F e r n a n d o   R a u l   N e t o

Duas ou três coisas sobre o "menos vezes menos dá mais"

Abril de 1995 Publicação Nº 2

Trabalho apresentado na *Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática* promovido pelo Mestrado em Psicologia da Ufpe, realizado entre os dias 27 e 31 de março de 1995 em Recife, Pe.

DUAS OU TRÊS COISAS SÔBRE O "MENOS VEZES MENOS DÁ MAIS"

Fernando Raul Neto
UFRPE

<u>INTRODUÇÃO</u>

Dois importantes problemas didáticos da Matemática da 6ª série são a introdução do conceito de número negativo e a compreensão das *regras dos sinais* na multiplicação. O desafio começa quando os professores têm de convencer aos seus alunos que, por exemplo, 7 - 12 = - 5. Até então seus alunos vinham perdendo bolas de gude no jogo, gastando dinheiro ou emprestando coisas e com isso sabiam muito bem que a - b é uma conta muito simples. Desde que a > b. A dificuldade agora é que a < b e toda aquela experiência anterior parece prejudicar o novo aprendizado. Os professores seguem então, normalmente, as estratégias dos livros didáticos: débito x crédito, temperaturas abaixo e acima de zero, esquerda x direita na reta numérica, etc. A intenção dessas aplicações é mostrar aos alunos que o "-" da conta de subtração não significa *apenas* retirar alguma coisa concreta de algo concreto. Isso tem de ser feito porque sem ampliar o conceito de subtração não é possível compreender que de 7 se pode tirar 12. Feito isso os professores passam para as expressões numéricas mais simples envolvendo a adição e a subtração e chegam então às famosas regras dos sinais na multiplicação.

Uma leitura dos livros-texto de Matemática e dos programas oficiais das Secretarias de Educação mostra, presumidamente, que as crianças ao final da 5ª série:

1) conhecem os inteiros positivos;
2) aprenderam os algoritmos das quatro operações **+, -, x** e ÷;
3) associaram o **+** a idéia de juntar, o **-** à idéia de subtrair, o **x** à idéia de adição repetida e o □ à idéia de divisão;
4) entenderam que as operações de **+** e de **-**, bem como as de **x** e de ÷, são inversas uma da outra.

Sem entrar nos detalhes das estratégias didáticas utilizadas para os quatro aprendizados acima, observamos que, de um modo geral, elas intencionam, por um lado, fornecer aos alunos a habilidade formal na escrita e na leitura matemáticas e, por outro, o domínio progressivo de significados extra-matemáticos e intra-matemáticos para os objetos e as operações trabalhadas. Exemplificando, para uma conta como 17 - 8 objetiva-se que o aluno saiba o resultado correto e, ao mesmo tempo, o que significa esse resultado em um campo de aplicações ou de metáforas qualquer.

Olhando para a História da Matemática vemos que esse conteúdo trabalhado até a 5ª série não foi problemático para os matemáticos. Historicamente problemáticos foram sim o conceito de número negativo e as regras de sinais na multiplicação. São, hoje em dia, os desafios para o professor de Matemática da 6ª série.

O CONCEITO DE NEGATIVO

Pelo menos uma das dificuldades que os alunos encontram no aprendizado do conceito de número negativo guarda um paralelo muito forte com uma dificuldade encontrada pelos matemáticos no desenvolvimento histórico do conceito. Trata-se da dificuldade de entender o negativo no quadro de uma concepção *substancial* de número. Por essa concepção, que predominou até certo período do século XIX, o número era entendido como "coisa", como grandeza, como objeto dotado de substância. É claro que dentro dessa concepção fica difícil entender o número negativo. Um fato corriqueiro da Matemática, o que afirma que "um número negativo é menor que zero", torna-se problemático. Isso porque se número é quantidade, a identificação do número zero com ausência de quantidade ou com a expressão *nada* é natural. E como conceber algo menor que nada?

Os textos de Matemática do final do século XVIII até a primeira metade do século XIX são pródigos em questionar ou tentar elucidar o significado de "uma quantidade negativa isolada". O matemático francês Lazare Carnot (1753 - 1823) perguntava explicitamente:

> "Para obter realmente uma quantidade negativa isolada é preciso retirar uma quantidade efetiva de zero, tirar qualquer coisa de nada: operação impossível. Como conceber então uma quantidade negativa isolada?" ([2], p. iii)

Gauss, em 1831, no seu famoso artigo onde ele apresenta uma interpretação geométrica para os números complexos, alertava para a impossibilidade de um entendimento correto do conceito de negativo quando prevalece uma concepção substancial de número. Para ele os

> "números positivos e negativos só podem encontrar uma aplicação quando o que se conta possui um oposto, quando o que se conta se pode comparar com a idéia de aniquilação. Olhando precisamente só se encontra esta condição quando os objetos que se contam não são substâncias (objetos pensáveis em si próprios) mas relações entre cada dois objetos" ([6], p. 175).

O grande passo histórico dado no século XIX foi perceber que os conceitos matemáticos não representam mais *coisas*, mas *relações entre coisas*; foi perceber que a "Matemática é, no sentido mais geral possível, a ciência das relações na qual se abstrai de todos os conteúdos das relações". ([5], p. 397) Essa mudança no auto-entendimento da Matemática, que Ernst Cassirer caracterizou como a "passagem do pensamento substancial para o pensamento funcional" (Cf. [9], p.218), se entrelaça com o desenvolvimento histórico do conceito de número; as duas coisas são interdependentes, a história de uma é a história da outra (evidente que também com a história de outros conceitos matemáticos).

O pensamento substancial foi um obstáculo que os matemáticos precisaram ultrapassar para que o conceito de número, em particular o de número negativo, pudesse ser corretamente apreendido. Com as crianças ocorre o mesmo e a Didática precisa montar estratégias para ajudá-las a superar a dificuldade. Isso poderia ser feito desde os primeiros anos da educação da criança, evitando-se a identificação irrestrita entre os objetos matemáticos e as suas representações empíricas. Os objetos matemáticos são objetos teóricos, abstratos e, ao mesmo tempo, capazes de revelar as relações mais diversas do mundo empírico. Dito de outro modo é preciso que se mantenha a interdependência entre a *Matemática* e a *aplicação da Matemática*. Não se deve nem identificá-las nem separá-las radicalmente. Exemplificando, a identificação entre *conceito matemático de subtração* e a aplicação *retirar a quantidade b de uma quantidade maior a* privaria de desenvolvimento os dois lados. Não seria possível aplicar o conceito ao caso a - b, quando b > a. Por outro lado, as duas coisas não são completamente independentes. Novas aplicações sugerem ampliações da teoria e, reciprocamente, modificações teóricas, sugeridas pela própria dinâmica interna da teoria, abrem o campo para novas aplicações.

Portanto é importante que o número seja entendido enquanto relação, para além de uma simples resposta às questões *quantos são?* e *quanto mede?* Acostumar a criança a *pensar em relações*, ajudá-la a superar o obstáculo do pensamento substancial e ensiná-la a trabalhar corretamente a relação entre *Matemática* e *aplicação da Matemática* são diretrizes básicas para o professor de Matemática.

AS REGRAS DOS SINAIS

A História da Matemática nos conta que os matemáticos tiveram grandes problemas com as regras dos sinais. Se nós contarmos o período de tempo que vai de Diofanto (III Sec. DC), um dos primeiros matemáticos a estabelecer essas regras, até 1867 quando Hermann Hankel organizou estruturalmente a Álgebra e a Aritmética elementares, vemos que os matemáticos necessitaram de mais de 1500 anos para se porem de acordo sobre o negativo e as regras dos sinais.

Os problemas em torno das regras dos sinais que preocuparam os matemáticos também estão presentes na Didática da Matemática. O primeiro deles é que quando utilizamos no cálculo aritmético/algébrico usual as regras de sinais envolvendo a multiplicação estamos de fato na presença de dois *tipos* de sinais conceitualmente bem distintos. São os *sinais de números* e os *sinais de operação*. É o que acontece quando escrevemos que a expressão (8 - 5) x (9 - 7) é igual a 8 x 9 - 8 x 7 - 5 x 9 + 5 x 7. É claro que no cálculo não precisamos nos preocupar com os diferentes sinais envolvidos. É fácil mostrar que as expressões aritméticas podem ser reescritas como soma de parcelas que envolvem apenas multiplicações dos números relativos. Mas os dois conceitos precisam ser trabalhados distintamente até entendermos que eles podem ser confundidos no cálculo.

Novamente aqui a História, mesmo desenhada em longos traços, pode ter utilidade para a Didática. Um exemplo da "Aritmética" (1634) de Simon Stevin (1548-1620) nos mostra em qual contexto os matemáticos começaram a perceber que *menos vezes dá mais*. Stevin se propunha apresentar uma prova para as regras dos sinais, as quais ele enunciava da seguinte forma: (Citações de Stevin tiradas de [7], p. 312)

> "Mais multiplicado por mais dá produto mais, & menos multiplicado por menos dá produto mais; & mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos."

De início Stevin toma um exemplo particular e explica o uso das regras:

> "Explicação do dado: Suponhamos 8 - 5 multiplicado por 9 - 7 da seguinte maneira: -7 vezes -5 são +35 (+35, porque, como diz o teorema, - vezes - dá +). A seguir -7 vezes 8 faz -56 (-56, porque, como é dito no teorema, - por + dá -). E semelhantemente seja 8 - 5 multiplicado por 9, & darão produtos 72 - 45; depois adicione +72 + 35, são 107. Depois adicione os -56 -45, são 101; e subtraindo o 101 de 107 resta 6, para o produto de tal multiplicação."

Observemos que o trecho acima é apenas um exercício de aplicação da regra em um caso particular. Não nos diz como a regra surgiu nem apresenta uma prova para elas. Uma prova ele tenta logo a seguir:

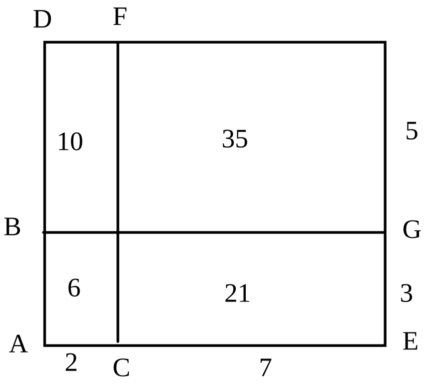
$$\begin{array}{r} 8 - 5 \\ 9 - 7 \\ \hline -56 + 35 \\ 72 - 45 \quad\quad \\ \hline 6 \end{array}$$

"Explicação do exigido. É preciso demonstrar pelo dado, que + multiplicado por + dá +, & que - por - dá +, & que + por -, ou - por + dá -. Demonstração. O número a multiplicar 8 - 5 vale 3, & o multiplicador 9 - 7 vale 2. Mas multiplicando 2 por 3, o produto é 6.

Logo o produto acima também 6, é o produto verdadeiro. Mas o valor é encontrado pela multiplicação, onde dissemos que + multiplicado por + dá produto + & - por - dá produto +, & + por -, ou - por + dá produto -, logo o teorema é verdadeiro."

Essa citação de Stevin é bem instrutiva. De passagem ela já mostra o quanto o conceito de prova matemática depende da época histórica. Hoje, com certeza, qualquer aluno do 2º grau não aceitaria os argumentos de Stevin, meramente uma verificação do teorema em um caso particular, como uma prova matemática. Mas para a nossa exposição vale observar que em Stevin não aparecem números *positivos* e *negativos*. Os sinais "+" e "-" são "sinais de operação". Número negativo isolado não tem sentido algum para Stevin. O -56 do algorítimo acima é exclusivamente um resultado intermediário.

Stevin conclui com outra demonstração, geométrica agora, para o teorema. Na realidade a Geometria aparece apenas como auxílio epistemológico para a distributividade e, novamente, para confirmar as regras dos sinais.



Outra demonstração geométrica

"Suponhamos AB 8 - 5 (a saber AD8 - DB5). Depois AC9 - 7 (a saber AE9 - EC7) seu produto será CB: ou seja, segundo a multiplicação precedente ED72 - EF56 -DG45 + GF35, os quais demonstraremos serem iguais a CB desta maneira. De todo ED + GF, subtraindo EF, & DG, resta CB. *Conclusão*. Logo mais multiplicado por mais, dá produto mais, & menos multiplicado por menos, dá produto mais, & mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos; o que queríamos demonstrar."

Esse exemplo de Stevin mostra que até um certo momento não havia complicadores maiores com as regras dos sinais. Além de se saber que ela *funciona* aritmeticamente na distributividade, havia o apoio oferecido pelo recurso à Geometria.

As dificuldades começam de fato em um outro momento da História, quando os negativos isolados já tinham livre trânsito na Matemática. A partir da metade do século XVII, a partir do rápido desenvolvimento da Álgebra, da Teoria das Equações em particular, e do Cálculo, os matemáticos perceberam que se podia calcular com os números relativos usando a regra usual de sinais. Mas dificuldades teóricas vão gradativamente surgindo. Além das dificuldades de natureza ontológico-epistemológica inerentes ao próprio conceito de número negativo, os matemáticos não conseguiam uma prova para as regras dos sinais que obtivesse uma aceitação universal. Eles procuravam mesmo diferenciar *sinal de número* de *sinal de operação* através, por exemplo, das expressões *negativo/subtrativo* e *positivo/aditivo* (Cf. [10]) ou pelo uso de símbolos diferentes como $7 - \overset{+}{3}$ ou $7 + \overset{-}{3}$. (Cf. [4])

Mas o passo que os matemáticos demoraram a dar foi o reconhecimento da impossibilidade de deduzir o negativo do positivo; da impossibilidade de o negativo surgir dentro do conceito restrito da operação de subtração. Era preciso ampliar os conceitos de número e de operação. "A ampliação do conceito de número pela introdução dos números negativos foi uma conseqüência da necessidade de generalizar a subtração. Tal generalização foi, no desenvolvimento da Álgebra, logo cedo reconhecida como de grande comodidade. Levados pela necessidade a introduzir os números negativos os matemáticos jamais conseguiram livrar a sua teoria dos incômodos paradoxos. Na segunda metade do século as explicações gerais acerca dos números negativos e das suas regras operacionais foram gradativamente reconhecidas como insuficientes, sem que, no entanto, se tenha conseguido no século XVIII um desenvolvimento rigoroso dos pressupostos lógicos" ([1] p. 79) [...]

Tentava-se o impossível, a saber, deduzir os números negativos dos positivos, sem expressamente ampliar a operação de subtração ou iluminar o conceito de "menor que nada". Tal ampliação ou iluminação exigiria a generalização do conceito de número." ([1], p. 87)

A SOLUÇÃO ESTRUTURADA

Em 1830 o matemático inglês George Peacock (1791-1858) publicava seu "Treatise of Algebra" (ampliado em dois volumes em 1842 e 1847) e estabelecia uma diferença entre *Álgebra aritmética* e *Álgebra simbólica* pela qual ele procurava, particularmente, solucionar a questão da subtração a - b quando a < b. Para Peacock na Álgebra aritmética "os sinais + e - denotam as operações de adição e subtração apenas em seus significados ordinários, e elas são consideradas impossíveis em todos os casos onde os símbolos submetidos a elas possuem valores que tornam as operações impossíveis quando eles são substituídos por números digitais." ([12], p. iv) A Álgebra simbólica, ao contrário, "adota as regras da Álgebra aritmética, mas remove todas as suas restrições: assim a subtração simbólica difere da mesma operação na Álgebra aritmética pela permissão do uso de todas as relações de valor dos símbolos ou expressões utilizadas." ([12], p. vi)

A importância histórica dessa divisão da Álgebra é que não se tenta mais justificar empíricamente as *operações impossíveis*. Peacock justifica a transição de uma Álgebra para a outra pela formulação de um *princípio da permanência de formas equivalentes* que é simplesmente a expressão em leis gerais dos resultados da Álgebra aritmética. Por exemplo, a comutatividade a + b que se conhece na Aritmética dos números positivos é formulada para todos os valores de a e de b. "É a adoção das regras das operações da Álgebra aritmética como as regras para realizar as operações que *possuem o mesmo nome* na Álgebra simbólica que garante a identidade absoluta dos resultados das duas ciências quando esses resultados existem." ([12], p. vi)

Mas foi o matemático alemão Hermann Hankel (1839-1873) em seu livro "Theorie der komplexen Zahlensysteme" (1867) que de forma mais clara e explícita percebeu a necessidade de ampliação do conceito de número. Hankel, da mesma forma que Peacock, estabeleceu um *Princípio da permanência das leis formais*: "Quando duas formas da arithmetica universalis expressas em símbolos gerais são iguais entre si, elas devem permanecer iguais entre si mesmo quando os símbolos deixam de designar simplesmente grandezas, e dessa forma também as operações podem obter qualquer outro conteúdo." ([8], p. 11)

No que se refere a introdução do negativo Hankel opera formalmente. Em uma igualdade a + b = c, explica Hankel, a soma c é obtida de a e de b. Ele pergunta então o valor que x deve possuir para que x + b = c. Segundo ele só deve existir um valor para x, o qual ele designa por x = c - b. É evidente que se b > c não existe número na seqüência 1,2,3.... que satisfaz a igualdade. "Nada nos impede, porém, de ver a diferença (c - b) como um símbolo que satisfaz a igualdade e que deve ser operado da mesma forma como se fôsse um número da seqüência 1,2,3....." ([8], p. 5)

Em sua essência o que Hankel fez é o que se encontra hoje nos textos de Álgebra da universidade: organizar formalmente a Álgebra elementar através de axiomas. As quatro operações elementares realizadas no conjunto ← dos números reais e todas as suas propriedades operatórias, incluindo a regra dos sinais, bem como a introdução do negativo, são ou explícitamente enunciadas nos axiomas ou fácilmente deduzíveis deles. Esses axiomas podem, hoje, ser enunciados da forma abaixo:

No conjunto ← dos números reais existe duas operações + (adição) e · (multiplicação) que satisfazem as seguintes propriedades:

A1: Para todo x, y □ ← vale x + y = y + x

A2: Para todo x, y, z □ ← vale x + (y + z) = (x + y) + z

A3: Existe um elemento em ← que é neutro na adição, isto é, chamando esse elemento de 0 vale x + 0 = x, para todo x □ ←

A4: Para cada elemento x □ ← existe um elemento, representado por - x, tal que x + (-x) = 0

M1: Para todo x, y □ ← vale x · y = y · x

M2: Para todo x, y, z □ ← vale x · (y · z) = (x · y) · z

M3: Existe um elemento em ← que é neutro na multiplicação, isto é, chamando esse elemento de 1 vale x · 1 = x, para todo x □ ←

M4: Para cada elemento x □ ←, x □ 0, existe um elemento, representado por x^{-1}, tal que x · x^{-1} = 1

D: Para todo x, y, z □ ← vale x · (y + z) = x · y + x · z

Observemos que essa estruturação sintetiza toda essa história envolvendo os números relativos e as suas regras operacionais. Esse *final de história* nos ensina duas lições que são de extrema importância para a Didática da Matemática. Primeiro nos mostra que a *limpeza*, a *clareza* e a *estética* das exposições matemáticas dos textos de hoje em dia - e que são perseguidas nas aulas pela grande maioria dos professores - ocultam, evitam ou dissimulam um grande número de idéias matemáticas que são de extrema importância para o aprendiz de matemática. Segundo, expõe de forma bem nítida o alcance e os limites do método axiomático. De fato, a escolha das proposições primitivas da fundamentação axiomática da Aritmética dos números reais acima não é feita de forma arbitrária como pode aparecer em uma primeira vista. Ela é, como foi dito, a síntese da História. Os axiomas registram de forma depurada o resultado de milênio e meio de dúvidas, incertezas, erros, hesitações, tentativas, etc. Isto vale em geral; quando se deseja organizar uma ciência através do método axiomático se parte da herança histórica dessa ciência para, através da análise lógica de seus conceitos, métodos, provas e, principalmente, das dificuldades históricas enfrentadas pelos cientistas, determinar os princípios - axiomas - necessários para sua fundamentação e daí deduzir a ciência.

Observemos nos axiomas acima a simetria quase perfeita entre os axiomas para a adição e os axiomas para a multiplicação. De início eles estabelecem a comutatividade e a associatividade para cada uma das duas operações. O axioma A3 postula a existência do 0 como elemento neutro. O mesmo faz M3, com relação ao número 1 na multiplicação. O axioma A4 é de especial importância para a questão do negativo. Reconhece-se a impossibilidade de deduzir o negativo. O axioma simplesmente postula o negativo definindo-o, implícitamente, pela condição $x + (-x) = 0$. M4 é o correspondente de A4 na multiplicação. Observemos que o 0 não tem inverso multiplicativo, isto é, não existe divisão por zero. O axioma D é a distributividade da operação de $\cdot$ pela operação de $+$. Ele é necessário porque até então as duas operações estavam completamente independentes uma da outra. Por fim observemos que só existe duas operações e que não há mais necessidade de falar em *sinal de operação* e *sinal de número*. A subtração a - b, entre dois elementos quaisquer de $\leftarrow$, é definida como a adição a + (-b) de a pelo inverso aditivo de b. Do mesmo modo, a divisão a/b, b □ 0, é definida por $a \cdot b^{-1}$.

Todas as questões que surgem na Aritmética elementar podem ser deduzidas ou explicadas a partir dos nove axiomas. Mostremos como exemplo a problemática prova de que menos vezes menos dá mais. (Cf. [9], pp. 89 ff)

Teorema 1: O elemento neutro da adição, o número 0, é único.

Prova:

Suponha que exista em $\mathfrak{R}$ dois elementos neutros para a adição, 0 e 0*. Adicionando-os obtemos:

$0 + 0^* = 0$ (porque 0* é elemento neutro) $= 0^*$ (porque 0 é elemento neutro). Obtemos assim que $0^* = 0$.

Teorema 2: O elemento simétrico de um elemento $x \in \mathfrak{R}$ é único.

Prova:

Sejam -x e (-x)* dois elementos de $\mathfrak{R}$ tais que $x + (-x) = 0$ e $x + (-x)^* = 0$.

Temos, então, $(-x)^* = (-x)^* + 0 = (-x)^* + [x + (-x)] = [(-x)^* + x] + (-x) = 0 + (-x) = -x$, como desejávamos.

Teorema 3: Se $x + x = x$ em $\mathfrak{R}$ então x é o elemento neutro de $\mathfrak{R}$, isto é, $x = 0$.

Prova:

Pelo Axioma A4 existe o elemento -x em $\mathfrak{R}$. Somando - x aos dois membros da igualdade dada obtemos:

$-x + (x + x) = -x + x$

$(-x + x) + x = 0$ Axiomas A2 e A3

$0 + x = 0$ Axioma A2

$x = 0$ Axioma A3

Teorema 4: "Zero vezes qualquer número dá zero", isto é, que $0 \cdot x = 0$, para todo $x \in \mathfrak{R}$.

Prova:

Partimos do primeiro membro da igualdade e aplica-se o axioma A3.

$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x$

Usando-se a distributividade, axioma D, obtemos:

$0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$

Tendo já sido demonstrado que o elemento neutro 0 é o único elemento x em $\leftarrow$ que satisfaz a propriedade x + x = x, conclui-se da igualdade anterior que $0 \cdot x = 0$.

Teorema 5: O simétrico do simétrico de x é x, isto é, -(-x) = x.

Prova:

Dado $x \in \Re$ temos x + (-x) = 0. Pela comutatividade temos (-x) + x = 0, isto é, x é o elemento simétrico de -x (único pelo Teorema 2). Logo -(-x) = x.

Teorema 6: a) "Menos vezes mais dá menos", isto é, $(-x) \cdot y = - x \cdot y$. e b) "Mais vezes menos dá menos“, isto é, $x \cdot (-y) = - x \cdot y$.

Prova:

a) $x \cdot y + (-x) \cdot y = [x + (-x)] \cdot y = 0 \cdot y = 0$. O que mostra que $- x \cdot y = (-x) \cdot y$ (Pelo axioma A4).

Analogamente mostra-se que $- x \cdot y = x \cdot (-y)$

Teorema 7: "Menos vezes menos dá mais“, isto é, $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Prova:

$(-x) \cdot (-y) = - [x \cdot (-y)] = - (-x \cdot y) = x \cdot y$

BIBLIOGRAFIA

[01] Cantor, Moritz (Ed.): Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. New York, Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1908.

[02] Carnot, Lazare: Géométrie de position. Paris: Duprat, 1803.

[03] Euler, Leonhard: Vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra. Erster Teil. Berlin: 1796.

[04] Förstemann, Wilhelm August: Über den Gegensatz Positiver und Negativer Größen. Ed. 1981. Wiesbaden: LTR-Verlag, 1817.

[05] Gauss, Carl Friedrich: "Fragen zur Metaphysik der Mathematik" *in* Werke X/1, 396-397, 1809.

[06] Gauss, Carl Friedrich: "Theoria residorum biquadraticorum, commentatio secunda" *in* "Göttingische gelehrte Anzeigen", 1831. Gauss, Werke 2.

[07] Glaeser, Georges: "Epistemologie des Nombres Relatifs." Recherches en Didactique des Mathématiques 2.3, 1981, pp. 303-346.

[08] Hankel, Hermann: Théorie der complexen Zahlensysteme. Leipzig: Leopold Voss, 1867.

[09] Jahnke, Hans Niels: "Zahlen und Größen - Historische und Didaktische Bemerkungen." Mathematische Semesterberichte XXVIII: 202-229, 1981.

[10] Klügel, G. S.: “Über die Lehre von den entgegengesetzten Größen.” Archiv der Reinen und Angewandte Mathematik I(III, V): 308-319/470-481, 1795.

[11] Nachbin, Leopoldo: Introdução à Álgebra. São Paulo: Editora McGraw-Hill do Brasil, 1974.

[12] Peacock, George: A Treatise on Algebra, Vol. I, Arythmetical Algebra. Reprint 1940, New York: Scripta Mathematica, 1842.

[13] Peacock, George: A Treatise on Algebra, Vol. II, On Symbolical Algebra, and its Applications to the Geometry of Position. Reprint 1940, New York: Scripta Mathematica, 1845.