela função acima, com $\alpha = 45^\circ$.

Certifique-se de que B resulta do movimento de rotação de A em torno de O , num giro de 45° em sentido anti-horário, ou seja, B é a transformação de A por efeito da rotação.

d) Encontre C , resultado da transformação de A pela função complexa

$$f(z) = 2i \cdot \bar{z} + 1 + 3i.$$

C resulta de uma rotação de 90° composta com uma reflexão homotetia, e com uma simetria e com uma translação.

6. Funções de uma variável complexa

Quando z designa qualquer um dos números de um conjunto S de números complexos, chamamos z de variável complexa. Se, para cada valor de z em S , o valor de uma segunda variável complexa w é determinado, então w é uma função da variável complexa z no conjunto S :

$$w = f(z)$$

O conjunto S é usualmente um domínio. Nesse caso ele se diz **domínio de definição** da função w . Os valores $f(z)$, correspondentes a todos os z em S , constituem um outro conjunto R de números complexos, conhecido como **contradomínio** da função w .

Propriedades de uma função real $f(x)$, de uma variável real x , são demonstradas geometricamente pelo gráfico da função. A equação $y = f(x)$ estabelece uma correspondência entre pontos x no eixo- x e pontos y no eixo- y , isto é, ela leva ponto x em pontos y . A descrição gráfica melhora quando se leva cada ponto x num ponto (x,y) do plano x - y , ponto este que se situa à distância orientada y acima ou abaixo do ponto x . A curva assim obtida é o gráfico de $f(x)$. Da mesma maneira, usamos uma superfície para exibir graficamente uma função real $f(x,y)$ das variáveis reais x e y .

Entretanto, quando $w = f(z)$ e as variáveis w e z são complexas, não dispomos de tal representação gráfica da função f , uma vez que precisamos de um plano para a representação de cada uma das variáveis.

Algumas informações sobre a função podem, entretanto, ser obtidas graficamente, exibindo-se conjuntos de pontos correspondentes z e w .

É mais simples, em geral, desenhar dois planos complexos separadamente para as variáveis z e w : para cada ponto (x,y) no plano z , no domínio de definição de f , existe um ponto (u,v) no plano w , onde $w = u + iv$.

A correspondência entre pontos nos dois planos se diz **aplicação** ou **transformação** de pontos no plano z em pontos no plano w pela função f . Pontos w são,

então, imagens de pontos z . Este termo se aplica também entre conjuntos como, por exemplo, imagem de uma curva, de uma região, etc.

Para se empregar certos termos geométricos tais como **translação**, **rotação** e **reflexão**, é conveniente, às vezes, considerar a aplicação como transformação num só plano.

Estudamos, neste texto, casos particulares das funções complexas

$$f(z) = A z + B \quad \text{e} \quad f(z) = A \bar{z} + B,$$

com z variável e A, B constantes, todas com valores complexos.

Pode-se concluir das atividades acima que esta família de funções complexas constitui a forma analítica das transformações geométricas, que são determinadas pelos parâmetros A e B .

- a) Se A não é um número real, temos uma rotação com uma homotetia, determinada pelo módulo de A . Se o módulo de A for 1, tem-se apenas uma rotação;
- b) se A é um número real positivo, diferente de 1, temos uma homotetia de centro O , que pode ser uma ampliação ($A > 1$) ou uma redução ($A < 1$);
- c) Se A é negativo, à homotetia se junta uma reflexão com relação à origem dos eixos coordenados;
- d) se $A = -1$, temos uma reflexão em torno da origem;
- e) se $A = 1$ temos apenas uma translação devida a B ;
- f) Em qualquer caso, se $B \neq 0$, ocorre uma translação;
- g) Se $A = 1$ e $B = 0$, temos a função identidade complexa, $f(z) = z$;
- h) Se $A = B = 0$, temos a função nula $f(z) = 0$.

As simetrias axiais (eixo XX e eixo YY) são expressas pelo conjugado complexo: $f(z) = \bar{z}$ e $f(w) = -\bar{z}$. As funções complexas $f(z) = Az + B$ e $f(z) = A\bar{z} + B$, por serem as transformações geométricas da Geometria Euclidiana, preservam as configurações básicas desta geometria. Isto é preservam linhas retas, paralelismo entre retas e ângulos entre retas. A imagem de um quadrado continua sendo um quadrado, em outra posição e em outras dimensões. As rotações, translações, simetrias e reflexões são as chamadas isometrias,

transformações do plano que preservam as medidas. São também chamadas de movimentos rígidos, por sua característica de não deformar as figuras originais. As homotetias preservam a semelhança entre as figuras.

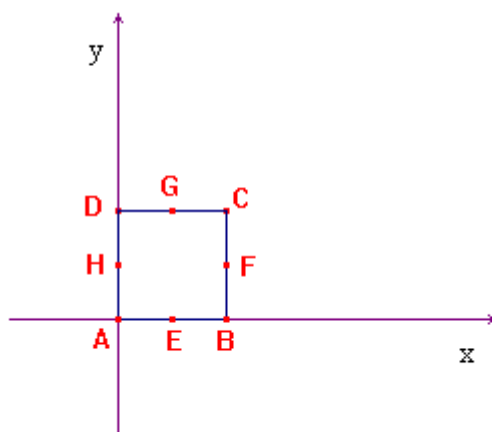
No entanto, existem muitas outras funções complexas que não são movimentos rígidos da Geometria Euclidiana. Funções complexas muito simples causam deformações nas linhas retas.

7. Funções complexas não lineares

7.1. Atividades

1. A imagem do quadrado de lado 1, representado na figura abaixo, não é um quadrado sob efeito da transformação complexa $f(z) = z^2$

Verifique, calculando a imagem dos pontos de A a H e unindo-os.



2. Busque a imagem do quadrado da acima, pela função exponencial complexa $f(z) = e^z$. Esta função é definida por $f(x+iy) = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$ (ver anexos).

Calcule, marque e una as imagens dos pontos A a H.

7.2.SOBRE A FUNÇÃO $F(Z)= Z^2$

* $F(Z) = Z^2$, $F(x+iy) = (x^2-y^2) + 2xyi$

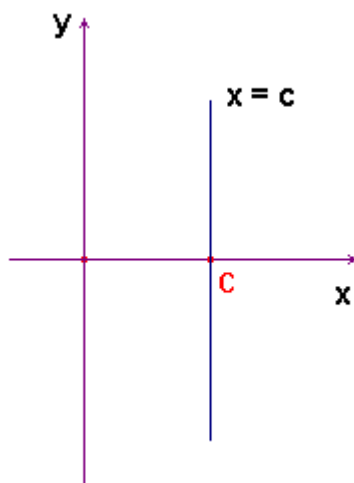
* A imagem das retas verticais do tipo $x= c$ constante são curvas parabólicas.

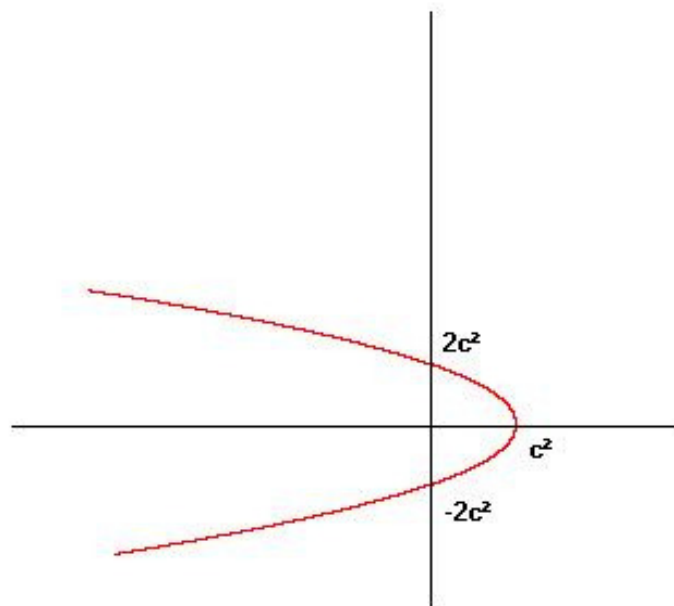
$$X = c^2 - y^2 \quad Y = 2cy$$

* Isolando $y = Y/2c$ pode-se substituir na equação anterior e obter:

$$X = c^2 - Y^2/4c^2 = c^2 (1- Y^2/4)$$

* Ou seja, a imagem da reta $x=c$ é uma parábola cujo eixo de simetria é OX.





* A imagem das retas horizontais do tipo $y=c$, constante também são parábolas

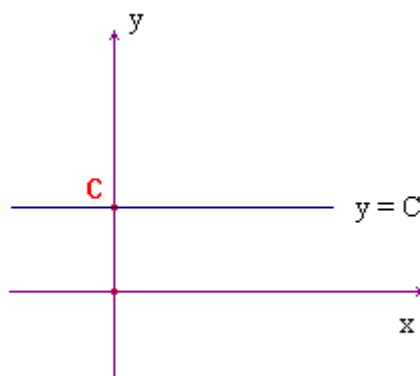
$$X = x^2 - c^2$$

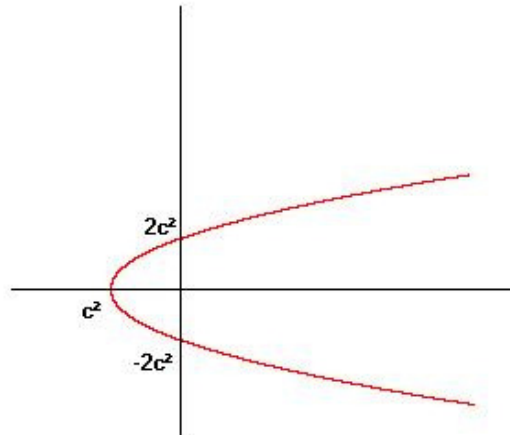
$$Y = 2cx \text{ substituindo } x = Y/2c$$

Obtemos:

$$X = Y^2/4c^2 - c^2 = c^2 (Y^2/4 - 1)$$

Esta curva é também uma parábola com eixo de simetria OX.





Considerando a expressão trigonométrica de $z = x + iy$:

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arg z = \operatorname{arc} \operatorname{tg} y/x$$

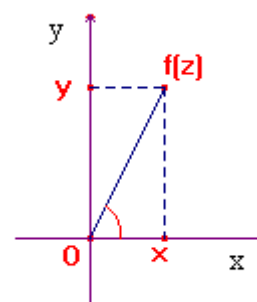
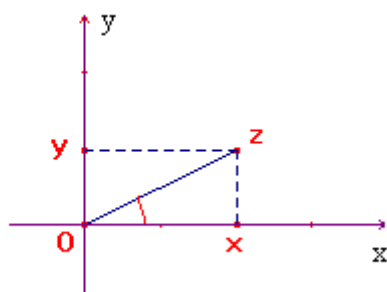
Podemos calcular e observar o efeito da função $F(z) = z^2$.

$$z^2 = r^2[(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) + i(2 \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta)]$$

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$$

Ou seja, a função $F(z) = z^2$ duplica o argumento do complexo z e produz o quadrado de seu módulo.

Obs.: A medida de Oz é r , e a medida de $Of(z)$ é r^2 .



O ângulo $z\hat{O}x = \theta$ e o ângulo $f(z)\hat{O}x = 2\theta$

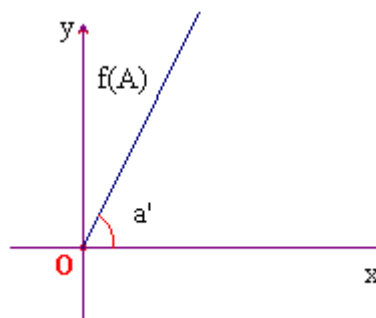
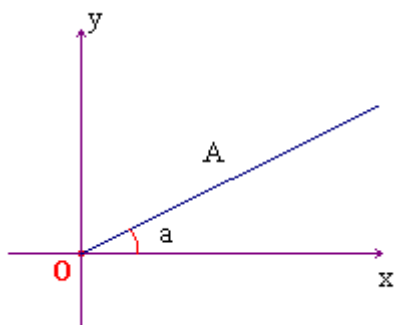
* Podemos traçar as imagens das seguintes regiões:

$$A = \{z / \theta = \pi/6\}$$

$$B = \{z / 2 \leq r \leq 3 \text{ e } 0 \leq \theta \leq \pi/6\}$$

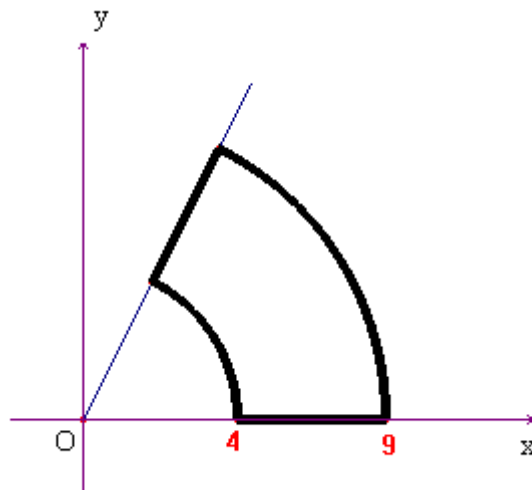
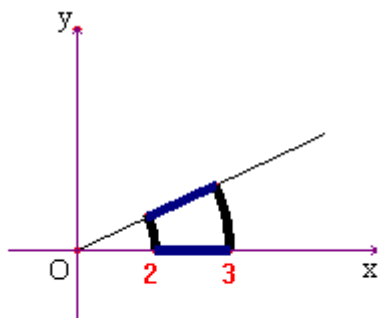
* A corresponde a uma semi-reta de origem O e ângulo $a = \pi/6$ com o eixo Oy.

* $f(A)$ corresponde a uma semi-reta de origem O e ângulo $a' = \pi/3$ com o eixo Ox.



* B corresponde a um setor com ângulo $\pi/6$, limitado pelo eixo Ox, e interceptado por um anel entre os raios 4 e 9..

* $f(z) = z^2$ causa ampliação no argumento e modificação no raio.



7.3. SOBRE A FUNÇÃO $F(Z) = e^Z$

(VER ANEXOS)

* Esta função transforma as retas horizontais $x=c$ constante em círculos de raio e^c .

$$e^x = X + i Y$$

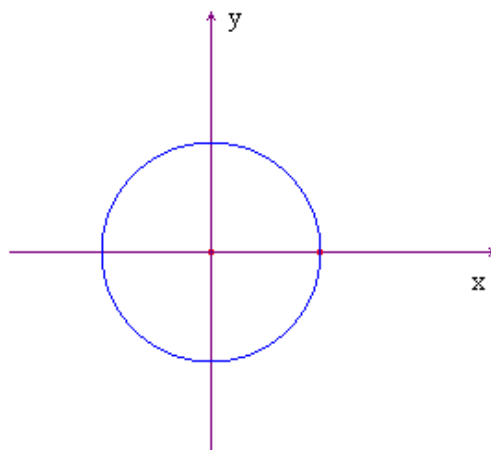
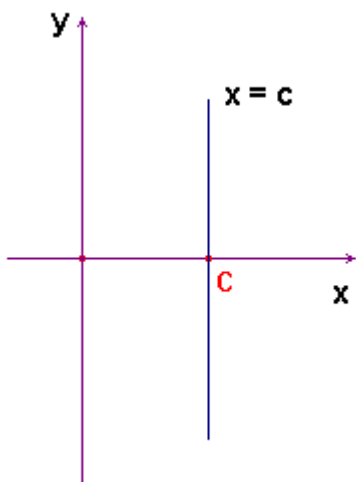
$$X = e^x \cos y$$

$$Y = e^x \operatorname{sen} y$$

* Se $x=c$ e y é variável obtemos:

$$X = e^c \cos y \text{ e } Y = e^c \operatorname{sen} y$$

O lugar geométrico desta equação no plano é um círculo de raio e^c .

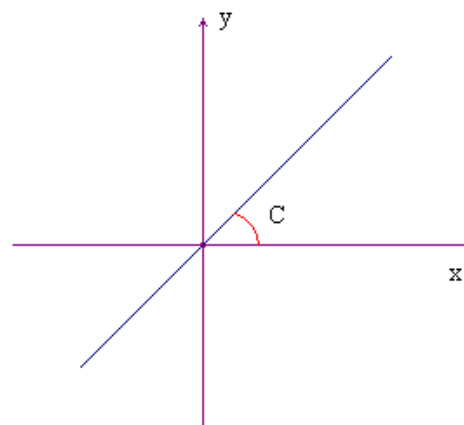


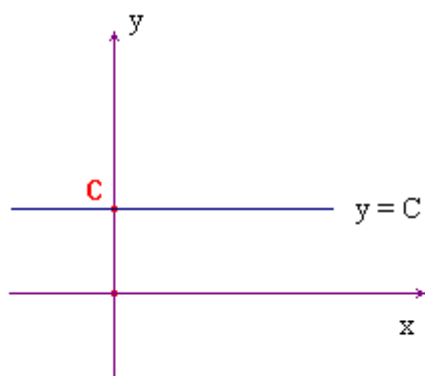
* Por outro lado se $y = c$ constante, teremos

$$X = e^x \cdot \cos c \text{ e } Y = e^x \cdot \sin c$$

* Daí vem que $Y = \tan c \cdot X$

* O lugar geométrico desta equação no plano é uma reta que faz um ângulo c com o eixo OX positivo.





7.4. SOBRE A FUNÇÃO $F(z) = 1/z$

Pode-se ver que:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

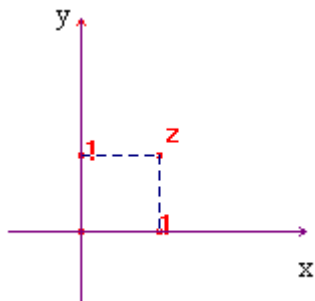
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{(x-iy)}{(x-iy)} = \frac{x-iy}{(x^2+y^2)} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

pois,

$$\begin{aligned}\bar{z} &= x - iy \\ |z| &= \sqrt{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

Assim $f(z) = 1/z$ corresponde a uma reflexão devida a função $f(z)$ composta com uma inversão do raio.

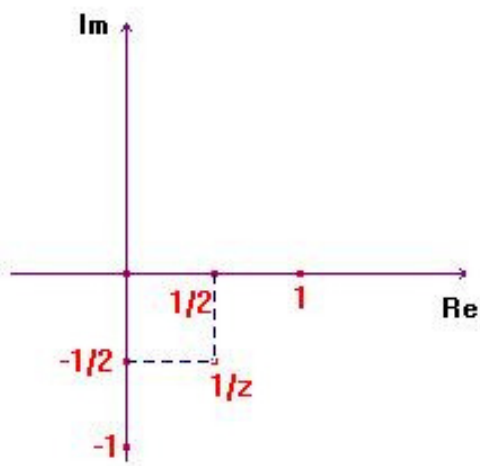
Por exemplo, se $z = 1 + i$, temos:



$$|z| = \sqrt{2} > 1$$

$$|z^2| = 2$$

$$\frac{1}{|z|^2} = \frac{1}{2} < 1$$



$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

Podemos expressar z na forma trigonométrica:

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arg z = \operatorname{arc} \operatorname{tg} y / x$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{r(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)}{r^2}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)$$

Ou seja, o efeito da forma $f(z) = 1/z$ sobre uma região do plano consiste em transformá-la numa região simétrica com inversão do raio.

8. Resolução das Atividades (5)

01. Reflexão

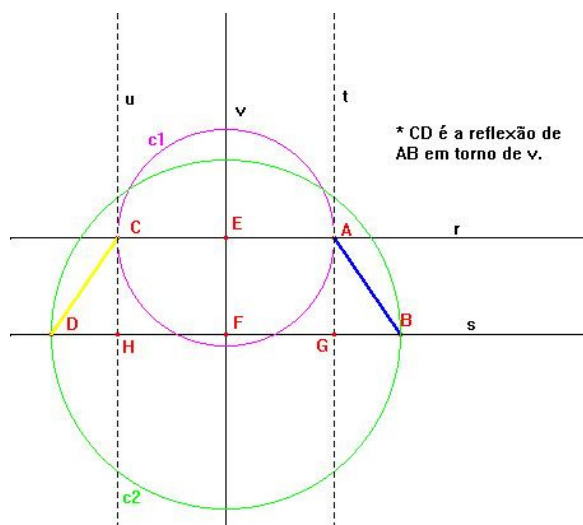
“Seja R uma reta no plano π . A *reflexão* em torno do eixo R é a transformação $\rho : \pi \rightarrow \pi$, que associa a cada ponto X do plano o ponto X' tal que R é a mediatriz do segmento XX' .”
(LIMA, 2001)

Atividades:

a) Dado um segmento \overline{AB} e uma reta r , trace a reflexão de AB com relação a r .

Resolução:

- * Sejam a reta v e o segmento \overline{AB} , não coincidentes.
- * Reta r perpendicular a reta v por A .
- * Reta s perpendicular a reta v por B .
- * $r \cap v = E$ e $s \cap v = F$.
- * Circunferência c_1 de centro E e raio \overline{EA} .
- * Circunferência c_2 de centro F e raio \overline{FB} .
- * $c_1 \cap r = C$ e $c_2 \cap s = D$.
- * O segmento \overline{CD} é a reflexão de \overline{AB} em torno de v .



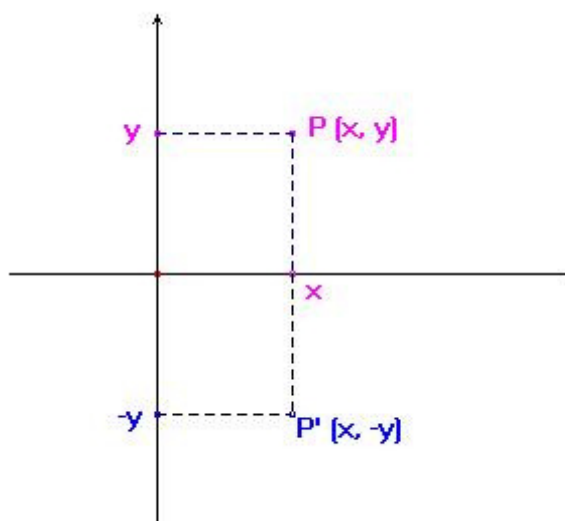
b) Dado um sistema de eixos coordenados e um ponto $P(x,y)$, no 1º quadrante, encontre a imagem de P pela função reflexão em torno do eixo XX. Expresse essa função por uma equação analítica $f(x,y)$.

Resolução:

* A função $f(x, y) = (x, -y)$ é a função que reflete um ponto em torno do eixo dos XX.

* Então: $f(P) = f(x, y) = (x, -y) = P'$

* O ponto P' é a reflexão de P em torno do eixo dos XX.



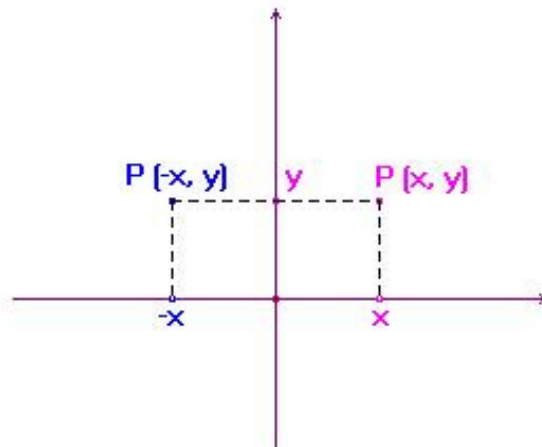
c) Dado um sistema de eixos coordenados e um ponto $P(x, y)$, no 1º quadrante, encontre a imagem de P pela função reflexão em torno do eixo YY. Expresse essa função por uma equação analítica $g(x, y)$.

Resolução:

* A função $g(x, y) = (-x, y)$ é a função que reflete um ponto em torno do eixo dos YY.

* Então: $g(P) = g(x, y) = (-x, y) = P'$

* O ponto P' é a reflexão de P em torno do eixo dos YY.



d) Considere o plano XOY como representante do plano complexo. Associe a cada ponto (x, y) o número complexo $z = x + iy$. Expresse ambas as funções reflexão como uma equação complexa, $w = f(z)$, com z e w números complexos:

Reflexão em torno do eixo XX : $f(z) = \dots\dots\dots$

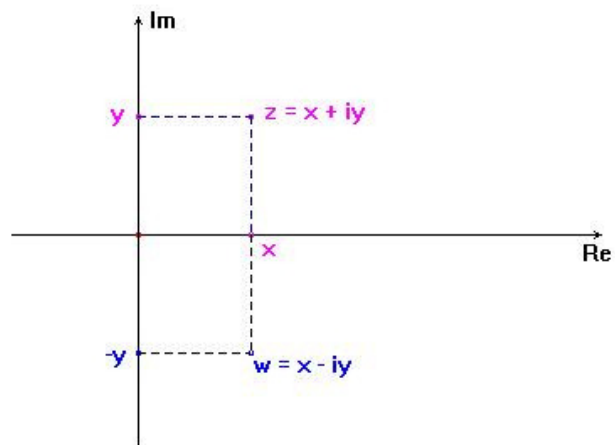
Reflexão em torno do eixo dos YY: $g(z) = \dots\dots\dots$

Resolução:

* A função $f(z) = x - iy = \text{conjugado}$ é a função complexa que reflete um número complexo em torno do eixo dos XX.

* Então: $f(z) = f(x + iy) = x - iy = \bar{z} = w$, onde \bar{z} = conjugado de z .

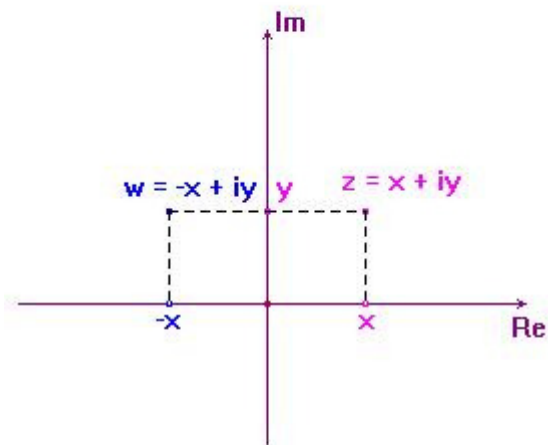
* O número complexo w é a reflexão de z em torno do eixo dos XX.



* A função $g(z) = -x + iy = -\text{conjugado}$ é a função complexa que reflete o número complexo z em torno do eixo dos YY.

* Então: $g(z) = g(x + iy) = -x + iy = -z = w$, onde $z = \text{conjugado de } z$.

* O número complexo w é a reflexão de z em torno do eixo dos YY.



02. Homotetia:

“ Fixado um ponto O no plano π e dado um número real $k \neq 0$, a *homotetia de centro O e razão k* é a transformação que a cada ponto A do plano π associa o ponto $A' = H_{o,k}(A)$ tal que $OA' = k \cdot OA$. (WAGNER, 1993)

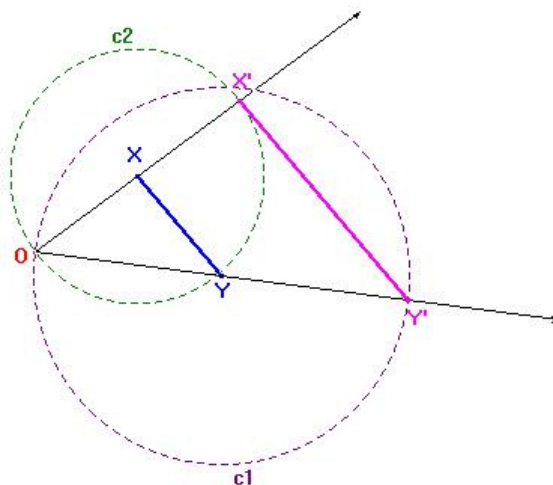
Atividades

a) Dado o segmento \overline{AB} , um ponto O no plano π , trace as *homotetias* de AB de centro O com razão 2 e com razão $\frac{1}{2}$.

Resolução:

Razão 2:

- * Semi-reta \overrightarrow{OA} .
- * Semi-reta \overrightarrow{OB} .
- * Circunferência c_1 de centro Y e raio \overrightarrow{OB} .
- * $c_1 \cap \overrightarrow{OB} = B'$
- * Circunferência c_2 de centro X e raio \overrightarrow{OA} .
- * $c_2 \cap \overrightarrow{OA} = A'$
- * $\overline{A'B'}$ é a homotetia de centro O e razão 2 de \overline{AB} .



Razão $\frac{1}{2}$:

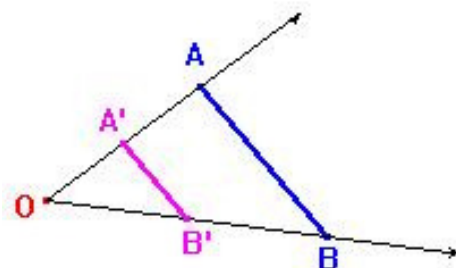
* Semi-reta \overrightarrow{OA} .

* Semi-reta \overrightarrow{OB} .

* B' = ponto médio de \overrightarrow{OB} .

* A' = ponto médio de \overrightarrow{OA} .

* $\overline{A'B'}$ é a homotetia de centro O e razão $\frac{1}{2}$ de \overline{AB} .



b) Dado um sistema de eixos coordenados XOY e um ponto $P(x,y)$, no 1º quadrante, encontre a imagem de P pelas funções homotetia de centro O e razões 2 e $\frac{1}{2}$, respectivamente.. Expresse essa função por uma equação analítica $f(x,y)$.

Resolução:

Razão 2:

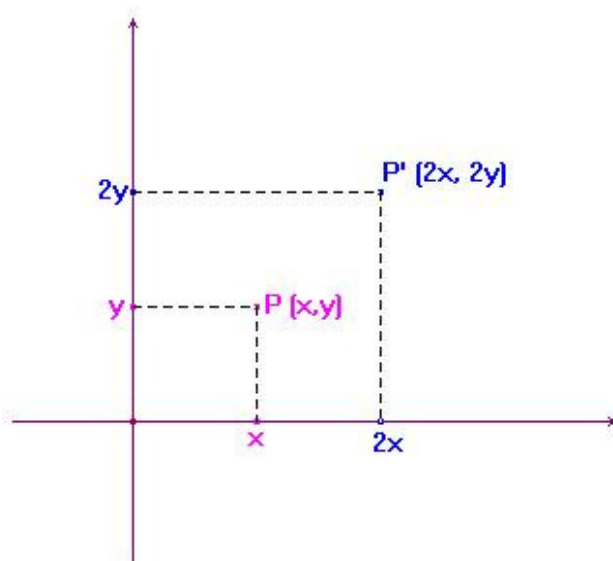
* A homotetia de razão 2 e centro $O = (0, 0)$ é definida pela função

$$f(x, y) = 2(x, y) = (2x, 2y).$$

* Aplicando esta homotetia no ponto P, obtemos:

$$f(P) = f(x, y) = 2(x, y) = (2x, 2y) = P'$$

* O ponto P' é a homotetia de centro O e razão 2 do ponto P.



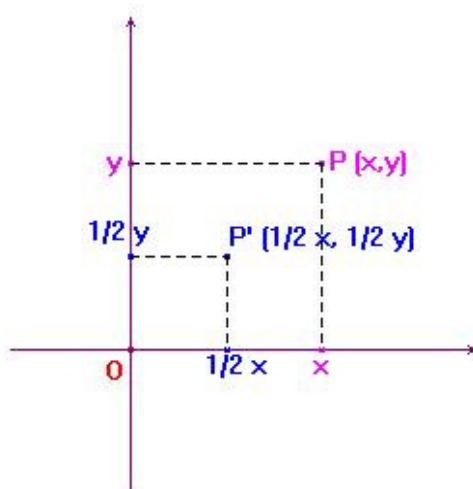
Razão 1/2:

* A função $g(z) = \frac{1}{2}(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$ define a homotetia de centro $O = (0, 0)$ e razão $\frac{1}{2}$.

* Aplicando esta função no ponto P, obtemos:

$$g(P) = g(x, y) = \frac{1}{2}(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y) = P'$$

* O ponto P' é a homotetia de centro O e razão $\frac{1}{2}$ de P.



c) Considere o plano XOY como representante do plano complexo. Associe a cada ponto (x,y) o número complexo $z = x+iy$. Expresse a função homotetia de centro O e razão K , onde K é um número real não nulo, como uma equação complexa, $w=f(z)$, com z e w números complexos.

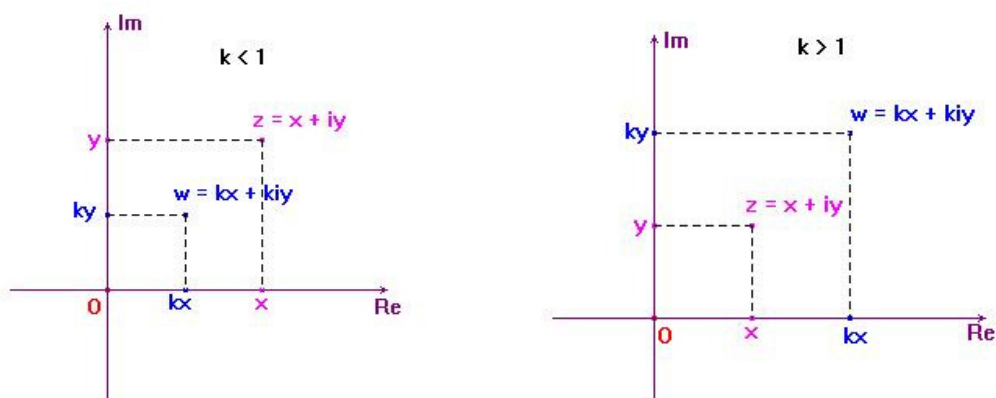
Homotetia de centro O e razão k: $f(z) = \dots\dots\dots$

Resolução:

* A função que define a homotetia de razão k e centro $O = 0 + 0i = 0$ é:

$f(z) = k \cdot z$, onde k é um número real qualquer.

* Se $k < 1$, temos uma redução; se $k > 1$, temos uma ampliação.



03. Simetria:

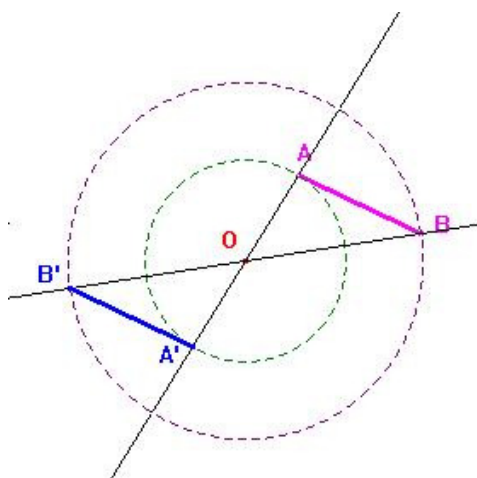
“A *simetria* em torno do ponto O é a transformação φ (do plano ou do espaço) que faz corresponder a cada ponto X o ponto $\varphi(X) = X'$ tal que O é o ponto médio do segmento XX' .” (LIMA, 2001)

Atividades

a) Dado o segmento \overline{AB} e o ponto O , encontre o simétrico de \overline{AB} em torno do ponto O .

Resolução:

- * reta \overleftrightarrow{OA}
- * $c_1 =$ circunferência de centro O e raio \overline{OA}
- * $c_1 \cap \overleftrightarrow{OA} = A'$
- * reta \overleftrightarrow{OB}
- * $c_2 =$ circunferência de centro O e raio \overline{OB}
- * $c_2 \cap \overleftrightarrow{OB} = B'$
- * $\overline{A'B'}$ é o simétrico em relação a O de \overline{AB} .



b) Dado um sistema de eixos coordenados XOY e um ponto $P(x,y)$, no 1º quadrante, encontre a imagem de P pela função simetria em torno de O . Expresse essa função por uma equação analítica $f(x,y)$.

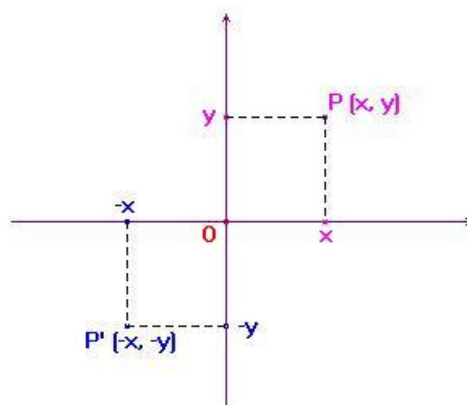
Resolução:

* A função $f(x, y) = (-x, -y)$ é a função que define a simetria de um ponto em relação ao ponto $O = (0, 0)$.

* Aplicando a função sobre P , obtemos:

$$f(P) = f(x, y) = (-x, -y) = P'$$

* P' é o simétrico de P em relação a $O = (0, 0)$.



c) Considere o plano XOY como representante do plano complexo. Associe a cada ponto (x,y) o número complexo $z = x+iy$. Expresse a função simetria de centro O como uma equação complexa, $w=f(z)$, com z e w números complexos.

Simetria de centro O: $f(z) = \dots\dots\dots$

Resolução:

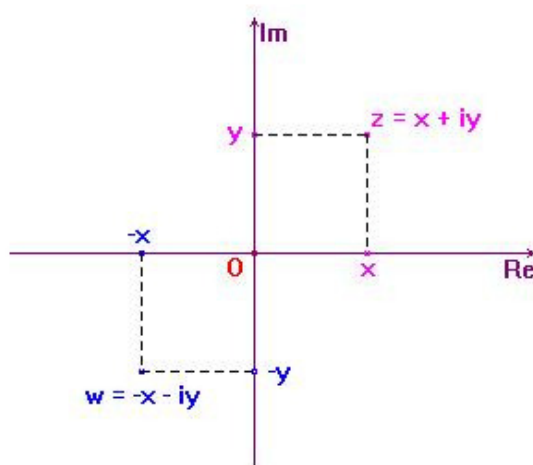
* A função complexa que define a simetria de centro $O = 0 + 0i = 0$, é:

$$f(z) = -x -iy = -z.$$

* Aplicando a função no ponto z , obtemos:

$$f(z) = f(x + iy) = -x -iy = w$$

* O número complexo w é o simétrico de z em relação ao ponto $O = 0 + 0i = 0$



04. Translação:

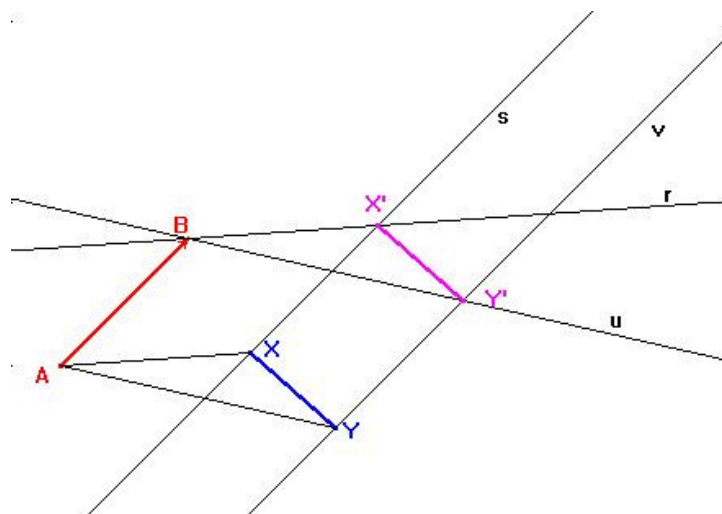
“Seja AB um segmento orientado, no plano π ou no espaço E . (*Orientado* significa que a ordem em que os extremos são citados é relevante: primeiro A , e depois B .) A *translação* determinada por AB é a transformação (correspondência biunívoca) $\tau : \pi \rightarrow \pi$, ou $\tau : E \rightarrow E$, definida por $\tau(X) = X'$, de modo que (AB, XX') e (AX, BX') sejam os pares de lados opostos de um paralelogramo.” (LIMA, 2001)

Atividades

a) **Dado um segmento \overline{AB} orientado e um outro segmento \overline{XY} , não paralelo com \overline{AB} . Encontre a translação de \overline{XY} determinada por \overline{AB} .**

Resolução:

- * segmento \overline{AX} .
- * reta r paralela a \overline{AX} por B .
- * reta s paralela a \overline{AB} por X .
- * $r \cap s = X'$.
- * segmento \overline{AY} .
- * reta u paralela a \overline{AY} por B .
- * reta v paralela a \overline{AB} por Y .
- * $u \cap v = Y'$
- * $\overline{X'Y'}$ é a translação de \overline{XY} segundo \overline{AB} .



b) Dado um sistema de eixos coordenados XOY e um ponto $P(x,y)$, no 1º quadrante, encontre a imagem de P pela função translação determinada por um segmento orientado de origem em O e extremidade em $A(u,v)$, um ponto do 1º quadrante, não alinhado com OP . Expresse essa função por uma equação analítica $f(x,y)$.

Resolução:

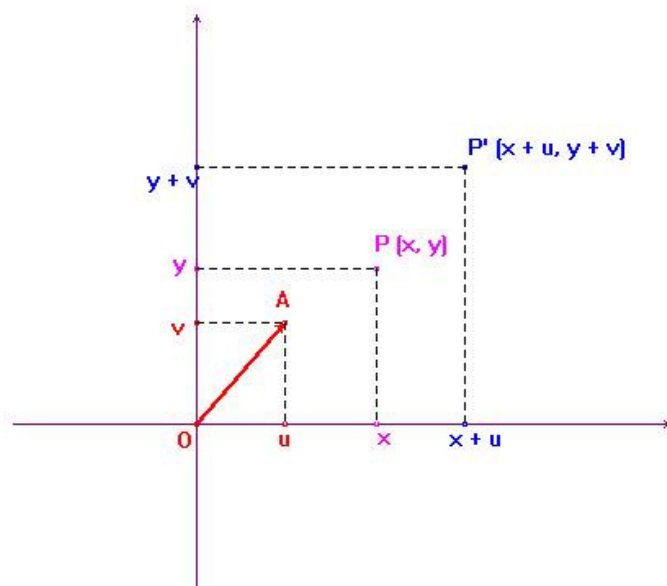
* Sejam os pontos $P(x, y)$, $O(0, 0)$ e $A(u, v)$

* A translação de \overline{XY} em relação a \overline{OA} é dada pela função:
 $f(x, y) = (x + u, y + v)$

* Aplicando a função no ponto P , temos:

$$f(P) = f(x, y) = (x + u, y + v) = P'$$

* O ponto P' é a translação de P segundo o segmento orientado \overline{OA} .



c) Considere o plano XOY como representante do plano complexo. Associe a cada ponto (x,y) o número complexo $z = x+iy$. Expresse a função translação determinada pelo número complexo $u+iv = (u,v)$ como uma equação complexa, $w=f(z)$, com z e w números complexos.

Translação determinada por $u+iv$: $f(z) = \dots\dots\dots$

Resolução:

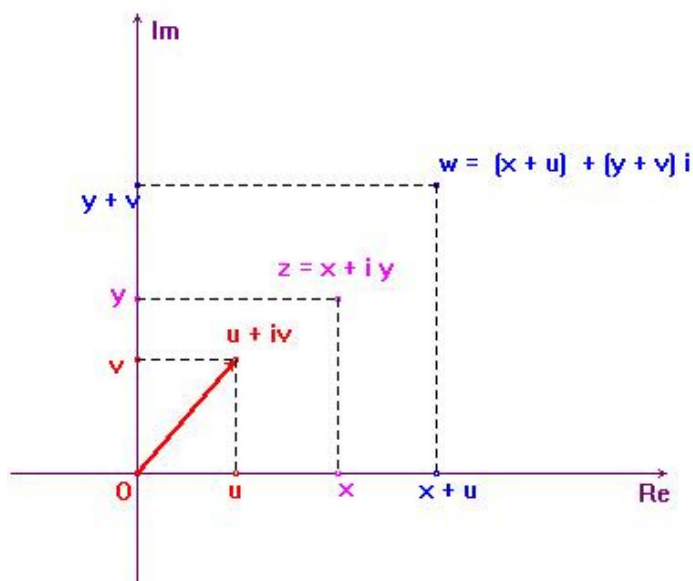
* A função complexa que define a translação de $z = x + iy$, determinada pelo número complexo $u + iv$ é:

$$f(z) = z + (u + iv)$$

* Aplicando a função em z , obtemos:

$$f(z) = f(x + iy) = (x + iy) + (u + iv) = (x + u) + (y + v)i = w$$

* O número complexo w é a translação de z segundo o número complexo $(u + iv)$.



05. Rotação:

“Fixemos um ponto O no plano π agora orientado (como a tradição recomenda, o sentido positivo é o anti-horário). Dado um ângulo α , a *rotação de centro O e amplitude α* é a transformação que a cada ponto A do plano π associa o ponto $A' = R_\alpha(A)$ de forma que se tenha $AO' = AO$, $\widehat{AOA'} = \alpha$ e o sentido de A para A' (em torno de O), positivo.” (WAGNER, 1993)

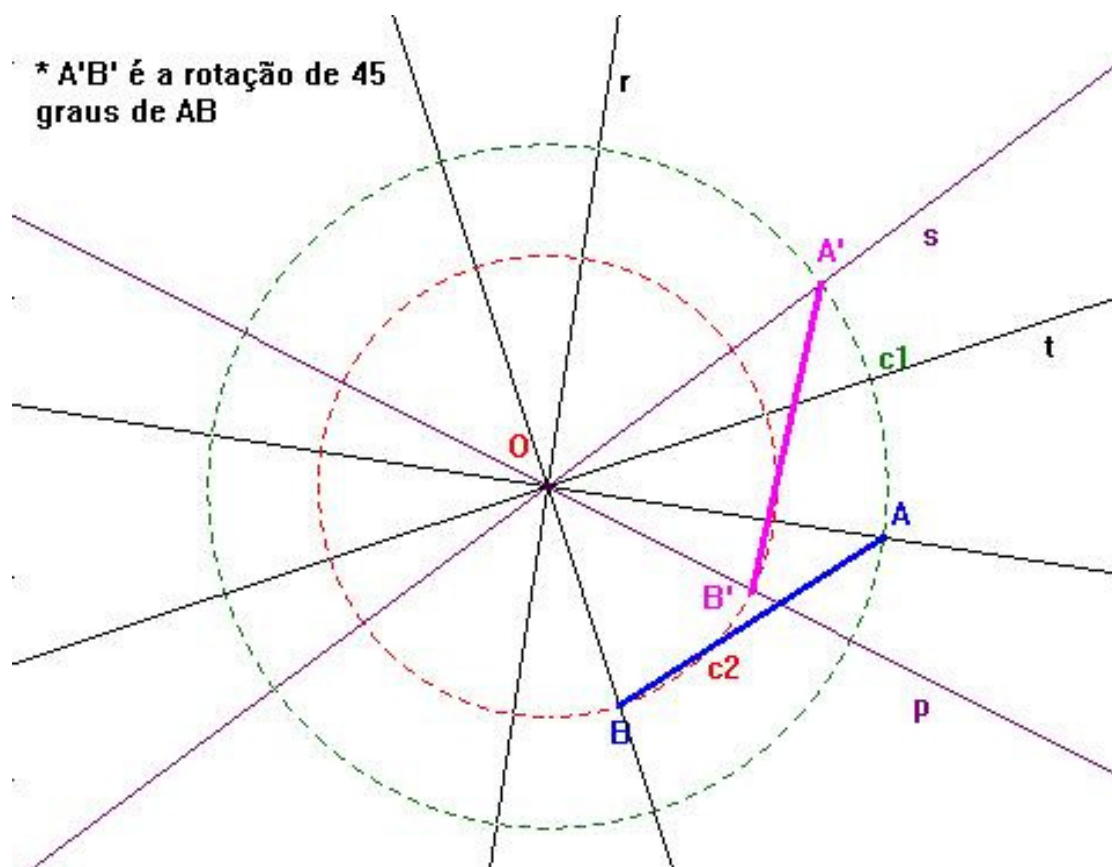
Atividades

a) Dado um ponto O e um segmento \overline{AB} , de forma que O , A e B não sejam colineares, construa a rotação de \overline{AB} de centro O e amplitude 45° .

Resolução:

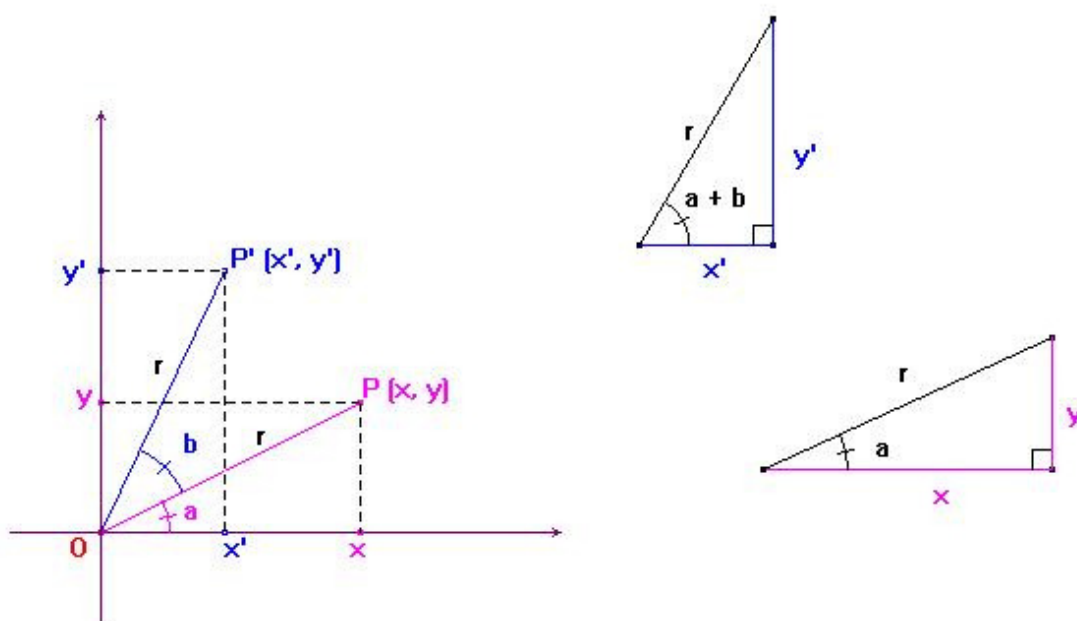
- * reta r perpendicular à reta \overline{OA} por O .
- * bissetriz s de \widehat{AOA} .
- * circunferência c_1 de centro O e raio OA .
- * $c_1 \cap s = A'$.
- * reta t perpendicular à reta \overline{OB} por O .

- * bissetriz p de $\hat{t}OB$.
- * circunferência c_2 de centro O e raio OB .
- * $c_2 \cap p = B'$
- * O segmento $\overline{A'B'}$ é a rotação do segmento \overline{AB} .



b) Dado um sistema de eixos coordenados XOY e um ponto $P(x,y)$, no 1º quadrante, encontre a imagem de P pela função rotação de P com centro O e amplitude α , onde α é um ângulo qualquer. Neste caso, para facilitar a visualização, pode-se pensar em α como um ângulo agudo, com medida próxima a 45° . Expresse essa função por uma equação analítica $f(x,y)$.

Resolução:



* Queremos uma função $f(x, y) = (x', y')$. Do triângulo retângulo com ângulo $\theta + \alpha$, obtemos:

$$\text{sen}(\theta + \alpha) = y'/r \Rightarrow y' = r \cdot \text{sen}(\theta + \alpha) = r \cdot (\text{sen} \theta \cdot \cos \alpha + \cos \theta \cdot \text{sen} \alpha)$$

$$\cos(\theta + \alpha) = x'/r \Rightarrow x' = r \cdot \cos(\theta + \alpha) = r \cdot (\cos \theta \cdot \cos \alpha - \text{sen} \theta \cdot \text{sen} \alpha)$$

* Do segundo triângulo, obtemos as seguintes relações:

$$\cos \theta = x/r \quad \text{e} \quad \text{sen} \theta = y/r$$

Substituindo-as nas expressões de x' e y' , obtemos que:

$$y' = r \cdot ((y/r) \cdot \cos \alpha + (x/r) \cdot \text{sen} \alpha) = (y \cos \alpha + x \text{sen} \alpha)$$

$$x' = r \cdot ((x/r) \cdot \cos \alpha - (y/r) \cdot \text{sen} \alpha) = (x \cos \alpha - y \text{sen} \alpha)$$

* Portanto: $f(x, y) = f(x', y') = (x \cos \alpha - y \text{sen} \alpha, y \cos \alpha + x \text{sen} \alpha)$

c) Considere o plano XOY como representante do plano complexo. Associe a cada ponto (x,y) o número complexo $z = x+iy$.

Este número pode ser expresso em coordenadas polares, R e θ

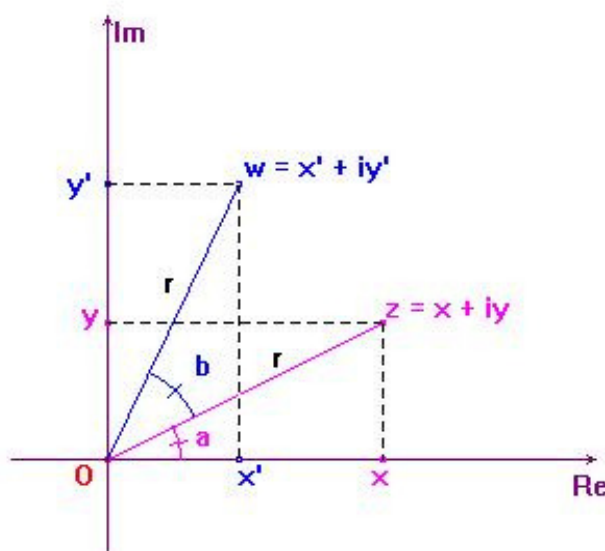
R: representa o módulo do número $x+iy$, que é a medida do segmento OP.

θ : representa o argumento do número $x+iy$, que é a medida do ângulo que o raio vetor OP forma com o eixo dos XX positivo.

$$z=x+iy = R. (\cos \theta + i \sen \theta)$$

Expresse a função rotação de z , em torno de O, com amplitude α , como uma equação complexa, $w=f(z)$, com z e w números complexos.

Resolução:



* Do item anterior, já sabemos que:

$$f(x, y) = (x', y') = (x \cos \alpha - y \sen \alpha, y \cos \alpha + x \sen \alpha).$$

* Comparando a definição de multiplicação de dois números complexos:

$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc) i$ com a expressão que temos a função, concluímos que:

$$a = x, b = y, c = \cos \alpha \text{ e } d = \sin \alpha.$$

* Então podemos escrever:

$f(z) = (x + iy) \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) = k \cdot z$, onde $k, z \in \mathbb{C}$ e $|k| = 1$, para manter a norma de z constante.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS COM QUADRADOS

01. Reflexão

“Seja R uma reta no plano π . A *reflexão* em torno do eixo R é a transformação $\rho : \pi \rightarrow \pi$, que associa a cada ponto X do plano o ponto X' tal que R é a mediatriz do segmento XX' .”
(LIMA, 2001)

Atividades:

a) Dado um segmento \overline{AB} e uma reta r , trace a reflexão de AB com relação a r .

Resolução:

* Sejam a reta v e o segmento \overline{AB} , não coincidentes.

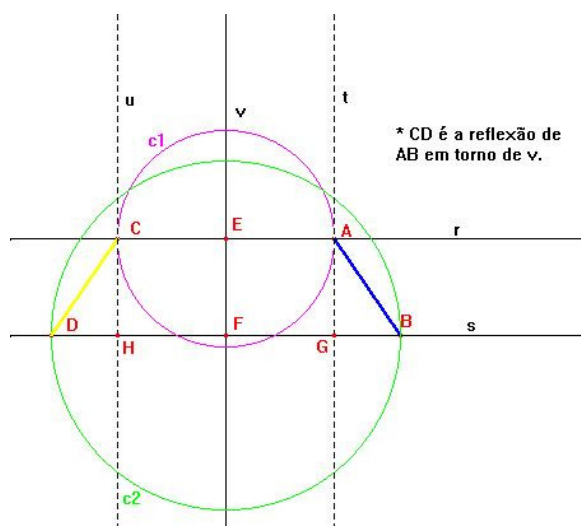
* Reta r perpendicular a reta v por A .

* Reta s perpendicular a reta v por B .

* $r \cap v = E$ e $s \cap v = F$.

* Circunferência c_1 de centro E e raio \overline{EA} .

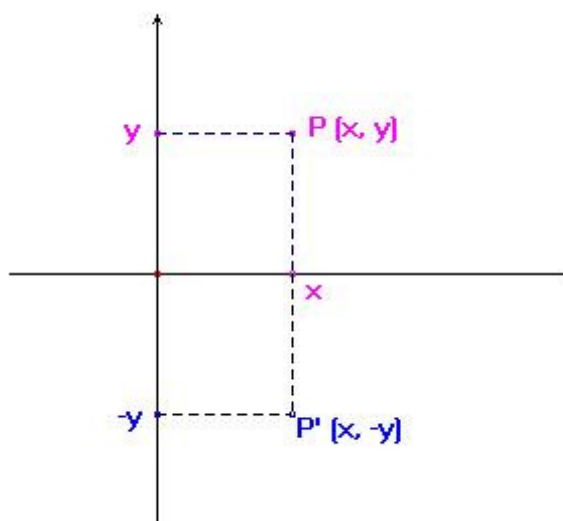
- * Circunferência c_2 de centro F e raio \overline{FB} .
- * $c_1 \cap r = C$ e $c_2 \cap s = D$.
- * O segmento \overline{CD} é a reflexão de \overline{AB} em torno de v .



b) Dado um sistema de eixos coordenados e um ponto $P(x,y)$, no 1º quadrante, encontre a imagem de P pela função reflexão em torno do eixo XX . Expresse essa função por uma equação analítica $f(x,y)$.

Resolução:

- * A função $f(x, y) = (x, -y)$ é a função que reflete um ponto em torno do eixo dos XX .
- * Então: $f(P) = f(x, y) = (x, -y) = P'$
- * O ponto P' é a reflexão de P em torno do eixo dos XX .



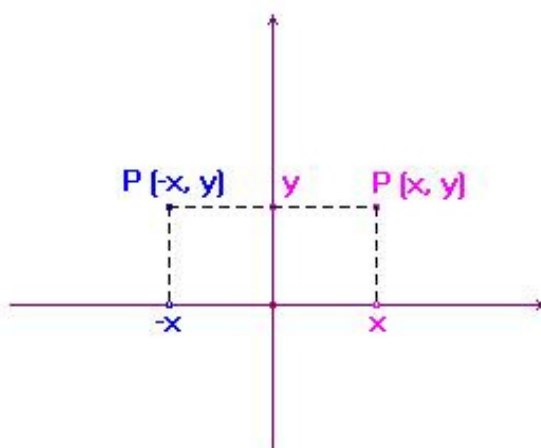
c) Dado um sistema de eixos coordenados e um ponto $P(x, y)$, no 1º quadrante, encontre a imagem de P pela função reflexão em torno do eixo YY. Expresse essa função por uma equação analítica $g(x, y)$.

Resolução:

* A função $g(x, y) = (-x, y)$ é a função que reflete um ponto em torno do eixo dos YY.

* Então: $g(P) = g(x, y) = (-x, y) = P'$

* O ponto P' é a reflexão de P em torno do eixo dos YY.



d) Considere o plano XOY como representante do plano complexo. Associe a cada ponto (x,y) o número complexo $z = x+iy$. Expresse ambas as funções reflexão como uma equação complexa, $w=f(z)$, com z e w números complexos:

Reflexão em torno do eixo XX : $f(z) = \dots\dots\dots$

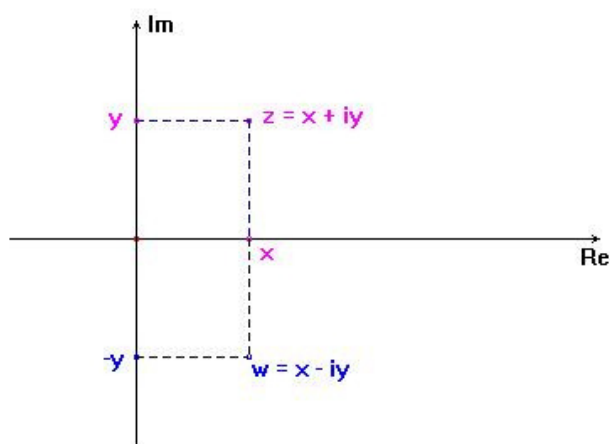
Reflexão em torno do eixo dos YY: $g(z) = \dots\dots$

Resolução:

* A função $f(z) = x - iy = \text{conjugado}$ é a função complexa que reflete um número complexo em torno do eixo dos XX.

* Então: $f(z) = f(x + iy) = x - iy = \bar{z} = w$

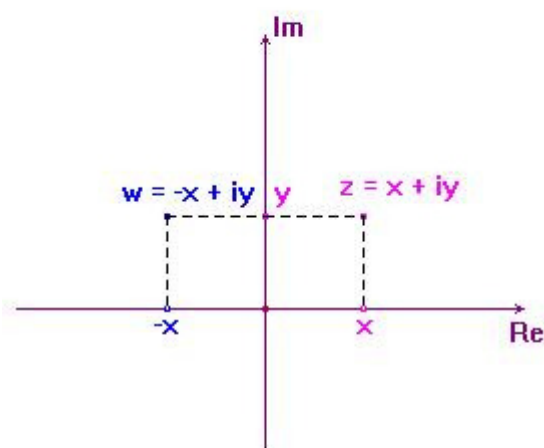
* O número complexo w é a reflexão de z em torno do eixo dos XX.



* A função $g(z) = -x + iy = -$ conjugado é a função complexa que reflete o número complexo z em torno do eixo dos YY.

* Então: $g(z) = g(x + iy) = -x + iy = -\bar{z} = w$

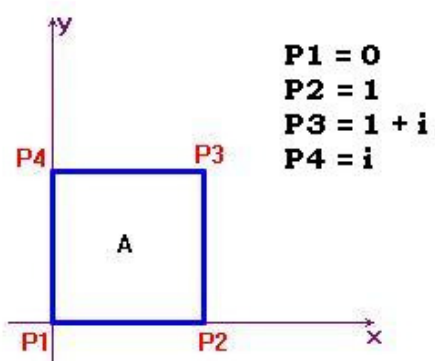
* O número complexo w é a reflexão de z em torno do eixo dos YY.



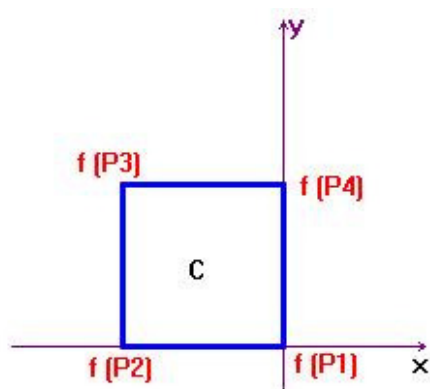
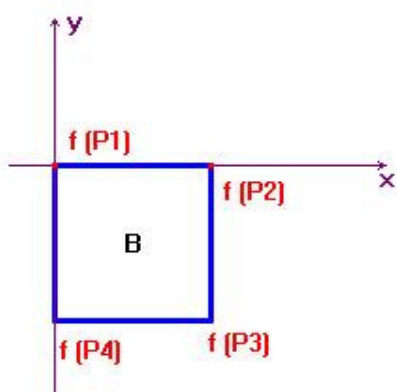
e) A figura abaixo representa a região complexa

$A = \{ z = x + iy / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \}$. Encontre as regiões $B = f(A)$ e $C = g(A)$, imagem de A pelas funções definidas acima. Certifique-se de que B e C correspondem às

transformações de A por efeito da reflexão em torno do eixo dos XX e em torno dos YY, respectivamente.



Resolução:



02. Homotetia:

“ Fixado um ponto O no plano π e dado um número real $k \neq 0$, a *homotetia de centro O e razão k* é a transformação que a cada ponto A do plano π associa o ponto $A' = H_{O,k}(A)$ tal que $OA' = k \cdot AO$. (WAGNER, 1993)

Atividades

a) Dado o segmento \overline{AB} , um ponto O no plano π , trace as *homotetias* de AB de centro O com razão 2 e com razão $\frac{1}{2}$.

Resolução:

Razão 2:

* Semi-reta \overrightarrow{OA} .

* Semi-reta \overrightarrow{OB} .

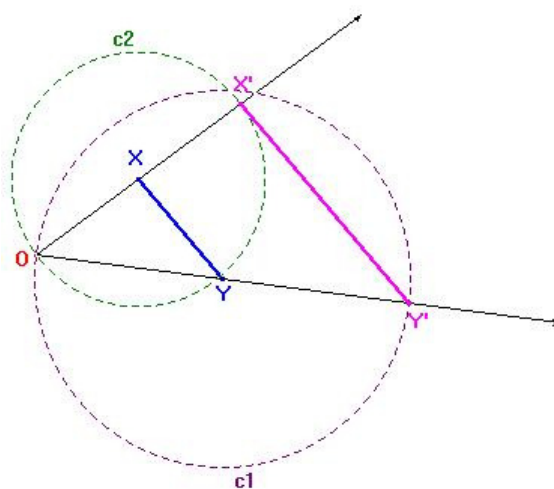
* Circunferência c_1 de centro Y e raio \overrightarrow{OB} .

* $c_1 \cap \overrightarrow{OB} = B'$

* Circunferência c_2 de centro X e raio \overrightarrow{OA} .

* $c_2 \cap \overrightarrow{OA} = A'$

* $\overline{A'B'}$ é a homotetia de centro O e razão 2 de \overline{AB} .



Razão $\frac{1}{2}$:

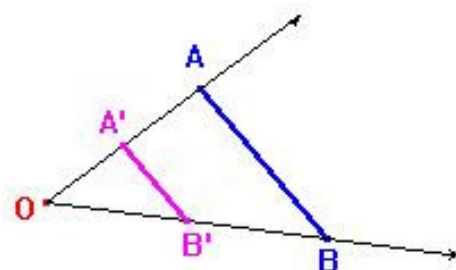
* Semi-reta \overrightarrow{OA} .

* Semi-reta \overrightarrow{OB} .

* B' = ponto médio de \overrightarrow{OB} .

* A' = ponto médio de \overrightarrow{OA} .

* $\overline{A'B'}$ é a homotetia de centro O e razão $\frac{1}{2}$ de \overline{AB} .



b) Dado um sistema de eixos coordenados XOY e um ponto $P(x,y)$, no 1º quadrante, encontre a imagem de P pelas funções homotetia de centro O e razões 2 e $\frac{1}{2}$, respectivamente.. Expresse essa função por uma equação analítica $f(x,y)$.

Resolução:

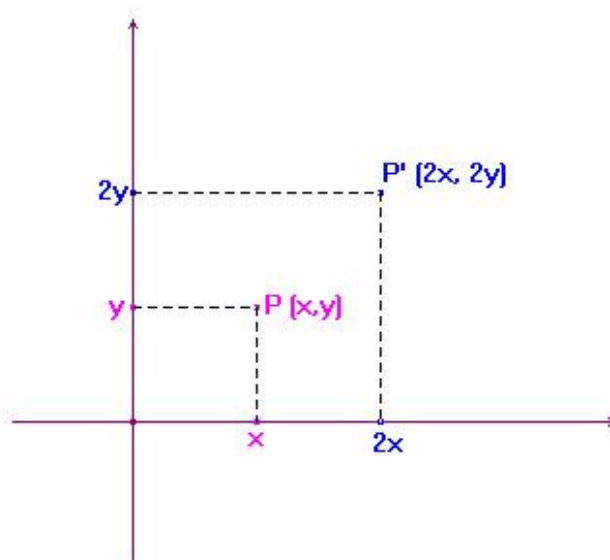
Razão 2:

* A homotetia de razão 2 e centro $O = (0, 0)$ é definida pela função $f(x, y) = 2(x, y) = (2x, 2y)$.

* Aplicando esta homotetia no ponto P, obtemos:

$$f(P) = f(x, y) = 2(x, y) = (2x, 2y) = P'$$

* O ponto P' é a homotetia de centro O e razão 2 do ponto P.



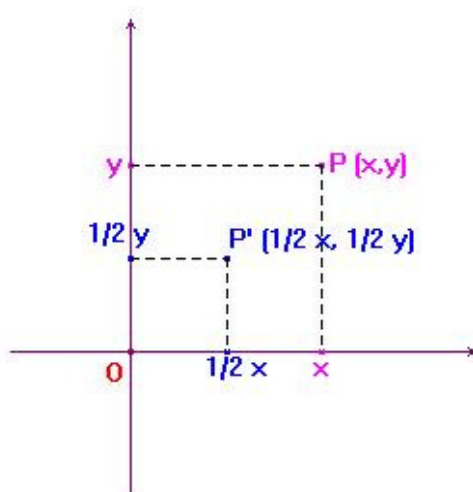
Razão $\frac{1}{2}$:

* A função $g(z) = \frac{1}{2}(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$ define a homotetia de centro $O = (0, 0)$ e razão $\frac{1}{2}$.

* Aplicando esta função no ponto P , obtemos:

$$g(P) = g(x, y) = \frac{1}{2}(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y) = P'$$

* O ponto P' é a homotetia de centro O e razão $\frac{1}{2}$ de P .



c) Considere o plano XOY como representante do plano complexo. Associe a cada ponto (x,y) o número complexo $z = x+iy$. Expresse a função homotetia de centro O e razão K , onde K é um número real não nulo, como uma equação complexa, $w=f(z)$, com z e w números complexos.

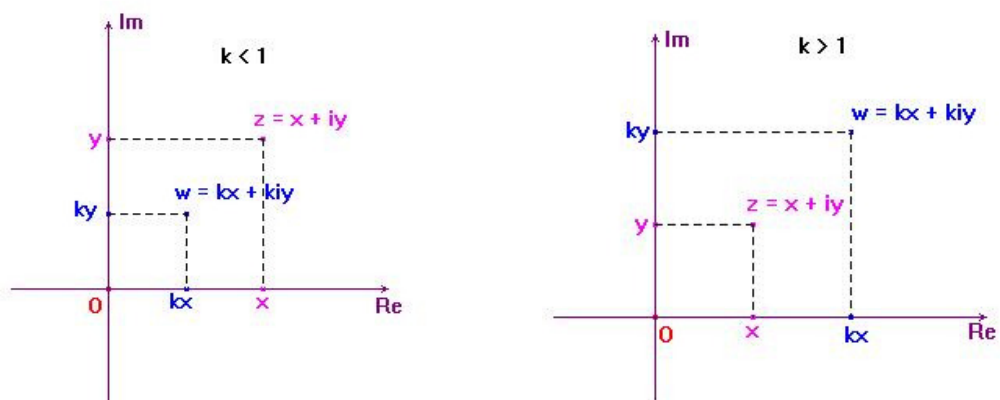
Homotetia de centro O e razão k : $f(z) = \dots\dots\dots$

Resolução:

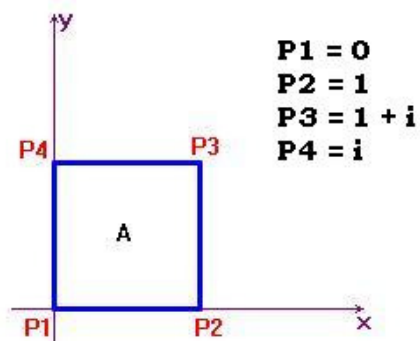
* A função que define a homotetia de razão k e centro $O = 0 + 0i = 0$ é:

$$f(z) = k \cdot z, \text{ onde } k \text{ é um número real qualquer.}$$

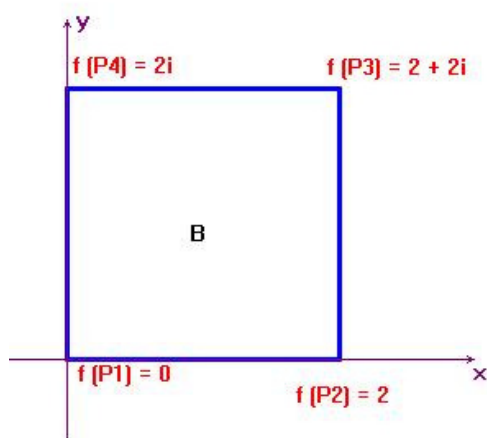
* Se $k < 1$, temos uma redução; se $k > 1$, temos uma ampliação.



d) Encontre a região $B = F(A)$, imagem de A pela função definida acima com $k = 2$. Certifique-se de que B corresponde à transformação de A por efeito de homotetia de razão 2 com relação a O .

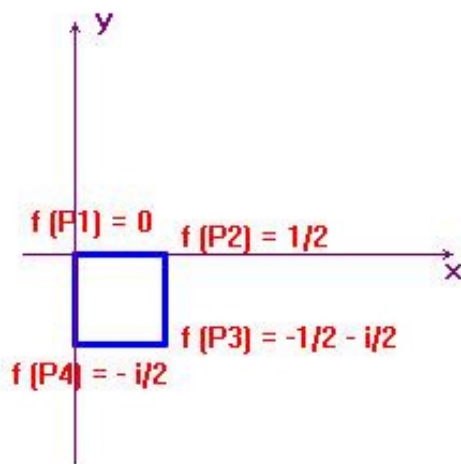


Resolução:



e) Encontre C , resultado da transformação de A pela função complexa $f(z) = \frac{z}{2}$.

Resolução:



03. Simetria:

“A *simetria* em torno do ponto O é a transformação φ (do plano ou do espaço) que faz corresponder a cada ponto X o ponto $\varphi(X) = X'$ tal que O é o ponto médio do segmento XX' .” (LIMA, 2001)

Atividades

a) Dado o segmento \overline{AB} e o ponto O , encontre o simétrico de \overline{AB} em torno do ponto O .

Resolução:

* reta \overleftrightarrow{OA}

* $c_1 =$ circunferência de centro O e raio \overline{OA}

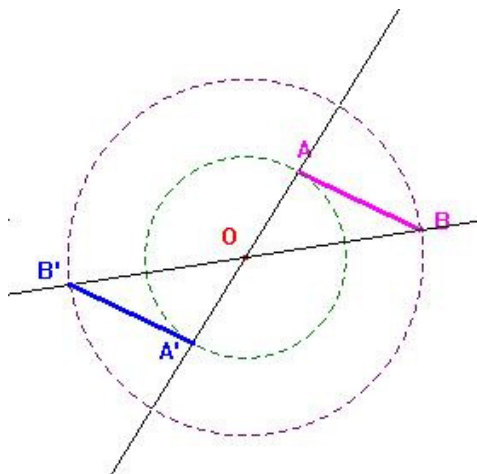
* $c_1 \cap \overleftrightarrow{OA} = A'$

* reta \overleftrightarrow{OB}

* $c_2 =$ circunferência de centro O e raio \overline{OB}

* $c_2 \cap \overleftrightarrow{OB} = B'$

* $\overline{A'B'}$ é o simétrico em relação a O de \overline{AB} .



b) Dado um sistema de eixos coordenados XOY e um ponto $P(x,y)$, no 1º quadrante, encontre a imagem de P pela função simetria em torno de O . Expresse essa função por uma equação analítica $f(x,y)$.

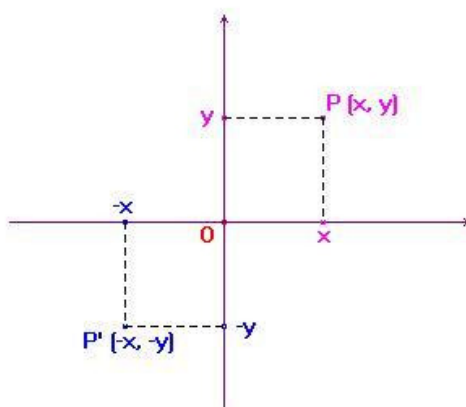
Resolução:

* A função $f(x, y) = (-x, -y)$ é a função que define a simetria de um ponto em relação ao ponto $O = (0, 0)$.

* Aplicando a função sobre P, obtemos:

$$f(P) = f(x, y) = (-x, -y) = P'$$

* P' é o simétrico de P em relação a $O = (0, 0)$.



c) Considere o plano XOY como representante do plano complexo. Associe a cada ponto (x,y) o número complexo $z = x+iy$. Expresse a função simetria de centro O como uma equação complexa, $w=f(z)$, com z e w números complexos.

Simetria de centro O: $f(z) = \dots\dots\dots$

Resolução:

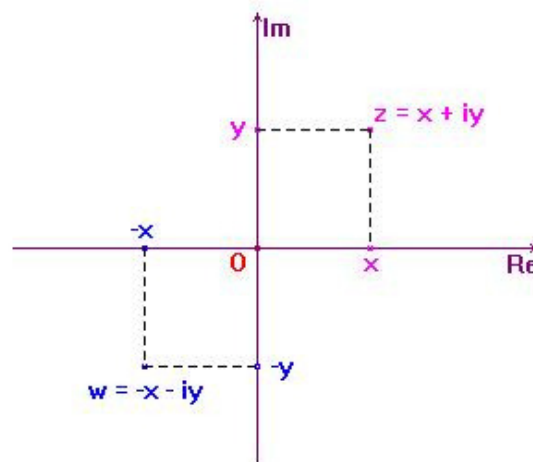
* A função complexa que define a simetria de centro $O = 0 + 0i = 0$, é:

$$f(z) = -x -iy = -z.$$

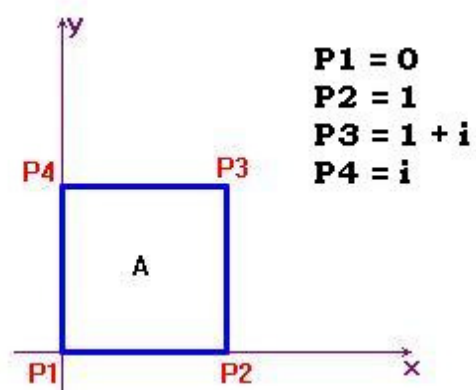
* Aplicando a função no ponto z, obtemos:

$$f(z) = f(x + iy) = -x - iy = w$$

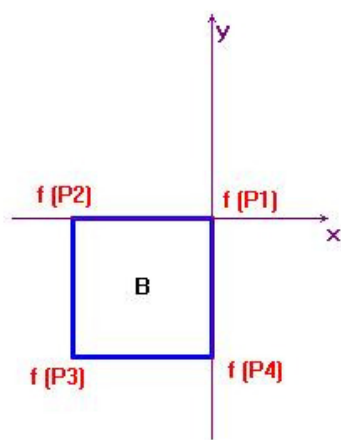
* O número complexo w é o simétrico de z em relação ao ponto $O = 0 + 0i = 0$



d) Encontra a região $B = f(A)$, imagem de A pela função definida acima. Certifique-se de que B resulta do movimento de simetria de A com relação a O .

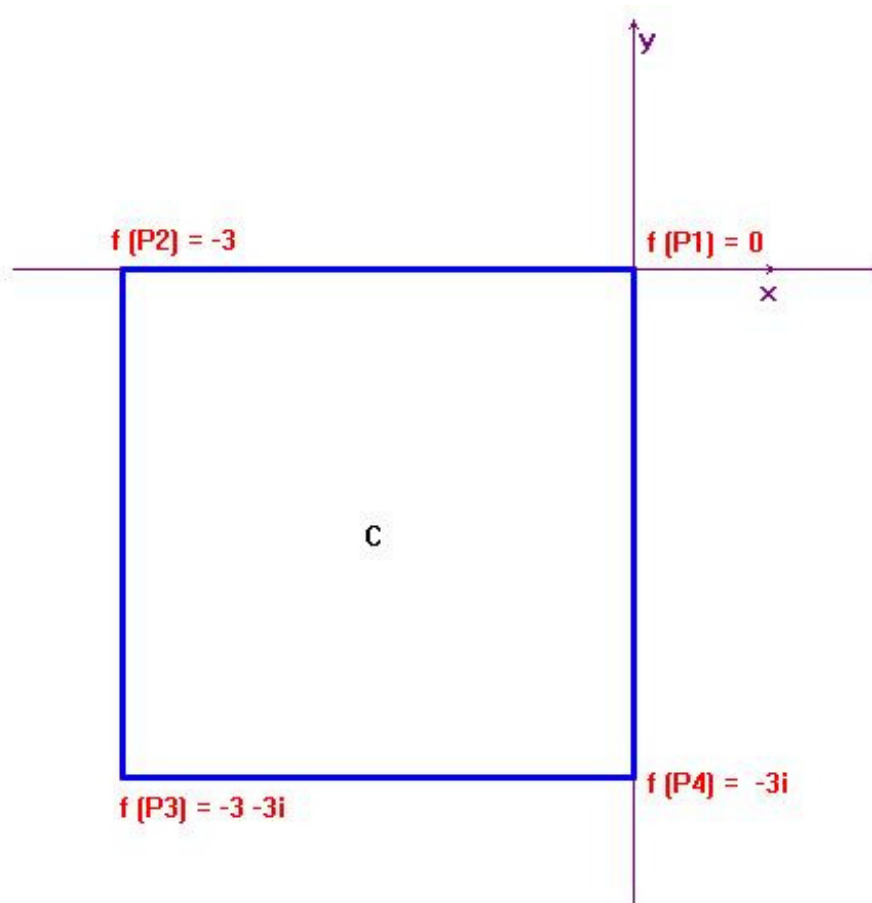


Resolução:



e) Encontre C , resultado da transformação de A pela função complexa $f(z) = -3z$.

Resolução:



04. Translação:

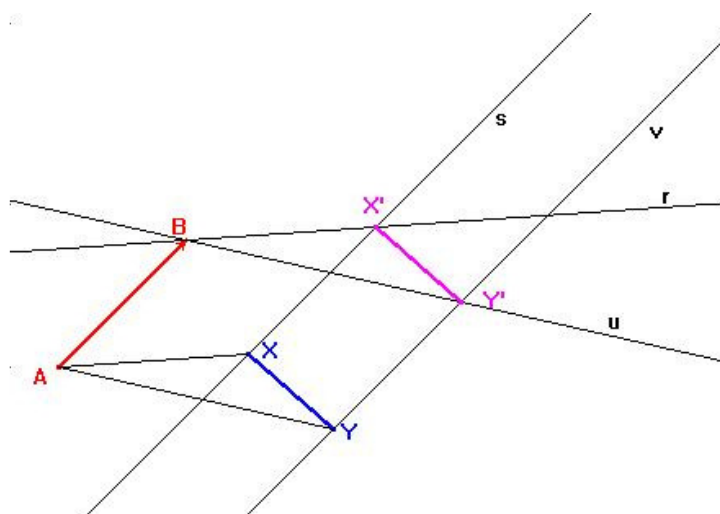
“Seja AB um segmento orientado, no plano π ou no espaço E . (*Orientado* significa que a ordem em que os extremos são citados é relevante: primeiro A , e depois B .) A *translação* determinada por AB é a transformação (correspondência biunívoca) $\tau : \pi \rightarrow \pi$, ou $\tau : E \rightarrow E$, definida por $\tau(X) = X'$, de modo que (AB, XX') e (AX, BX') sejam os pares de lados opostos de um paralelogramo.” (LIMA, 2001)

Atividades

a) **Dado um segmento \overline{AB} orientado e um outro segmento \overline{XY} , não paralelo com \overline{AB} . Encontre a translação de \overline{XY} determinada por \overline{AB} .**

Resolução:

- * segmento \overline{AX} .
- * reta r paralela a \overline{AX} por B .
- * reta s paralela a \overline{AB} por X .
- * $r \cap s = X'$.
- * segmento \overline{AY} .
- * reta u paralela a \overline{AY} por B .
- * reta v paralela a \overline{AB} por Y .
- * $u \cap v = Y'$
- * $\overline{X'Y'}$ é a translação de \overline{XY} segundo \overline{AB} .



b) Dado um sistema de eixos coordenados XOY e um ponto $P(x,y)$, no 1º quadrante, encontre a imagem de P pela função translação determinada por um segmento orientado de origem em O e extremidade em $A(u,v)$, um ponto do 1º quadrante, não alinhado com OP . Expresse essa função por uma equação analítica $f(x,y)$.

Resolução:

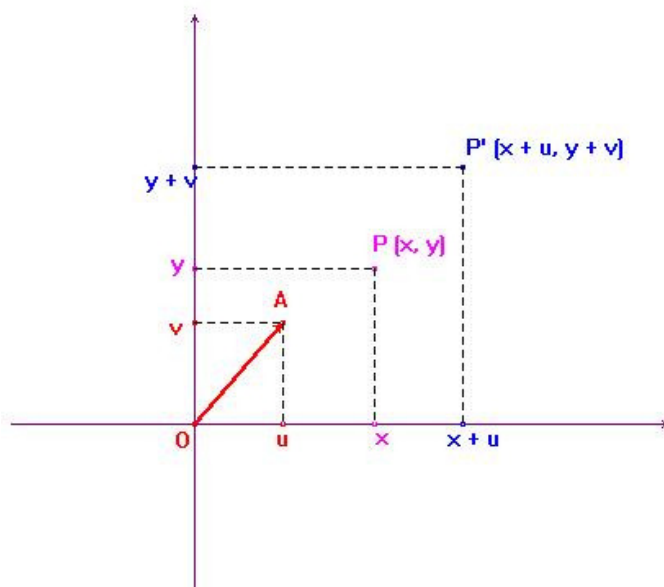
* Sejam os pontos $P(x, y)$, $O(0, 0)$ e $A(u, v)$

* A translação de \overline{XY} em relação a \overline{OA} é dada pela função:
 $f(x, y) = (x + u, y + v)$

* Aplicando a função no ponto P , temos:

$$f(P) = f(x, y) = (x + u, y + v) = P'$$

* O ponto P' é a translação de P segundo o segmento orientado \overline{OA} .



c) Considere o plano XOY como representante do plano complexo. Associe a cada ponto (x,y) o número complexo $z = x+iy$. Expresse a função translação determinada pelo número complexo $u+iv = (u,v)$ como uma equação complexa, $w=f(z)$, com z e w números complexos.

Translação determinada por $u+iv$: $f(z) = \dots\dots\dots$

Resolução:

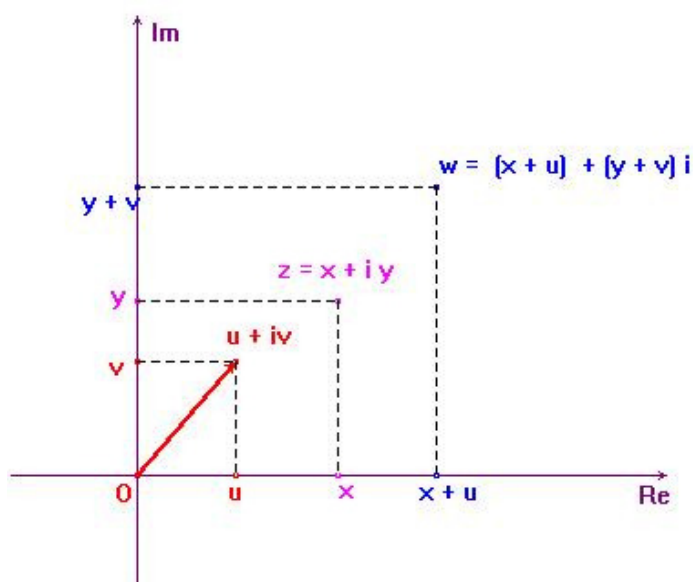
* A função complexa que define a translação de $z = x + iy$, determinada pelo número complexo $u + iv$ é:

$$f(z) = z + (u + iv)$$

* Aplicando a função em z , obtemos:

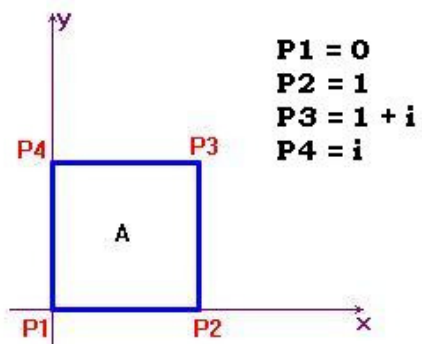
$$f(z) = f(x + iy) = (x + iy) + (u + iv) = (x + u) + (y + v) i = w$$

* O número complexo w é a translação de z segundo o número complexo $(u + iv)$.

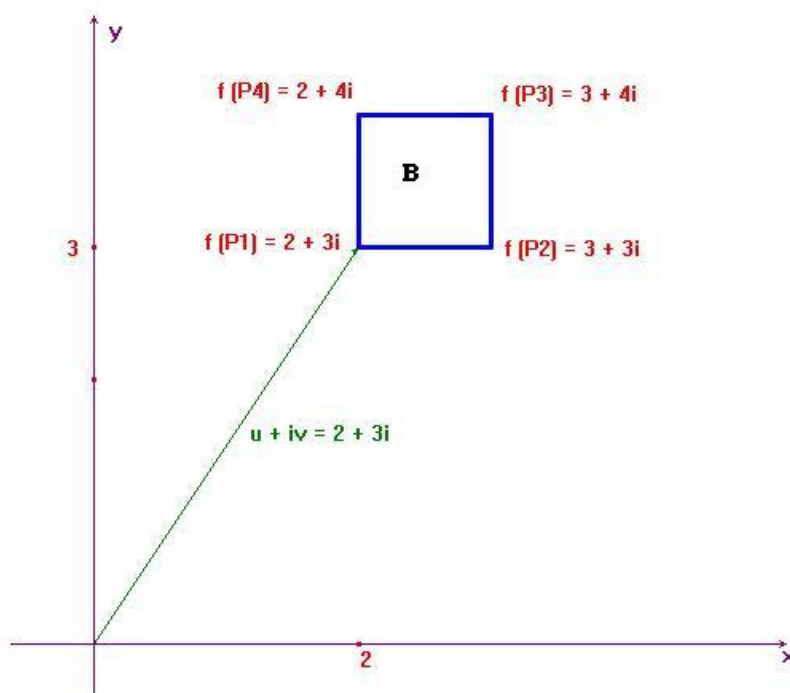


d) Encontre a região $B = f(A)$, imagem de A pela função definida acima, com $u + iv = 2 + 3i$. Certifique-se de que B resulta do movimento de translação de A , duas unidades na

direção do eixo XX e três unidades na direção do eixo YY, como determina o número $2 + 3i$.



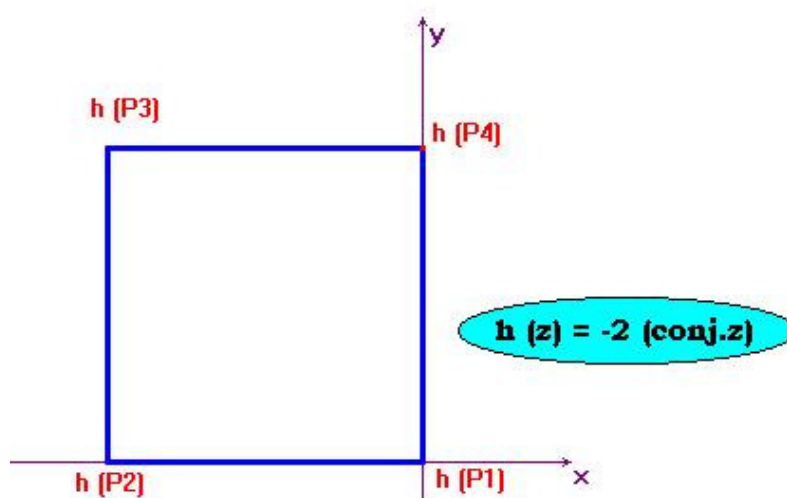
Resolução:

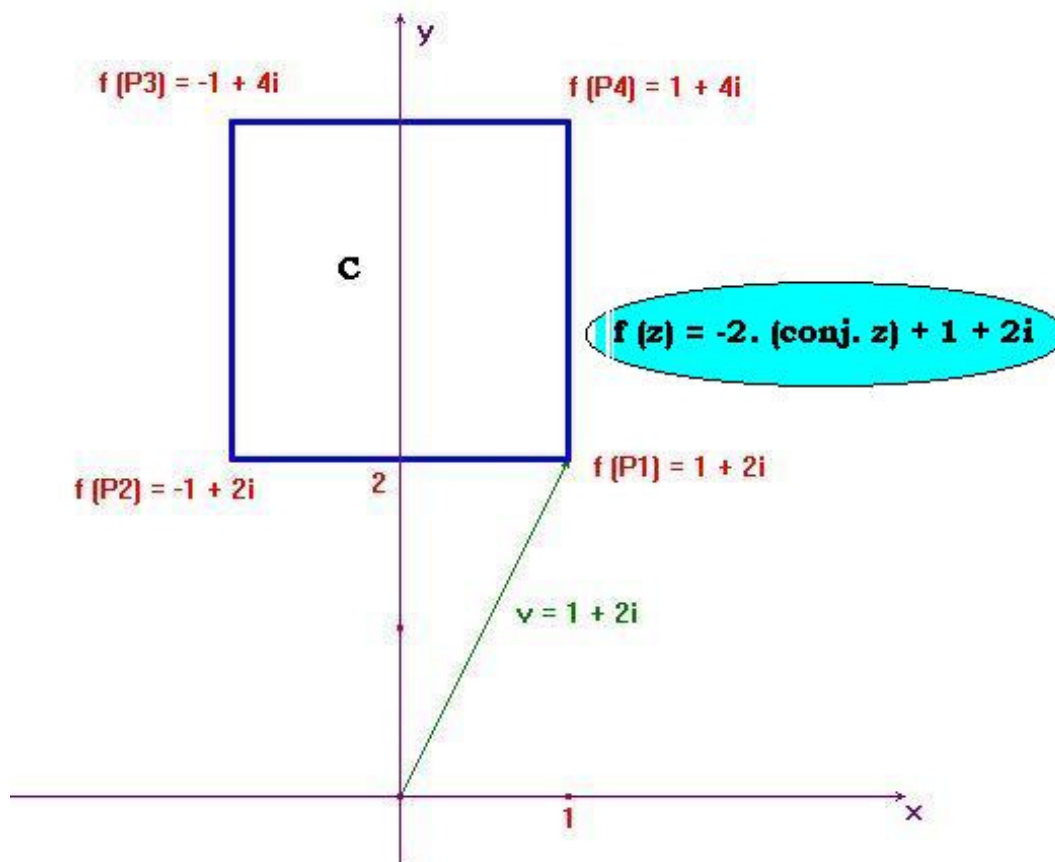


e) Encontre C, resultado da transformação de A pela função complexa $-2\bar{z} + 1 + 2i$.

$f(z) =$

Resolução:





05. Rotação:

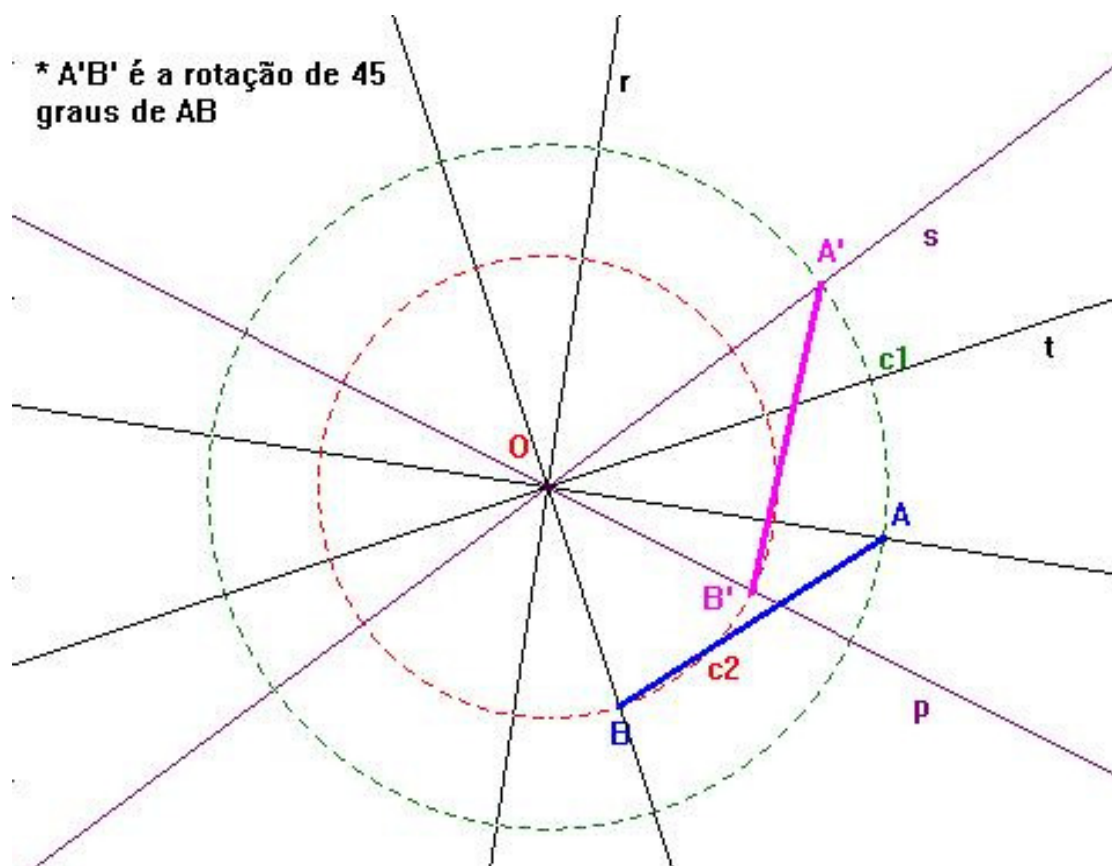
“Fixemos um ponto O no plano π agora orientado (como a tradição recomenda, o sentido positivo é o anti-horário). Dado um ângulo α , a *rotação de centro O e amplitude α* é a transformação que a cada ponto A do plano π associa o ponto $A' = R_\alpha(A)$ de forma que se tenha $AO' = AO$, $\widehat{AOA'} = \alpha$ e o sentido de A para A' (em torno de O), positivo.” (WAGNER, 1993)

Atividades

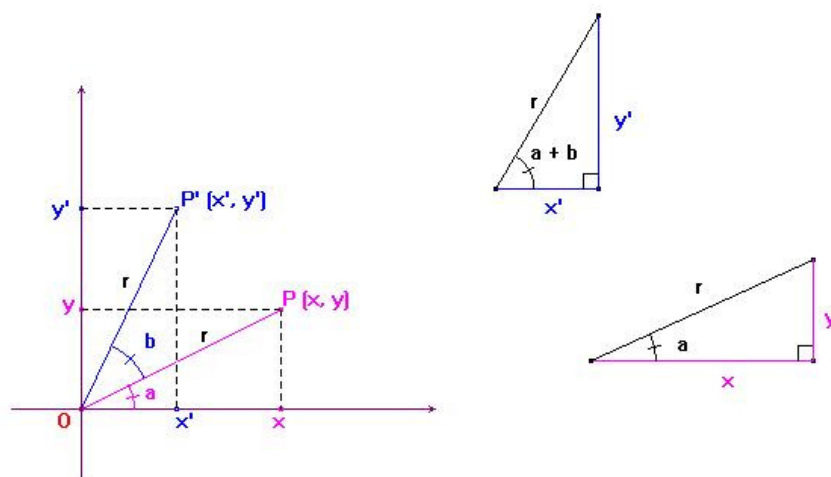
a) Dado um ponto O e um segmento \overline{AB} , de forma que O , A e B não sejam colineares, construa a rotação de \overline{AB} de centro O e amplitude 45° .

Resolução:

- * reta r perpendicular à reta \overline{OA} por O .
- * bissetriz s de \widehat{rOA} .
- * circunferência c_1 de centro O e raio OA .
- * $c_1 \cap s = A'$.
- * reta t perpendicular à reta \overline{OB} por O .
- * bissetriz p de \widehat{tOB} .
- * circunferência c_2 de centro O e raio OB .
- * $c_2 \cap p = B'$
- * O segmento $\overline{A'B'}$ é a rotação do segmento \overline{AB} .



b) Dado um sistema de eixos coordenados XOY e um ponto $P(x,y)$, no 1º quadrante, encontre a imagem de P pela função rotação de P com centro O e amplitude α , onde α é um ângulo qualquer. Neste caso, para facilitar a visualização, pode-se pensar em α como um ângulo agudo, com medida próxima a 45° . Expresse essa função por uma equação analítica $f(x,y)$.

Resolução:

* Queremos uma função $f(x, y) = (x', y')$. Do triângulo retângulo com ângulo $\theta + \alpha$, obtemos:

$$\sin(\theta + \alpha) = y'/r \Rightarrow y' = r \cdot \sin(\theta + \alpha) = r \cdot (\sin \theta \cdot \cos \alpha + \cos \theta \cdot \sin \alpha)$$

$$\cos(\theta + \alpha) = x'/r \Rightarrow x' = r \cdot \cos(\theta + \alpha) = r \cdot (\cos \theta \cdot \cos \alpha - \sin \theta \cdot \sin \alpha)$$

* Do segundo triângulo, obtemos as seguintes relações:

$$\cos \theta = x/r \quad \text{e} \quad \sin \theta = y/r$$

Substituindo-as nas expressões de x' e y' , obtemos que:

$$y' = r \cdot ((y/r) \cdot \cos \alpha + (x/r) \cdot \sin \alpha) = (y \cos \alpha + x \sin \alpha)$$

$$x' = r \cdot ((x/r) \cdot \cos \alpha - (y/r) \cdot \sin \alpha) = (x \cos \alpha - y \sin \alpha)$$

* Portanto: $f(x, y) = f(x', y') = (x \cos \alpha - y \sin \alpha, y \cos \alpha + x \sin \alpha)$

c) Considere o plano XOY como representante do plano complexo. Associe a cada ponto (x,y) o número complexo $z = x+iy$.

Este número pode ser expresso em coordenadas polares, R e θ

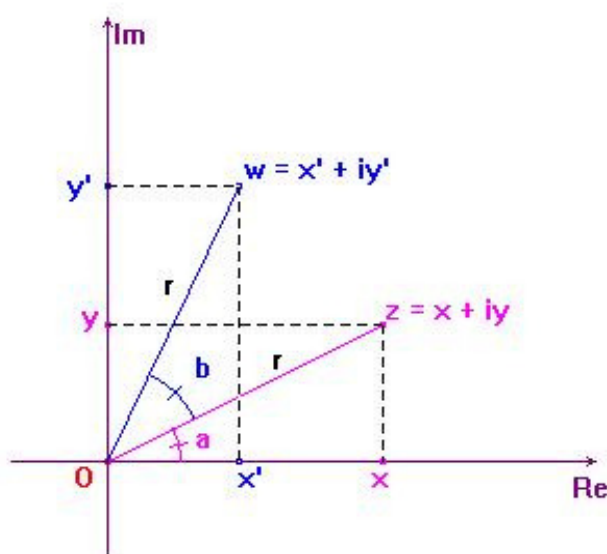
R: representa o módulo do número $x+iy$, que é a medida do segmento OP.

θ : representa o argumento do número $x+iy$, que é a medida do ângulo que o raio vetor OP forma com o eixo dos XX positivo.

$$z=x+iy = R. (\cos \theta + i \sen \theta)$$

Expresse a função rotação de z , em torno de O, com amplitude α , como uma equação complexa, $w=f(z)$, com z e w números complexos.

Resolução:



* Do item anterior, já sabemos que:

$$f(x, y) = (x', y') = (x \cos \alpha - y \sin \alpha, y \cos \alpha + x \sin \alpha).$$

* Comparando a definição de multiplicação de dois números complexos:

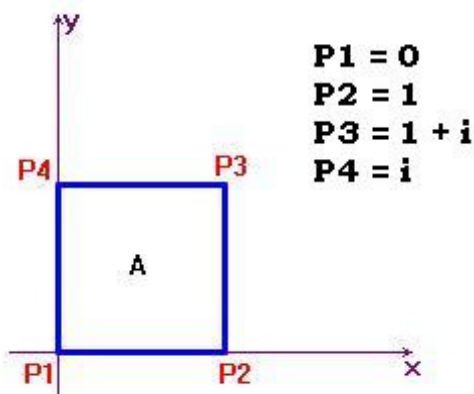
$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc) i$ com a expressão que temos a função, concluímos que:

$$a = x, b = y, c = \cos \alpha \text{ e } d = \sin \alpha.$$

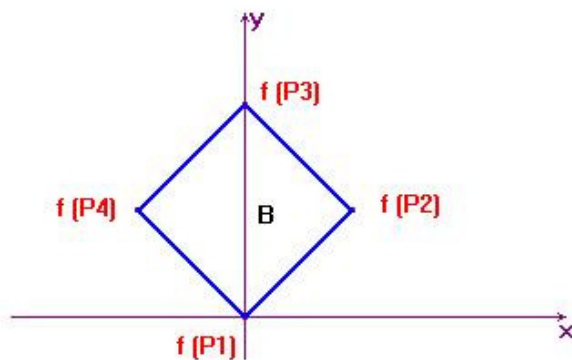
* Então podemos escrever:

$f(z) = (x + iy) \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) = k \cdot z$, onde $k, z \in \mathbb{C}$ e $|k| = 1$, para manter a norma de z constante.

d) Encontre a região $B = f(A)$, imagem de A pela função acima, com $\alpha = 45^\circ$. Certifique-se de que B resulta do movimento de rotação de A , em torno de O , num giro de 45° em sentido anti-horário, ou seja, B é a transformação de A por efeito da rotação.



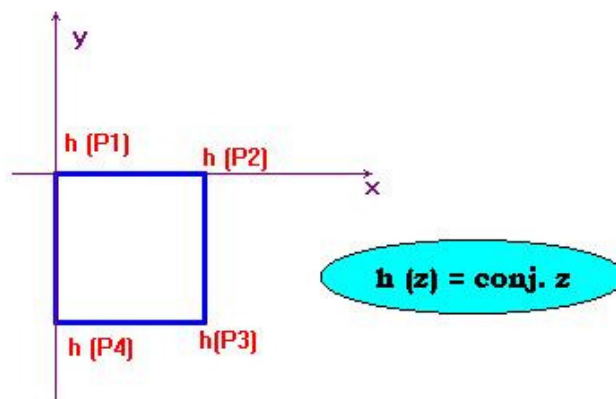
Resolução:

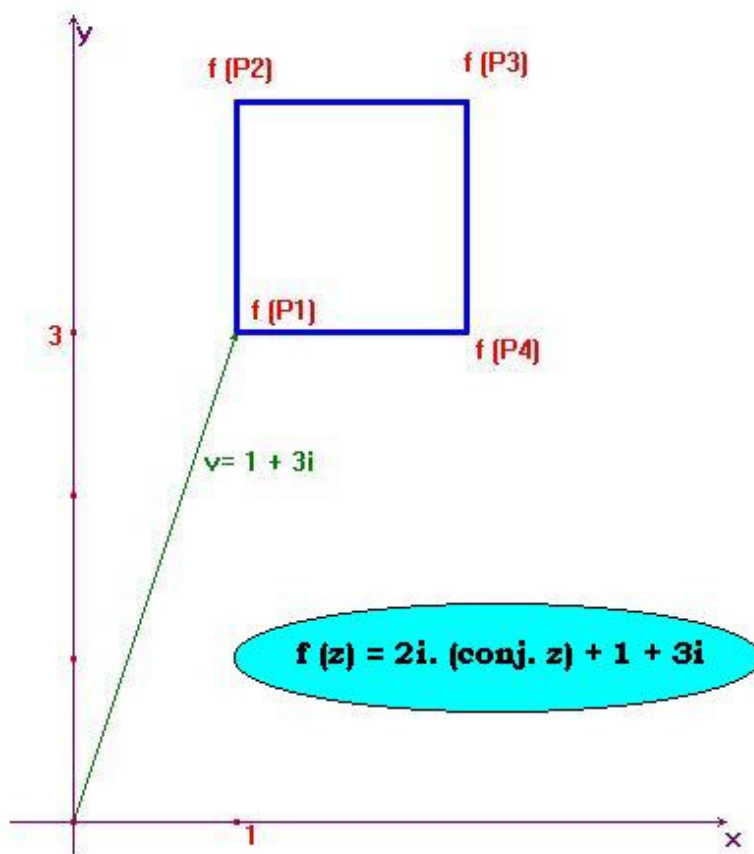
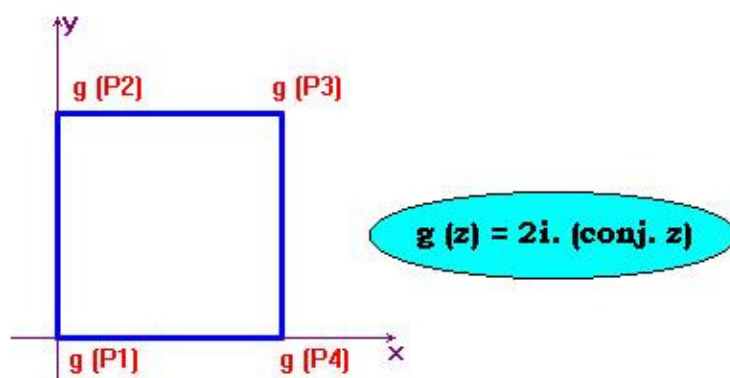


e) Encontre C , resultado da transformação de A pela função complexa

$$f(z) = 2i \cdot \bar{z} + 1 + 3i.$$

Resolução:





9. Bibliografia recomendada

ARTIGUE, Michèle. The teaching and Learning of Mathematics at the University Level. **Notices of the AMS**, dezembro 1999, pag. 1377-1385.

CHURCHILL, Ruel. **Variáveis Complexas e suas aplicações**. S.Paulo: Universidade de São Paulo, McGraw Hill do Brasil, 1975.

EVES, Howard. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Geometria**. S.Paulo: Atual, 1992, v.3, 77p.

LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria. Comprimento, Área, Volume e Semelhança**. Rio de Janeiro: SBM, 2001. 237 p.

Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto Cezar. **A Matemática do Ensino Médio**. Col. Do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: SOLGRAF, 2001, 237 p.

MAOR, Eli. **e: A História de um Número**. Editora Record. RJ. 2003.

WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: Gráfica Wagner, 1993. p. 110.

10. Anexos

Definindo a função exponencial complexa: $f(z) = e^z$

Sabe-se que a função exponencial real $f(x) = e^x$ tem uma certa expansão polinomial obtida pelo Teorema de Taylor:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

substituindo (x) por (ix) temos:

$$e^{ix} = 1 + \frac{(ix)}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots$$

calculando e substituindo as potências de i:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

juntando separadamente os reais do imaginários:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right)$$

Encontramos séries de potência das funções $\cos x$ e $\sin x$, também obtidas pelo Teorema de Taylor:

Temos, então:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Analogamente

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$\text{Mas } e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

$$\text{Logo } e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Conseqüência: $e^{\pi i} = -1$, logo $\ln(-1) = \pi i$.

Logaritmos de negativos existem, no universo dos complexos

