

OLGA CORBO

**SEÇÃO ÁUREA: UM CONTEXTO PARA DESENVOLVER A NOÇÃO
DE INCOMENSURABILIDADE DE SEGMENTOS DE RETA**

Mestrado em Educação Matemática

**PUC/SP
São Paulo
2005**

OLGA CORBO

**SEÇÃO ÁUREA: UM CONTEXTO PARA DESENVOLVER A NOÇÃO
DE INCOMENSURABILIDADE DE SEGMENTOS DE RETA**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
como exigência parcial para obtenção do título de
MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a
orientação do Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.*

PUC/SP
São Paulo
2005

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

Dedico a:

Mingo

Téia

Ruda

Miriam

e

Ruy

AGRADECIMENTOS

Quero expressar a minha gratidão a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

Primeiro ao *Professor Doutor Saddo Ag Almouloud*, pela orientação, pelo respeito e pela confiança que depositou em mim.

Às *Professoras Doutoradas Sônia Barbosa Camargo Iglioni e Abigail Fregni Lins*, que gentilmente aceitaram participar da Banca Examinadora, cujas críticas, sugestões e recomendações foram muito apreciadas.

À *coordenação e ao corpo docente* do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, pelo conhecimento que me ajudaram a construir.

Aos *funcionários* da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sempre tão atenciosos.

A todos os *colegas*, pela presença e pela amizade.

Aos *estudantes* – futuros professores – que concordaram em participar do experimento, demonstrando interesse e boa vontade incomuns durante todo o desenvolvimento da seqüência. Sem sua contribuição este estudo não teria sido realizado.

Ao *Professor Ruy César Pietropaolo*, porque me permitiu esta experiência, cedendo suas aulas para a aplicação da seqüência. Porque me ouviu, me criticou e me disse palavras de estímulo e encorajamento. Eu nunca vou ser suficientemente agradecida.

À *Conceição, Leila, Raquel e Sílvio*, que participaram, duplamente, da realização deste trabalho. Primeiro, porque voluntariamente dispensaram seu tempo, se revezando como observadores durante a experimentação. Em segundo lugar, e principalmente, pela partilha de idéias, de delicadeza e de alegria.

Aos *meus irmãos...* porque me amam...

Obrigada!

A Autora

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	16
CAPÍTULO 1	20
1.1. Justificativa	20
1.2. Problema pesquisa	25
1.3. Fundamentação teórica e procedimentos metodológicos	25
ANÁLISES PRELIMINARES	
CAPÍTULO 2	32
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	32
2.1. Pesquisas anteriores sobre incomensurabilidade de segmentos de reta	32
2.2. O que dizem os documentos de referência curricular a respeito dos números irracionais e da incomensurabilidade de grandezas?	37
CAPÍTULO 3	41
ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO	41
CAPÍTULO 4	85
O PRÉ-TESTE	85
4.1. As questões do pré-teste	85
4.2. Aplicação do pré-teste	87
4.3. O pré-teste, como auxiliar na elaboração da seqüência didática	87
CAPÍTULO 5	91
A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA	91
5.1. Uma visão geral	91
5.2. Concepção da seqüência, análise <i>a priori</i> , experimentação e análise <i>a posteriori</i>	95

Atividade 1	96
Atividade 2	104
Atividade 3	108
Atividade 4	114
Atividade 5	129
Atividade 6	142
Atividade 7	149
Atividade 8	162
Atividade 9	178
CAPÍTULO 6	204
CONSIDERAÇÕES FINAIS	204
BIBLIOGRAFIA	214
MATERIAIS ESPECIAIS	219
APÊNDICE	i

ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – AUXILIAR NA CONSTRUÇÃO DA NOÇÃO DE MEDIDA DE SEGMENTOS DE RETA (i)	44
FIGURA 2 – AUXILIAR NA CONSTRUÇÃO DA NOÇÃO DE MEDIDA DE SEGMENTOS DE RETA (ii)	44
FIGURA 3 – AUXILIAR NA CONSTRUÇÃO DA NOÇÃO DE MEDIDA DE SEGMENTOS DE RETA (iii)	44
FIGURA 4 – AUXILIAR NA CONSTRUÇÃO DA NOÇÃO DE MEDIDA DE SEGMENTOS DE RETA (iv)	45
TABELA 1 – PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS PARA O CÁLCULO DO m.d.c. DE NÚMEROS NATURAIS	46
FIGURA 5 – PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS APLICADO A GRANDEZAS	46
TABELA 2 – PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS APLICADO A DUAS GRANDEZAS DADAS	47
TABELA 3 – PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS APLICADO A DUAS GRANDEZAS QUAISQUER	47
FIGURA 6 – QUADRADO ABCD – PROVA 1 – INCOMENSURABILIDADE DE SEGMENTOS DE RETA	49
FIGURA 7 – QUADRADO ABCD – PROVA 2 – INCOMENSURABILIDADE DE SEGMENTOS DE RETA	50
FIGURA 8 – O PENTÁGONO REGULAR – DEMONSTRAÇÃO DA INCOMENSURABILIDADE DE SEGMENTOS	53
FIGURA 9 – O PENTÁGONO REGULAR – RAZÃO ÁUREA: DIAGONAL/LADO	56
FIGURA 10 – DIAGONAL DO PENTÁGONO REGULAR	57
FIGURA 11 – SEÇÃO ÁUREA DO SEGMENTO AB	58
FIGURA 12 – O PENTÁGONO REGULAR – DEMONSTRAÇÃO – RAZÃO ÁUREA: DIAGONAL/LADO	60
FIGURA 13 – DIVISÃO DO SEGMENTO AB EM MÉDIA E EXTREMA RAZÃO	63
FIGURA 14 – AUXILIAR NA JUSTIFICATIVA – SEGMENTO ÁUREO	64
FIGURA 15 – “AUTOPROPAÇÃO” DA SEÇÃO ÁUREA DE UM SEGMENTO	66
FIGURA 16 – RETÂNGULO ÁUREO	67
FIGURA 17 – SUBDIVISÃO DO RETÂNGULO ÁUREO (I)	67
FIGURA 18 – SUBDIVISÃO DO RETÂNGULO ÁUREO (II)	68
FIGURA 19 – SUBDIVISÃO DO RETÂNGULO ÁUREO (III)	69
FIGURA 20 – QUADRADO ABCD – AUXILIAR NO TRAÇADO DO RETÂNGULO ÁUREO (1.º PROCESSO)	70
FIGURA 21 – 1.º PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO ÁUREO	71

FIGURA 22 – 2.º PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO ÁUREO	72
FIGURA 23 – 3.º PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO ÁUREO	74
FIGURA 24 – 4.º PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO ÁUREO	75
FIGURA 25 – RELAÇÃO ENTRE A SEQÜÊNCIA DE FIBONACCI E O RETÂNGULO ÁUREO	77
FIGURA 26 – AUXILIAR NA JUSTIFICATIVA DA INCOMENSURABILIDADE DOS LADOS DO RETÂNGULO ÁUREO (i)	81
FIGURA 27 – AUXILIAR NA JUSTIFICATIVA DA INCOMENSURABILIDADE DOS LADOS DO RETÂNGULO ÁUREO (ii)	81
FIGURA 28 – AUXILIAR NA JUSTIFICATIVA DA INCOMENSURABILIDADE DOS LADOS DO RETÂNGULO ÁUREO (iii)	82
FIGURA 29 – PROTOCOLOS DE EXPERIMENTAÇÃO – QUESTÃO 1 – PRÉ-TESTE	88
FIGURA 30 – PROTOCOLOS DE EXPERIMENTAÇÃO – QUESTÃO 2 – PRÉ-TESTE	88
FIGURA 31 – OUTROS PROTOCOLOS DE EXPERIMENTAÇÃO – QUESTÃO 2 – PRE- TESTE	89
FIGURA 32 – O PARTENON	96
FIGURA 33 – O PARTENON	96
FIGURA 34 – ISABEL D’ESTE, por Leonardo da Vinci	97
FIGURA 35 – ISABEL D’ESTE, por Leonardo da Vinci	97
TABELA 4 – A RAZÃO ÁUREA NO RETRATO DE ISABEL D’ESTE	97
FIGURA 36 – MARIA MÜLLER	98
TABELA 5 – A RAZÃO ÁUREA NA FOTO DE MARIA MÜLLER	98
FIGURA 37 – O HOMEM SEGUNDO AS PROPORÇÕES DE VITRÚVIO	99
FIGURA 38 – A MULHER QUE CHORA, por Picasso	100
FIGURA 39 – CABEÇA DE MULHER, por Picasso	100
FIGURA 40 – RETÂNGULOS APRESENTADOS COMO PARTE DA ATIVIDADE 2	104
FIGURA 41 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (A) – ATIVIDADE 2	107
FIGURA 42 – SEQÜÊNCIA DE RETÂNGULOS – SUBDIVISÃO ITERATIVA – ATIVIDADE 3	108
FIGURA 43 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (E) (i) – ATIVIDADE 3	112
FIGURA 44 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (E) (ii) – ATIVIDADE 3	112
FIGURA 45 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (A) (i) – ATIVIDADE 3	113
FIGURA 46 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (A) (ii) – ATIVIDADE 3	113
FIGURA 47 – RETÂNGULO ABCD – 1.ª SUBDIVISÃO – ATIVIDADE 4	114
TABELA 6 – A SEÇÃO ÁUREA NOS LADOS DOS RETÂNGULOS FORMADOS PELA 1.ª SUBDIVISÃO DE ABCD	114
FIGURA 48 – RETÂNGULO ABCD – 2.ª SUBDIVISÃO – ATIVIDADE 4	115
TABELA 7 – A SEÇÃO ÁUREA NOS LADOS DOS RETÂNGULOS FORMADOS PELA 2.ª SUBDIVISÃO DE ABCD	115
FIGURA 49 – RETÂNGULO ABCD – 3.ª SUBDIVISÃO – ATIVIDADE 4	115

TABELA 8 – A SEÇÃO ÁUREA NOS LADOS DOS RETÂNGULOS FORMADOS PELA 3. ^a SUBDIVISÃO DE ABCD	116
FIGURA 50 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (A) – ATIVIDADE 4, ITEM B	119
FIGURA 51 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (A) – ATIVIDADE 4, ITEM C	121
FIGURA 52 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (B) – ATIVIDADE 4, QUESTÃO 1, a	123
FIGURA 53 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (B) – ATIVIDADE 4, ITEM C, QUESTÃO 1, c	124
QUADRO 1 – TRANSCRIÇÃO DE PARTE DE DISCUSSÃO – GRUPO G-1 – ATIVIDADE 4	127
FIGURA 54 – RETÂNGULO ÁUREO – ATIVIDADE 5	129
FIGURA 55 – PROVÁVEL ESTRATÉGIA PARA A SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 5	132
FIGURA 56 – APONTAMENTOS DO OBSERVADOR – GRUPO G-2 – ATIVIDADE 5	135
FIGURA 57 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-2 (A) – ATIVIDADE 5	135
FIGURA 58 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (A) – ATIVIDADE 5	136
FIGURA 59 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (B) – ATIVIDADE 5	136
FIGURA 60 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (A) – ATIVIDADE 5 (i)	137
FIGURA 61 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (A) – ATIVIDADE 5 (ii)	137
FIGURA 62 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (B) – ATIVIDADE 5	138
FIGURA 63 – ESTRATÉGIA INICIADA POR UM INTEGRANTE DO G-2 – ATIVIDADE 5	139
FIGURA 64 – OUTRA POSSIBILIDADE PARA O ENUNCIADO DA ATIVIDADE 5	140
FIGURA 65 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (A) – ATIVIDADE 6	145
FIGURA 66 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (C) - ATIVIDADE 6	147
FIGURA 67 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (D) – ATIVIDADE 6	148
FIGURA 68 – PROVÁVEL RESULTADO DA CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA SOLICITADA NA ATIVIDADE 7	150
FIGURA 69 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (D) – ATIVIDADE 7, SEGUNDA PARTE (i)	155
FIGURA 70 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1(D) – ATIVIDADE 7, SEGUNDA PARTE (ii)	156
FIGURA 71 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-2 (C) – ATIVIDADE 7, SEGUNDA PARTE	157
FIGURA 72 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (A) – ATIVIDADE 7, PRIMEIRA PARTE	158
FIGURA 73 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (A) – ATIVIDADE 7 – SEGUNDA PARTE	158
FIGURA 74 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (B) – ATIVIDADE 7, SEGUNDA PARTE	160
FIGURA 75 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (C) – ATIVIDADE 7, SEGUNDA PARTE	160

TABELA 9 – PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS – m.d.c. DE NÚMEROS NATURAIS – ATIVIDADE 8, ITEM A	162
FIGURA 76 – SEGMENTOS AB e CD – ATIVIDADE 8, ITEM A	162
FIGURA 77 – PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS APLICADO AOS SEGMENTOS AB e CD – ATIVIDADE 8, ITEM A	163
TABELA 10 – PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS APLICADO AOS SEGMENTOS AB e CD – ATIVIDADE 8, ITEM A	163
FIGURA 78 – SEGMENTOS XY e ZW – ATIVIDADE 8 – ITEM B	163
TABELA 11 – PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS APLICADO AOS SEGMENTOS XY e ZW – ATIVIDADE 8 – ITEM B	163
FIGURA 79 – SEGMENTOS MN e RS – ATIVIDADE 8, ITEM C	164
TABELA 12 – PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS APLICADO AOS SEGMENTOS MN e RS – ATIVIDADE 8 – ITEM C	164
FIGURA 80 – QUADRADO PQRS – ATIVIDADE 8, ITEM D	164
FIGURA 81 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (D) – ATIVIDADE 8, ITEM D ...	168
FIGURA 82 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (E) – ATIVIDADE 8, ITEM D	169
FIGURA 83 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (E) – ATIVIDADE 8, ITEM A	169
FIGURA 84 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (E) – ATIVIDADE 8, ITEM B	170
FIGURA 85 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (E) – ATIVIDADE 8, ITEM D	170
FIGURA 86 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-2 (A) – ATIVIDADE 8, ITEM D	172
FIGURA 87 – REGISTRO – INSTITUCIONALIZAÇÃO – INCOMENSURABILIDADE DE SEGMENTOS – ALUNO G-2 (A)	175
FIGURA 88 – PROTOCOLO – G-2 (A) – PARTE DA JUSTIFICATIVA INCOMENSURABILIDADE DE SEGMENTOS	176
FIGURA 89 – PROTOCOLO – G-1 (A) – PARTE DA JUSTIFICATIVA INCOMENSURABILIDADE DE SEGMENTOS	177
FIGURA 90 – PROTOCOLO – G-2 (B) – PARTE DA JUSTIFICATIVA INCOMENSURABILIDADE DE SEGMENTOS	177
FIGURA 91 – CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO ÁUREO – APRESENTADA NO ENUNCIADO DA ATIVIDADE 9	178
FIGURA 92 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (C) – ATIVIDADE 9, ITEM A	183
FIGURA 93 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-2 (C) – ATIVIDADE 9, ITEM A (i)	184
FIGURA 94 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-2 (C) – ATIVIDADE 9, ITEM A (ii)	184
FIGURA 95 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (D) – ATIVIDADE 9, ITEM A	185
TABELA 13 – PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS APLICADO A GRANDEZAS NA ANÁLISE DAS ATIVIDADES	185
TABELA 14 – PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS APLICADO AOS NÚMEROS 128 E 20	186
FIGURA 96 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (A) – ATIVIDADE 9, ITEM A	186

FIGURA 97 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-2 (B) – ATIVIDADE 9, ITEM A (i)	187
FIGURA 98 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-2 (B) – ATIVIDADE 9 ITEM A (ii)	187
FIGURA 99 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (B) – ATIVIDADE 9, ITEM A	188
FIGURA 100 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-2 (A) – ATIVIDADE 9, ITEM A (i)	189
FIGURA 101 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (A) – ATIVIDADE 9, ITEM A ..	190
FIGURA 102 – PROTOCOLOS DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (A) – ATIVIDADE 9, ITEM A	191
FIGURA 103 – PROTOCOLO – G-1 (A) – ATIVIDADE 9, FIGURA AUXILIAR NO DESENVOLVIMENTO DO ITEM B	192
FIGURA 104 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (A) – ATIVIDADE 9, ITEM B (i)	192
FIGURA 105 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (C) – ATIVIDADE 9, ITEM B (i)	193
FIGURA 106 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (D) – ATIVIDADE 9, ITEM B .	195
FIGURA 107 – PROTOCOLO – G-1 (C) – ATIVIDADE 9, FIGURA AUXILIAR NO DESENVOLVIMENTO DO ITEM B (i)	196
FIGURA 108 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (C) – ATIVIDADE 9, ITEM B (ii)	196
FIGURA 109 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (A) – ATIVIDADE 9, ITEM B ..	197
FIGURA 110 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-2 (D) – ATIVIDADE 9, ITEM B ..	198
FIGURA 111 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-2 (C) – ATIVIDADE 9, ITEM B ..	199
FIGURA 112 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-2 (A) – ATIVIDADE 9, ITEM C ..	199
FIGURA 113 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (C) – ATIVIDADE 9, ITEM C ..	200
FIGURA 114 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (D) – ATIVIDADE 9, ITEM C ..	200
FIGURA 115 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (A) – ATIVIDADE 9, ITEM C ..	201

RESUMO

O presente estudo foi realizado com o objetivo de contribuir para a formação inicial de professores de matemática, propondo a utilização da seção áurea como contexto para explorar a noção de incomensurabilidade de segmentos de reta. Tomando como referencial teórico a noção de “jogos de quadros”, introduzida por Douady (1986) na didática da matemática e usando a metodologia de pesquisa denominada engenharia didática, desenvolvemos nosso trabalho com base na hipótese de que uma seqüência de ensino sobre a seção áurea, cuja realização favoreça a articulação entre quadros distintos de conhecimentos, pode propiciar a compreensão e/ou desenvolvimento da noção de “incomensurabilidade de segmentos de reta”.

Por este estudo, examinamos se o processo das divisões sucessivas baseado no algoritmo de Euclides propiciou aos sujeitos de nossa pesquisa o desenvolvimento da noção de incomensurabilidade de segmentos de reta. Analisamos, ainda se os participantes recorriam à mudança de quadros para a resolução de algumas das situações apresentadas na seqüência e de que forma essa estratégia contribuiu para desenvolver a noção de retângulo áureo e a noção de incomensurabilidade de segmentos de reta. Finalmente, examinamos se estabeleciam uma relação entre as características do retângulo áureo e a noção de incomensurabilidade de segmentos de reta, por meio da elaboração de uma justificativa da incomensurabilidade dos lados do retângulo áureo.

Os resultados indicam que houve um avanço em relação às respostas apresentadas no pré-teste, permitindo-nos concluir que a seção áurea pode ser um contexto favorável à compreensão e/ou desenvolvimento da noção de segmentos incomensuráveis. O exame do desempenho dos estudantes revelou também que a seqüência desenvolvida pode favorecer a inter-relação entre quadros distintos de conhecimentos, possibilitando que seja estabelecido um elo de ligação entre determinadas construções geométricas e números irracionais.

Nas considerações finais, são discutidas as limitações observadas durante a realização deste trabalho, cuja análise poderá servir como ponto de partida para novas investigações sobre o mesmo tema.

Palavras-chave: incomensurabilidade de segmentos de reta, números irracionais, seção áurea e jogos de quadros.

ABSTRACT

We have conducted this study to contribute to education of future teachers, by proposing the use of “golden section” as a context to explore the notion of incommensurable magnitudes. We have based our study on the notion of “jeux de cadres”, introduced by Douady (1986) in Mathematics Didactic, and used the Didactic Engineering research methodology. Our research was developed on the following hypothesis: “a teaching sequence about the golden section which favors an interaction among different knowledge domains can advance the comprehension and/or development of the notion of incommensurability of straight line segments”.

For this study, we have attempted to determine if the process of successive divisions based on Euclids’ algorithm helped foster the development of the notion of incommensurability of straight line segments in the future teachers. Furthermore, we verified whether they used the “jeux de cadres” to solve some problems presented in the sequence and how it contributed to develop the notion of golden rectangle and the notion of incommensurable straight line segments. Finally, we determined if they have established a relationship between the golden rectangle characteristics and the notion of incommensurability of straight line segments, by offering a proof of the incommensurability of the sides of the golden rectangle.

The results seem to indicate some progress in relation to the answers provided in the pre-test, which allows us to conclude that the golden section can be a favorable context for the comprehension and/or development of the notion of incommensurable straight line segments. The examination of the students’ performance have also shown that the sequence can promote an interaction among different knowledge domains, allowing a connection between certain geometric constructions and irrational numbers.

At the end, we discuss some limitations observed during the development of this study, whose analysis can serve as a starting point for new investigations on the same theme.

Key-Words: incommensurability of straight line segments, irrational numbers, golden section and “jeux de cadres”.

APRESENTAÇÃO

A pesquisa que deu origem a esta dissertação foi desenvolvida com o *objetivo* de propor a exploração da noção de “incomensurabilidade de grandezas”, utilizando como contexto a seção áurea de um segmento.

Para a escolha do tema, consideramos o importante papel dos conceitos de “grandezas” e “medidas” na matemática escolar, uma vez que seu estudo pode propiciar a construção, a ampliação e o aperfeiçoamento de noções reputadas fundamentais, como o conceito de número, favorecendo a articulação entre campos distintos de conhecimentos, tanto da matemática quanto de outras disciplinas.

Levamos também em conta o fato de que o estudo do tema “grandezas e medidas” deve, necessariamente, incluir uma discussão sobre “grandezas incomensuráveis”, cuja compreensão permite a construção do conceito de número irracional sob uma perspectiva não apenas restrita a cálculos com radicais.

Assim, entendemos que seja relevante e essencial que o futuro professor de educação básica tenha domínio do conteúdo “incomensurabilidade de grandezas”, para poder selecionar, organizar e explorar problemas, em contextos diversos, como forma de auxiliar seus alunos na construção desse conhecimento.

Dentre os trabalhos consultados, dois estudos sobre a “irracionalidade” influenciaram o desenvolvimento de nossa pesquisa. O primeiro deles, sob o título *The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers*, foi realizado por Fischbein et al. (1995), com um grupo formado por

estudantes de séries correspondentes ao Ensino Médio no Brasil e por futuros professores. O segundo estudo, sob o título *Prospective secondary mathematics teachers' understanding of irrationality*, foi desenvolvido por Sirotic (2004), com um grupo de futuros professores. Dessas pesquisas interessaram-nos, particularmente, os resultados das questões relacionadas com a “incomensurabilidade de segmentos de reta”. Ao analisar as respostas dos sujeitos de sua pesquisa, Fischbein et al. (1995) concluíram que a noção de incomensurabilidade de grandezas é obscura para a maioria dos estudantes pesquisados, que demonstraram ter dificuldade em perceber os números irracionais como representações numéricas da incomensurabilidade de segmentos de reta. Os pesquisadores atribuíram esse resultado à ausência de um ensino sistemático que leve em conta a estrutura hierárquica das classes de números, da qual o conjunto dos números irracionais faz parte integrante.

Quanto à pesquisa de Sirotic (2004), chamou-nos a atenção o fato de quase não haver respostas à questão sobre incomensurabilidade de grandezas, proposta no questionário apresentado aos futuros professores, indicando, conforme a pesquisadora observa, “que a idéia [de incomensurabilidade de grandezas] era muito estranha para muitos dos participantes” (p. 194).

Consideramos, então, que seria pertinente propor a um grupo de alunos do Curso de Licenciatura em Matemática um estudo sobre a “incomensurabilidade de grandezas” que proporcionasse a oportunidade de ampliar e aprofundar conceitos e procedimentos relacionados com o tema, tais como: números irracionais, razão, proporção, semelhança de figuras planas, construções geométricas e demonstrações. Além disso, o futuro professor poderia discutir a metodologia utilizada, refletindo sobre as implicações dessa abordagem em sala de aula.

Utilizando alguns princípios da “engenharia didática”, apresentamos a um grupo de dez alunos de 3º e 4º anos do Curso de Licenciatura em Matemática uma seqüência de ensino a respeito da seção áurea, visando a exploração da noção de “incomensurabilidade de segmentos de reta”, cujas atividades foram elaboradas e analisadas à luz da noção de “jogos de quadros”, introduzida por Douady (1986) na didática da matemática.

Assim, nosso propósito, ao apresentar este trabalho, é contribuir para a formação inicial de professores de matemática, pois julgamos que pode constituir material para a reflexão sobre outras possibilidades de organização de noções já elaboradas, relacionadas com a incomensurabilidade de grandezas, como forma de propiciar a construção de outros conhecimentos.

Esta dissertação foi organizada em seis capítulos.

No capítulo 1, justificamos nossa escolha de investigar a possibilidade de exploração do assunto “incomensurabilidade de segmentos de reta”, usando de forma contextualizada a “seção áurea de um segmento”. São também explicitadas as questões que nortearam nosso trabalho e o objetivo que desejávamos alcançar. Incluímos, ainda neste capítulo, a metodologia utilizada e o referencial teórico em que fundamentamos o desenvolvimento deste experimento.

No capítulo 2, destacamos as duas pesquisas referidas (Fischbein et al., 1995, e Sirotic, 2004), que auxiliaram em nossas reflexões a respeito da importância de pesquisar sobre “incomensurabilidade de grandezas” e consideramos as recomendações feitas em documentos oficiais de referência curricular¹ para o desenvolvimento do assunto “irracionalidade”. Nossa hipótese de pesquisa é apresentada ao final deste capítulo.

Apresentamos, no capítulo 3, o estudo do objeto matemático, enfatizando a relação entre “incomensurabilidade de segmentos de reta”, “números irracionais” e “seção áurea de um segmento”, ponto de partida para o desenvolvimento da seqüência didática.

O capítulo 4 é dedicado à exposição do processo de elaboração e aplicação do pré-teste. São especificadas as razões de nossas escolhas, o objetivo que tínhamos em mente ao propor cada uma das questões, a análise das respostas apresentadas pelos participantes e algumas observações a respeito de como influenciaram na elaboração da seqüência de ensino.

¹ Parâmetros Curriculares Nacionais e Proposta curricular de matemática no Ensino Fundamental.

O capítulo 5 traz a concepção da seqüência didática, incluindo a descrição das atividades, bem como sua análise *a priori*. Contém, igualmente, o relato da aplicação da seqüência e uma análise do desempenho dos sujeitos de nossa pesquisa. São discutidos, também neste capítulo, os pontos que, em nossa opinião, representaram avanços em relação aos resultados do pré-teste.

Nossas conclusões são expostas no capítulo 6, como resultado do confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*. Finalmente, fazemos algumas considerações sobre pontos que, a nosso ver, devem merecer atenção mais específica, em futuras discussões ou investigações que eventualmente sejam desenvolvidas sobre o mesmo tema.

CAPÍTULO 1

1.1. Justificativa

“Grandezas e medidas” é um tema que vem ganhando destaque no currículo escolar não apenas por sua relevância social, mas, sobretudo, por favorecer a interligação de campos distintos da matemática e de outras disciplinas, permitindo a construção, o desenvolvimento e o aperfeiçoamento de noções consideradas fundamentais.

Trata-se de assunto que vem sendo objeto de discussão em eventos de reconhecida importância, como a Escola de Verão (2001), organizada pela Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM),² que incluiu em seu programa a discussão: “Etude d’un problème curriculaire: mesure et grandeur dans l’enseignement des mathématiques: quand? comment? pourquoi?”.³

O IV Seminário da História da Matemática, realizado em 2001, na cidade de Natal, sob o patrocínio da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), também reuniu pesquisadores, com o intuito de refletir e discutir sobre vários assuntos, incluindo a história da construção do conceito de grandeza e o ensino atual dos conteúdos relacionados ao tema “grandezas e medidas”. A importância dessa reflexão é evidenciada por Bellemain e Lima (2002): “trata-se de alimentar o debate sobre o papel que as grandezas e medidas tiveram, têm e podem ter na matemática escolar” (p. 11).

² As Escolas de Verão são realizadas na França, espaço em que se reúnem estudiosos da Didática da Matemática para a discussão e divulgação dos avanços mais recentes das pesquisas nessa área.

³ Estudo de um problema curricular: medida e grandeza no ensino da matemática: quando? como? por quê?

Os documentos oficiais que servem como referência para a elaboração dos currículos escolares também apontam para a relevância desse tema. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Ministério da Educação e do Desporto, 1998), por exemplo, trazem uma organização dos conteúdos a serem trabalhados durante o Ensino Fundamental, em quatro grandes blocos, sendo um deles dedicado especificamente a “grandezas e medidas”.

Seus autores destacam que esse bloco de conteúdos fornece contextos ricos, inclusive a história da matemática, para a construção do significado de número. Além disso, seu estudo possibilita a articulação entre os quadros geométrico, numérico e algébrico (PCN, 1998, p. 49 e 52).

Os conceitos referentes às grandezas e medidas estão na base do desenvolvimento da matemática e a abordagem destes implica a discussão de um outro conceito, que deve estar necessariamente presente no currículo escolar: a incomensurabilidade de grandezas (dois comprimentos, duas áreas, dois volumes etc.). Fazemos essa observação considerando que um estudo relativo a grandezas e medidas que não contemple uma discussão sobre a incomensurabilidade de grandezas pode produzir um conhecimento incompleto, levando à idéia errônea de que duas grandezas quaisquer, de mesma espécie, são sempre comensuráveis.

Voltaremos a discutir as noções de grandezas, medidas de grandezas e incomensurabilidade de grandezas no capítulo 3, que traz o “estudo do objeto matemático”.

Neste trabalho, nosso interesse está voltado para a incomensurabilidade de segmentos de reta, cujo estudo é essencial, pois favorece a construção do significado de número irracional sob uma perspectiva que não seja limitada a cálculos com radicais.

A respeito dos números irracionais, a *Proposta curricular para o ensino de matemática no Ensino Fundamental*, em São Paulo (1997) recomenda que se desenvolva um trabalho intuitivo, incluindo a questão da medida, de forma que o aluno, em certo sentido, reproduza o processo histórico de construção desse conhecimento, a partir de problemas no quadro geométrico, cujas soluções sejam

expressas por números irracionais. Esse primeiro contato com o número irracional contribui para a ampliação e aperfeiçoamento da noção de número, desenvolvendo, intuitivamente, a idéia de completividade da reta numérica (p. 161).

Historicamente, a construção desse conhecimento não foi um processo simples. A descoberta das grandezas incomensuráveis (século V a.C.), pelos gregos, derrubava a idéia de vivermos num universo, cuja organização seria baseada nos números inteiros positivos e em suas propriedades. Esses números revelaram-se insuficientes para expressar a razão entre dois segmentos quaisquer e essa descoberta provocou a primeira grande crise nos fundamentos da matemática. Boyer (1974) relata esse fato:

Os diálogos de Platão mostram, no entanto, que a comunidade matemática grega fora assombrada por uma descoberta que praticamente demolia a base da fé pitagórica nos inteiros. Tratava-se da descoberta que na própria geometria os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmo simples propriedades básicas. Não bastam, por exemplo, para comparar a diagonal de um quadrado ou de um cubo ou de um pentágono com seu lado. Os segmentos são incomensuráveis, não importa quão pequena se tome a unidade de medida (p. 53).

Embora essa crise tenha sido contornada pelo desenvolvimento da “Teoria das Proporções”,⁴ por Eudoxo (408-355 a.C. aproximadamente), com uma nova definição para a igualdade e desigualdade entre duas razões (incluindo grandezas comensuráveis e incomensuráveis), apenas no século XIX foi estabelecida por Dedekind, Cantor e Weierstrass uma teoria rigorosa para a medida de grandezas, com a sistematização dos números irracionais.

Em suas considerações a respeito do papel da história da matemática no currículo escolar, os PCN (1998) observam que, se o professor conhecer as resistências e as dificuldades enfrentadas pelo homem no passado, quando foi produzido e sistematizado um conhecimento, terá condições de compreender melhor e aceitar as dificuldades apresentadas por seus alunos na construção

⁴ A abordagem dos incomensuráveis, desenvolvida por Eudoxo por volta de 370 a.C., com uma revisão da teoria pitagórica das grandezas e proporções, é considerada uma das obras-primas da matemática, que, segundo Eves (2004, p. 673), corresponde em sua essência à teoria dos números irracionais desenvolvida por Dedekind em 1872. Essa teoria está exposta no Livro V dos “Elementos de Euclides”.

desse conhecimento. Poderá, então, buscar abordagens mais adequadas que favoreçam essa aprendizagem (p. 33).

Alguns educadores matemáticos defendem a idéia de que a dificuldade histórica para a construção de um conhecimento pode justificar a dificuldade de aprendizagem do mesmo tema pelos alunos. Gaspar (2003), por exemplo, observa que podemos comparar as dificuldades dos alunos a obstáculos enfrentados na história durante o desenvolvimento de alguns conhecimentos matemáticos, acrescentando que isso pode auxiliar o professor a compreender a resistência dos alunos quanto a aceitar determinados conceitos (p. 22-23).

Miguel (1998) defende o princípio de que a história da matemática pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem, permitindo ao aluno a percepção de que a matemática vai sendo construída a partir das necessidades e dificuldades próprias de cada época e de cada cultura. No entanto, ele se contrapõe à idéia de que a aquisição de um conceito pelos alunos seria uma “cópia” do que ocorreu na história desse conceito. Ou seja, as dificuldades encontradas hoje no processo de aprendizagem de um conhecimento matemático não seriam necessariamente as mesmas deparadas pelos homens do passado (Miguel, 1998, apud Pietropaolo, 1999, p. 173-174).

As dificuldades que podem ser detectadas na aprendizagem do conceito de números irracionais talvez estejam relacionadas com a ausência de modelos materiais, que sirvam como exemplos desses números, pois “nenhuma verificação empírica, nenhuma medição de grandezas, por mais precisa que seja, provará que uma medida tem valor irracional” (PCN, 1998, p. 106).

Levando em conta a importância do tema “incomensurabilidade de segmentos de reta” nos currículos atualmente prescritos, entendemos que seja necessário que o professor de educação básica possua domínio desse conteúdo, também do ponto de vista didático, isto é, seria desejável que ele experimentasse, analisasse e discutisse abordagens diversificadas de tal matéria.

Elaboramos, assim, uma seqüência didática envolvendo “retângulo áureo” para ser desenvolvida por alunos do Curso de Licenciatura em Matemática, pois esse assunto tem estreita ligação com o tema “incomensurabilidade de

segmentos de reta”, uma vez que os lados do retângulo áureo são segmentos incomensuráveis.

Acreditamos que o trabalho com o “retângulo áureo” pode ser bastante rico, pois permite ao futuro professor rever, ampliar e aprofundar diversos conceitos e procedimentos ligados ao tema “incomensurabilidade de segmentos de reta”, como: números irracionais, razão, proporção, semelhança de figuras planas, construções geométricas e demonstrações.

Escolhemos, então, desenvolver nossa seqüência com um grupo de alunos dos 3º e 4º anos do Curso de Licenciatura em Matemática, cuja participação permitiu o levantamento dos dados necessários para o cumprimento das etapas que compõem nosso experimento.

Em síntese, nosso propósito é contribuir para a formação inicial de professores de matemática, apresentando uma seqüência de atividades, cujo desenvolvimento pode favorecer a reflexão sobre diferentes formas de organização de noções e conceitos já construídos relacionados com a incomensurabilidade de segmentos de reta e propiciar a aquisição/construção de outros.

Ao desenvolver este trabalho, tínhamos a intenção de criar condições para que os participantes de nossa pesquisa, futuros professores de matemática, percebessem a importância de ter um domínio abrangente do conteúdo em questão, para elaborar, selecionar, organizar e explorar problemas envolvendo incomensurabilidade de segmentos em contextos diversos. Além disso, tivemos o objetivo de discutir uma metodologia – no caso, a engenharia didática – para o desenvolvimento do tema e refletir sobre as implicações dessa abordagem em sala de aula.

Julgamos que as considerações finais constantes do capítulo 6 podem constituir um ponto de partida para a reflexão concernente às possibilidades que o tema oferece, sendo material passível de modificações e adequações, de acordo com o grupo de alunos com o qual o professor estiver trabalhando.

1.2. Problema de pesquisa

Nossas questões de pesquisa são:

- O estudo da seção áurea é um contexto favorável para o desenvolvimento da noção de incomensurabilidade de segmentos de reta?
- Uma seqüência didática pode ser o elo de ligação entre uma construção geométrica e o conjunto dos números irracionais, embora sejam conteúdos aparentemente dissociados?

Nesse sentido, o nosso *objetivo* para este trabalho é explorar a noção de incomensurabilidade de grandezas, utilizando, de modo contextualizado, a seção áurea de um segmento.

Nossa *hipótese de pesquisa*, exposta na página 40, foi construída após termos escolhido a teoria que iria fundamentar o desenvolvimento de nosso trabalho e a consulta às pesquisas já realizadas a respeito do assunto “incomensurabilidade de grandezas”.

1.3. Fundamentação teórica e procedimentos metodológicos

O referencial teórico escolhido para o desenvolvimento de nosso trabalho é a noção de *jogos de quadros*, introduzida por Douady (1986) na didática da matemática.

Um quadro de conhecimentos, conforme esclarece Douady (1986), é constituído por conceitos, objetos de um ramo da matemática, suas propriedades, as relações possíveis entre esses objetos, as formulações diferenciadas que podemos fazer a respeito deles, os procedimentos que podemos utilizar para lidar com esses conceitos e as imagens mentais ligadas a esses objetos (p. 11) (exemplos: quadro algébrico, quadro numérico etc.).

Segundo Douady (1986, p. 11-12), uma pessoa já construiu um conhecimento em matemática quando é capaz de mobilizá-lo para a resolução de problemas, identificando as situações para as quais esse conhecimento é a ferramenta adequada de solução. Deve ser capaz de adaptar esse conhecimento às condições do problema considerado, para interpretar seu enunciado e propor novas questões relacionadas à mesma situação.

Na medida em que o conhecimento vai se ampliando, ocorre uma evolução nas formas de expressão e representação, nas justificativas, nas argumentações e nas demonstrações que o sujeito pode desenvolver, a respeito de um determinado conteúdo.

Douady (1986) observa em seu texto que o professor pode auxiliar o aluno na evolução de seus conhecimentos, apresentando a ele situações que propiciem os *jogos de quadros*, ou mesmo que exijam uma mudança de quadro, para sua solução. A utilização desse recurso pode ocorrer espontaneamente (por iniciativa do aluno), ou, ainda, pode ser provocada por intervenção do professor, ou de outro aluno.

Ao escolher o tipo de abordagem que envolva “jogos de quadros”, o professor pode propor aos seus alunos um problema convenientemente escolhido, em determinado quadro, de tal forma que, em certo momento do processo de resolução, o aluno perceba que seus conhecimentos no quadro em que o problema foi enunciado não são suficientes para a obtenção de um resultado satisfatório.

Assim, ocorre um impasse, um desconforto, pois a interpretação e a resolução do problema exigem do aluno a formulação de um novo enunciado ou a tradução do problema proposto, em um outro quadro de conhecimentos – o aluno se vê obrigado a utilizar como ferramentas conhecimentos disponíveis em outro quadro para facilitar o desbloqueio da situação e solucionar o problema.

A superação desse impasse produz o conhecimento.

O fato de o aluno sentir necessidade de buscar recursos em outro quadro de conhecimentos possibilita a formulação de novas questões e a elaboração de técnicas que não estavam disponíveis no quadro em que o

problema havia sido proposto inicialmente. O aluno pode, muitas vezes, chegar a resultados que não foram previstos, produzindo um enriquecimento dos quadros que estão em jogo durante o processo de resolução do problema e auxiliando o aluno a formar o significado do conceito que está sendo desenvolvido.

Os quadros de conhecimentos utilizados durante todo o desenvolvimento de nosso trabalho são: o *quadro numérico*, que está presente na representação das medidas de segmentos de reta e nos cálculos necessários para a realização da seqüência; o *quadro geométrico*, constituído por certos objetos geométricos, suas propriedades, as relações entre esses objetos, as formulações diferenciadas e suas distintas representações (figuras planas); o *quadro algébrico*, com as representações de proporções e equações, e o *quadro das grandezas*, que envolve a noção de comprimento de segmentos de reta, aqui caracterizado pelas classes de equivalência de segmentos congruentes e suas medidas.

Tomamos como base a noção de “jogos de quadros” por ser instrumento teórico desenvolvido para a elaboração de seqüências de problemas, cuja organização tem a finalidade de favorecer a construção de novos conhecimentos. Entendemos, então, que se trata de referencial apropriado à metodologia “engenharia didática”, que foi empregada para o desenvolvimento de nossa pesquisa.

De acordo com Artigue (1988), o nome “engenharia didática” foi atribuído, a partir de 1980, ao tipo de trabalho didático desenvolvido de forma experimental, em que o papel desempenhado pelo professor é semelhante ao do engenheiro, no sentido em que engendra um projeto de aprendizagem com a finalidade de desenvolver um determinado conhecimento com seus alunos, em sala de aula.

Esse projeto consiste na concepção e organização de seqüências didáticas pelo professor, e evolui em função das reações dos alunos e das escolhas e decisões tomadas pelo professor. Dessa forma, toda a complexidade que permeia as relações existentes no interior de uma sala de aula exerce alguma influência durante o desenvolvimento do trabalho.

A metodologia “engenharia didática” nos orientou na organização da pesquisa, em quatro fases, cuja síntese apresentamos a seguir:

Primeira fase – Análises preliminares

Durante o estudo empreendido nesta fase, apresentado nos capítulos 2, 3 e 4, foi realizado o levantamento dos dados necessários para a concepção da seqüência didática, incluindo:

- **as referências bibliográficas**, em que buscamos trabalhos já desenvolvidos, relacionados com “incomensurabilidade de grandezas”. Além disso, levando em conta o fato de que nossos sujeitos de pesquisa seriam futuros professores do Ensino Fundamental e Médio, buscamos as recomendações apresentadas em documentos de referência curricular, a respeito da abordagem e desenvolvimento desse conteúdo;
- **o estudo do objeto matemático**, que teve o objetivo de:
 - a) examinar o significado matemático da noção de seção áurea e evidenciar sua relação com a incomensurabilidade de segmentos de reta, bem como com outros conteúdos da matemática;
 - b) fazer um levantamento da importância do estudo da seção áurea de segmentos, como contexto propício para o desenvolvimento da noção de incomensurabilidade de segmentos de reta;
 - c) estabelecer uma relação entre medidas de segmentos de reta, números irracionais e segmentos incomensuráveis;
 - d) investigar os quadros envolvidos no estudo da “incomensurabilidade de segmentos” e da “seção áurea de um segmento” e de que forma podem ser explorados;

- **o pré-teste**

Com base nos estudos feitos até aqui e com o propósito de completar as informações necessárias para a concepção da seqüência didática, foi elaborado um pré-teste, com o objetivo de investigar os conhecimentos prévios dos futuros professores, a respeito da seção áurea de segmentos e da incomensurabilidade de segmentos de reta. Sua aplicação, em 7 de agosto de 2004, foi feita a um grupo de nove estudantes que aceitaram fazer parte de nossa pesquisa.

Segunda fase – Concepção e análise *a priori* das atividades que compõem a seqüência

Considerando as conclusões decorrentes dos estudos preliminares, realizados na primeira fase, foi elaborada a seqüência didática com o propósito de propiciar aos futuros professores a oportunidade de:

- construir a noção de retângulo áureo;
- construir a noção de seção áurea de um segmento de reta;
- introduzir a relação entre a existência de grandezas incomensuráveis e números irracionais;
- demonstrar que os lados do retângulo áureo são segmentos incomensuráveis.

A elaboração da seqüência didática é acompanhada da análise *a priori*, que constitui elemento característico da metodologia “engenharia didática” e compõe-se de:

- a) especificação dos objetivos das atividades;
- b) descrição das características das atividades e justificativa das escolhas feitas em relação às questões de pesquisa e ao objetivo a ser atingido;

- c) previsão das estratégias, dificuldades e comportamentos a serem observados durante a realização de cada atividade. Análise dos desafios que o desenvolvimento das atividades pode representar para os sujeitos da pesquisa, em decorrência das estratégias escolhidas para a resolução das tarefas propostas.

Terceira fase – Experimentação

Definidas as condições de realização da pesquisa, em concordância com o grupo de estudantes e o professor, foram desenvolvidas as atividades constantes da seqüência em oito sessões, cada uma com a duração de aproximadamente duas horas.

A seqüência foi aplicada pelo pesquisador, no horário da aula (aos sábados, das 8h às 10h), estando presentes, ainda, em cada encontro, o professor da disciplina e dois mestrandos em educação matemática.

Ao longo de todo o processo de aplicação da seqüência, o pesquisador desempenhou o papel de mediador entre os sujeitos da pesquisa e o conhecimento que estaria sendo construído ou desenvolvido. Os mestrandos participaram como observadores, com a incumbência de gravar discussões, registrar fatos, anotar as regras observadas nos comportamentos e as interações ocorridas entre as pessoas envolvidas no experimento, para a posterior elaboração de relatórios, que foram escritos pelos próprios observadores.

Encerrada a seqüência, os participantes foram solicitados a responder a um questionário, para que refletissem sobre os avanços realizados e apresentassem sugestões de modificações consideradas necessárias, no sentido de tornar a seqüência mais adequada ou mais satisfatória para a compreensão do tema que foi abordado.

Quarta fase – Análise *a posteriori* e validação

Para a análise *a posteriori* fizemos o confronto entre os comportamentos previstos na análise *a priori* e aqueles observados no decorrer do experimento. Como base para essa avaliação, consideramos os resultados apresentados no pré-teste, os dados registrados nos relatórios dos observadores, a transcrição das gravações, as produções dos participantes durante a realização da seqüência didática e o questionário respondido ao final do experimento.

CAPÍTULO 2

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Neste capítulo, realizamos uma apreciação de alguns dos resultados de pesquisas em educação matemática, que nos auxiliaram na reflexão a respeito da importância do tema “incomensurabilidade de grandezas” como objeto de estudo. Consideramos também as recomendações feitas em documentos de referência curricular⁵ para a abordagem e o desenvolvimento da noção de “irracionalidade”.

2.1. Pesquisas anteriores sobre incomensurabilidade de segmentos de reta

Nossa investigação sobre pesquisas concernentes à construção e/ou desenvolvimento da noção de incomensurabilidade de segmentos de reta foi feita com base em publicações do “Banco de Teses”⁶ em educação matemática, produzidas no Brasil no período de 1971 a 2003, e em alguns *sites* que fornecem informações a cerca de pesquisas realizadas no exterior.

Dos resultados de nossa busca destacamos a pesquisa de Fischbein et al. (1995), desenvolvida em Tel Aviv, sob o título *The concept of irrational*

⁵ Parâmetros Curriculares Nacionais e *Proposta curricular para o ensino de matemática no Ensino Fundamental*.

⁶ Baseamo-nos nas relações organizadas por: Dario Fiorentini (Cempem-FE-Unicamp) (1971-1998); Capes (1999-2002); Marisol Vieira Melo, mestranda em Educação Matemática/FE/Unicamp, que organizou lista complementar anterior a 2002 e listagens relativas a 2002 e 2003, publicadas na *Revista Zetetiké*, v. 12, n. 21, p. 83-127, jan.-jun. 2004.

numbers in high-school students and prospective teachers, com o objetivo de investigar o conhecimento formal dos participantes relativamente aos números irracionais.

Uma das questões que motivaram a pesquisa de Fischbein et al. (1995) diz respeito à obstrução da compreensão do conceito de números irracionais, pelas mesmas dificuldades intuitivas que marcaram a descoberta e aceitação desses números, na história da matemática. Presumindo que a dificuldade em aceitar que duas grandezas podem ser incomensuráveis constitui um dos dois maiores obstáculos⁷ intuitivos a serem enfrentados no processo de construção do conceito de número irracional, os autores ressaltam:

[...] o conceito de número irracional é intuitivamente difícil, por duas razões. Primeira, deve-se considerar a relação entre incomensurabilidade [de grandezas] e números irracionais. Como nós sabemos, uma das descobertas mais surpreendentes dos matemáticos gregos antigos foi a da existência de segmentos incomensuráveis. Mas, de fato, apenas no século XIX, com a contribuição de Dedekind, Cantor e Weierstrass, a teoria rigorosa dos números irracionais foi completamente estabelecida. Nós admitimos que esse processo histórico longo expressa não apenas dificuldades formais, mas também obstáculos intuitivos. De fato, nós lidamos, neste caso, com números que não se ajustam à intuição básica, modelos práticos, dos quais, o conceito de número emerge (Fischbein et al., 1995, p. 30).⁸

A respeito da intuição, Fischbein (1987) observa que a confiança excessiva em idéias intuitivas, ou a tendência de uma pessoa a superestimar suas próprias interpretações e soluções, é um obstáculo para que ela controle a validade de suas inferências a respeito de um determinado assunto, podendo bloquear o processo de aperfeiçoamento de seu raciocínio. Conhecimento intuitivo é uma idéia, aparentemente, indubitável, autoconsistente e auto-evidente (p. 36-42).

A fim de validar a hipótese de que “o conceito de incomensurabilidade [de grandezas] não é intuitivo” (p. 39), Fischbein et al. (1995) tomaram como público-alvo 62 estudantes de séries correspondentes ao Ensino Médio no Brasil

⁷ O segundo obstáculo intuitivo apontado pelos autores é a dificuldade em aceitar que o conjunto dos números racionais, embora seja denso em toda a reta, não cobre todos os pontos de um intervalo. (Fischbein et al., 1995, p. 29).

⁸ Tradução nossa, do original em inglês.

e 29 estudantes de curso universitário equivalente à Licenciatura, aos quais foi proposto um questionário relativo ao conjunto dos números reais, envolvendo a hierarquia do sistema de números reais, a densidade e a continuidade de conjuntos, as naturezas do infinito e a operação de medir.

Não faz parte do escopo deste trabalho uma avaliação que leve em conta a questão da intuição, mas interessaram-nos em especial, no estudo de Fischbein et al. (1995), duas questões que foram dedicadas ao tema “incomensurabilidade de segmentos de reta” e os resultados apresentados pela parcela formada por futuros professores, por estarem mais diretamente ligados à nossa pesquisa.

Com a primeira das questões desejava-se saber dos participantes sobre a possibilidade de ser sempre encontrada uma unidade comum de medida para dois segmentos de reta AB e CD (quaisquer), de comprimentos distintos, isto é, se existiria um segmento que pudesse cobrir exatamente, por iteração, os segmentos de reta considerados.

Após a aplicação do questionário, os investigadores constataram que 31% dos futuros professores não tinham conhecimento da existência de segmentos incomensuráveis, ou seja, responderam afirmativamente à primeira questão. Um argumento apresentado é o de que bastaria reduzir suficientemente a unidade de medida considerada.

Foram apresentadas respostas corretas (por exemplo, “É possível, algumas vezes”) por 38% dos futuros professores. No entanto, somente 17% apresentaram justificativas aceitáveis: “apenas se ambos os segmentos têm a medida expressa por um número racional” (Fischbein et al., 1995, p. 39).⁹

Para a resposta “não” (não é sempre possível encontrar uma unidade de medida comum a dois segmentos quaisquer) – resposta correta, mas ambígua – 17% dos futuros professores apresentaram argumentos sem consistência, como: “Não se pode sempre encontrar uma unidade comum [para duas grandezas], assim como não se pode sempre encontrar um divisor comum de

⁹ Tradução nossa, do original em inglês.

dois números” ou “é possível que os comprimentos dos segmentos não sejam [expressos por meio de] números inteiros” (Fischbein et al., 1995, p. 39).¹⁰

Completando esses dados, observamos que dentre os sujeitos que deixaram em branco esta questão 28% eram futuros professores.

Em suas considerações a respeito dos resultados da primeira questão sobre a incomensurabilidade de grandezas, os pesquisadores resumiram dizendo que apenas três estudantes das séries correspondentes ao Ensino Médio e três futuros professores demonstraram aceitar a existência de segmentos incomensuráveis (Fischbein et al., 1995, p. 40).

A segunda questão complementa a primeira, especificando um par de segmentos: “é possível encontrar uma unidade comum tanto para o lado quanto para a diagonal de um quadrado?” (Fischbein et al., 1995, p. 40).¹¹

Para esta questão, 49% dos futuros professores apresentaram respostas corretas (“nunca”), com justificativas aceitáveis. Dentre aqueles, cujas respostas não estavam corretas, 17% apresentaram justificativas do tipo “é possível encontrar uma medida comum à vontade” ou “nós podemos diminuir o comprimento da unidade tanto quanto nós quisermos, para obter uma unidade comum” (Fischbein et al., 1995, p. 40).¹²

Considerando esses resultados, os pesquisadores concluíram que a maioria dos estudantes de séries que correspondem ao Ensino Médio e metade dos futuros professores não têm uma noção adequada da incomensurabilidade de grandezas, ou continuam tendo uma idéia obscura sobre esse tema, inclusive quando se trata do lado e da diagonal de um quadrado.

Esses resultados foram atribuídos a uma certa negligência no tratamento dado aos números irracionais na matemática escolar e à ausência de preocupação com o ensino sistemático da estrutura hierárquica das várias classes de números, da qual o conjunto dos números irracionais é parte integrante.

¹⁰ Tradução nossa, do original em inglês.

¹¹ Tradução nossa, do original em inglês.

¹² Tradução nossa, do original em inglês.

Consideramos ainda, para a elaboração de nosso trabalho, a pesquisa que recebeu o título de *Prospective secondary Mathematics teachers' understanding of irrationality*, desenvolvida por Sirotic (2004), que procurou identificar as possíveis causas dos obstáculos cognitivos, que prejudicam o desenvolvimento da compreensão do conceito de irracionalidade e, conseqüentemente, da noção de número real.

Escolhendo como público-alvo um grupo de 46 futuros professores de matemática, o pesquisador investigou o conhecimento formal dos participantes sobre conjuntos numéricos, a cerca da definição e representação de números irracionais e referente à existência e densidade dos irracionais e seu lugar no sistema numérico.

O autor justifica a escolha do tema, observando que, embora a compreensão do conceito de irracionalidade seja essencial para uma concepção mais completa dos números reais, a atenção dedicada a esse tema tem sido bastante reduzida, tanto na matemática escolar quanto nas pesquisas em educação matemática. Ressalta ainda que o tema é difícil em si mesmo – conhecimento que a humanidade demorou milênios para construir e que na educação formal deve ser apresentado à criança na faixa dos 12 anos de idade. Assim, considerou que os resultados de sua pesquisa poderiam auxiliar os futuros professores a compreender as dificuldades dos alunos em relação à construção desse conhecimento.

Embora não sejam considerados aqui os resultados da pesquisa realizada por Sirotic (2004), por não constituírem o foco de atenção de nosso trabalho, interessam-nos, particularmente, as observações feitas pelo autor quando se refere à incomensurabilidade de grandezas. Ao finalizar o trabalho, o pesquisador destaca alguns pontos que, a seu ver, poderiam constituir objetos de análise mais específica, ou talvez pontos de partida para novas pesquisas, dizendo:

O escopo deste estudo foi limitado. Não se aventurou em algumas áreas-chave do conhecimento dos participantes, como incomensurabilidade de grandezas irracionais, ou a prova da irracionalidade de várias raízes quadradas. O conceito de irracionalidade provou ser muito complexo, dirigido para essas áreas. Poderia ser

mencionado que *havia um item sobre incomensurabilidade [de grandezas] incluso no questionário* (ver Apêndice A, questão 8b). *Porém, quase não havia respostas para essa questão indicando que a idéia era muito estranha para muitos dos participantes deste grupo* (Sirotic, 2004, p. 194).¹³ (Grifos nossos.)

Transcrevemos, a seguir, a questão 8, a que Sirotic (2004) se refere:

Questão 8

Suponha que você tem um quadrado, cuja diagonal mede 20 unidades de comprimento.

a) Quanto mede o lado desse quadrado?

b) Uma unidade comum a dois comprimentos é uma unidade que se encaixa em cada um dos comprimentos um número inteiro de vezes. É possível encontrar uma unidade comum (que pode ser muito, muito pequena), que possa medir tanto a diagonal quanto o lado? Explique seu pensamento (Sirotic, 2004, p. 206).¹⁴

Tanto os resultados da pesquisa de Fischbein et al. (1995) quanto o número de questões sobre a incomensurabilidade de grandezas, que ficaram sem resposta, em Fischbein et al. (1995) e em Sirotic (2004), sugerem a existência de uma falha no tratamento dado ao tema “incomensurabilidade de grandezas” na matemática escolar e confirmam a existência de dificuldades que são enfrentadas por professores e alunos na construção desse conhecimento.

Essas nos pareceram razões aceitáveis para buscarmos outras formas de abordagem e desenvolvimento da noção de incomensurabilidade de segmentos de reta.

2.2. O que dizem os documentos de referência curricular a respeito dos números irracionais e da incomensurabilidade de grandezas?

Achamos oportuno considerar as orientações apresentadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) e na *Proposta curricular para o ensino de matemática no Ensino Fundamental* (1997) a respeito da abordagem e

¹³ Tradução nossa, do original em inglês.

¹⁴ Tradução nossa, do original em inglês.

desenvolvimento do assunto “irracionalidade”, pois nosso público-alvo é formado por futuros professores do Ensino Fundamental e Médio, que deverão auxiliar seus alunos na construção desse conhecimento.

A *Proposta curricular para o ensino de matemática no Ensino Fundamental* em São Paulo (1997) recomenda que a construção do conceito de número irracional seja iniciada na oitava série, por meio de uma abordagem intuitiva, em vista da complexidade que envolve esse tema. A sugestão dos autores é de que esse trabalho seja feito “na perspectiva de aperfeiçoar o conceito de número (...) tomando-se como ponto de partida o conceito de número racional e a crítica do problema da medida” (p. 161).

O professor pode, segundo esses autores, criar condições para que o aluno amplie e aprimore o conceito de número, propondo situações elaboradas no quadro geométrico, cujas soluções sejam expressas por números irracionais.

Essa mesma idéia é expressa pelos autores dos PCN (1998), que sugerem uma abordagem do tema “irracionalidade” feita a partir de problemas que levem o aluno a perceber a insuficiência dos racionais e a necessidade de outros números – os irracionais (p. 83).

De acordo com estes autores, as dificuldades na aprendizagem do conceito de “irracionalidade” podem estar relacionadas com a ausência de situações que permitam que o aluno obtenha um número irracional, como resultado de uma ação concreta, como por exemplo, a medição de grandezas, uma vez que “a verificação da irracionalidade de um dado número só é possível, naturalmente, no âmbito da própria matemática” (p. 106).

Já destacamos anteriormente, o estudo de Fischbein et al. (1995), em que são discutidas as dificuldades intuitivas que podem impedir ou prejudicar a compreensão do conceito de número irracional.

Courant (2000), a esse respeito, observa que “nada em nossa ‘intuição’ pode nos ajudar a ‘enxergar’ os pontos irracionais como distintos dos racionais” (p. 72). O mesmo acontece ao estudante que antes trabalhou apenas com grandezas comensuráveis. Em geral, não ocorre a esse aluno, a idéia de que

existam as grandezas incomensuráveis. Em virtude disso, a construção desse conhecimento deve se dar por iniciativa do professor, mediante a proposta de situações que provoquem questionamentos, levistem dúvidas e dêem lugar às conjecturas.

Essa idéia está de acordo com o destaque feito por Fischbein et al. (1995) – pesquisa considerada no tópico anterior – quando afirmam que seria desejável “que os estudantes vivessem a dificuldade de aceitar que para dois segmentos, uma pessoa pode não encontrar uma unidade comum, não importa quão pequena ela seja” (p. 43-44).¹⁵

O enfrentamento de situações que representam desafios é, segundo educadores matemáticos, o ponto de partida para a construção do conhecimento matemático (PCN, 1998, p. 39-40).

Da mesma forma, os autores dos PCN (1998) sugerem que o professor proponha atividades que, a partir da resolução de problemas, podem levar os alunos à descoberta de regularidades e propriedades numéricas, geométricas e métricas, desenvolvendo a capacidade de perceber a existência de elementos comuns a várias situações. Segundo os autores, esse trabalho pode propiciar a elaboração de conjecturas, generalizações e deduções e além disso, possibilita o aperfeiçoamento das representações (p. 63).

Assim, ao organizar a seqüência didática, procuramos elaborar atividades que

- envolvam a resolução de problemas;
- propiciem a observação de regularidades e a generalização;
- incluam questões elaboradas no quadro geométrico, cujas soluções devam ser expressas por números irracionais;
- possam favorecer a compreensão da noção de incomensurabilidade de segmentos;

¹⁵ Tradução nossa, do original em inglês.

- possibilitem o estabelecimento de um processo de discussão que leve os participantes a argumentar, conjecturar e elaborar uma justificativa da incomensurabilidade de dois segmentos de reta – no caso, os lados do retângulo áureo.

Finalizando, do levantamento realizado nesta etapa, levamos em conta:

- os resultados apresentados por Fischbein et al. (1995) e Sirotic (2004), que evidenciam falhas no tratamento do tema “incomensurabilidade de segmentos de reta” na matemática escolar e ressaltam a importância de seu estudo para a construção do significado de número irracional;
- as recomendações constantes dos documentos oficiais de referência curricular para a abordagem e desenvolvimento do conceito de “irracionalidade”;
- a escassez de pesquisas realizadas explicitamente sobre o tema “incomensurabilidade de segmentos de reta”,

e desenvolvemos nosso experimento com base na *hipótese de que*:

Uma seqüência didática sobre a seção áurea, cuja realização favoreça a articulação entre quadros distintos de conhecimentos, pode propiciar a compreensão/desenvolvimento da noção de “incomensurabilidade de segmentos de reta”.

CAPÍTULO 3

ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO

Feita a escolha do tema e delineado o problema de pesquisa, nosso propósito, ao elaborar este capítulo, é evidenciar a importante relação entre os conteúdos: *incomensurabilidade de grandezas e seção áurea de segmentos de reta* e, posteriormente, examinar formas de exploração desses conteúdos em nossa prática pedagógica.

Iniciamos então nosso estudo considerando algumas das noções que estão diretamente ligadas ao tema.

- **As grandezas**

A idéia de grandeza está presente na relação que se estabelece entre o homem e o mundo. Intuitivamente, a criança vai construindo um significado para essa noção, em situações rotineiras, como a escolha do doce maior, o chute dado com mais força...

No ambiente escolar, a construção, ainda intuitiva, da noção de grandeza pode ocorrer a partir de exemplos que envolvam conceitos matemáticos (segmentos, superfícies etc.), ou conceitos físicos (a massa de um objeto, a intensidade de uma força etc.), cujas representações materiais permitam estabelecer relações de comparação, equivalência, adições etc. Por exemplo, pela sobreposição de dois segmentos podemos verificar que têm o mesmo comprimento (equivalência), ou que um tem comprimento maior do que o outro

(comparação). A constatação de que um objeto pode ser substituído por outro sobre o prato de uma balança que se mantém em equilíbrio pode dar a idéia de que os dois objetos têm uma característica em comum, permitindo uma aproximação da noção de massa dos objetos.

Mas a formalização da idéia de massa de um objeto, como de qualquer outra grandeza, requer uma introdução de elementos importantes que ali estão envolvidos, como os objetos, a relação de equivalência e uma ordem correspondente a essa relação.

Não foram poucas as tentativas de definir a noção de grandeza. Bellemain e Lima (2002) apresentam resultados dessas tentativas, desde Euclides, observando que

tais conceitos [grandeza, quantidade, magnitude e outras palavras-chave relativas ao tema] revelaram-se, ao fim desse longo processo de evolução do pensamento científico, candidatos naturais a termos primitivos de um modelo abstrato. Noutros termos, as tentativas foram sempre de definir o indefinível (p. 76).

Os mesmos autores destacam a posição de Couturat¹⁶, que, tendo se dedicado ao estudo sobre grandezas, com vistas à formulação rigorosa desse conceito, concluiu que: “(...) a idéia de grandeza é, verdadeiramente, indefinível: é uma noção primitiva e irreduzível” (Couturat,¹⁷ 1980, p. 369, apud Bellemain e Lima, 2002, p. 84).

Bellemain e Lima (2002, p. 99-124) apresentam em seu trabalho uma abordagem axiomática do conceito de grandeza, com base nas propostas mais recentes a respeito desse tema. Entretanto, essa axiomática não será tratada aqui, pois extrapola os limites estabelecidos para nosso trabalho.

• Medida de uma grandeza

Medir uma grandeza é compará-la com outra grandeza da mesma espécie, fixada como padrão.

¹⁶ L. Couturat construiu um sistema de axiomas sobre grandezas, apresentado em *De l'infini mathématique*, 1973.

¹⁷ Couturat, L. *Les principes des mathématiques*, 1980.

A idéia de comparar duas grandezas pode significar, em alguns casos, dizer apenas qual é a maior, ou qual é a menor. Em matemática, isso muitas vezes não é suficiente, ou seja, pode ser necessário determinar quantas vezes uma grandeza, tomada como unidade de medida, “cabe” em outra grandeza da mesma espécie.

Há dois tipos básicos de grandezas: as *grandezas discretas* – um conjunto de lápis de cor, um cardume – e as *grandezas contínuas* – o comprimento, o peso, a distância, o tempo.

Efetua-se a comparação de uma *grandeza discreta* com a unidade por meio da contagem e o resultado que se obtém é da forma “ $n.u$ ”, em que “ n ” é sempre um número inteiro e “ u ” representa a unidade.

Por outro lado, comparar uma *grandeza contínua* com outra de mesma espécie, escolhida como unidade de medida, significa *medir* essa grandeza e a representação do resultado dessa operação é da forma: “ $n.u$ ”, em que:

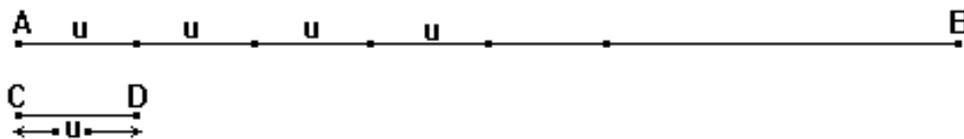
- “ n ” é um número que corresponde à quantidade de vezes que a grandeza tomada como unidade de medida “cabe” na grandeza que se deseja medir;
- “ u ” é a grandeza considerada unidade de medida.

Observamos aqui que no contexto dos objetos matemáticos o conjunto numérico adequado para a representação da medida de uma grandeza é o conjunto dos números reais, em que “ n ” pode ser racional ou irracional, como veremos mais adiante. Entretanto, no contexto dos objetos físicos, em virtude da precisão limitada dos instrumentos de medição, as medidas são aproximadas, e assim, em sua representação, “ n ” é um número racional.

• Medida de segmentos de reta

Dado um segmento de reta AB , escolhemos \overline{CD} de comprimento “ u ”, como unidade de medida. Se existe “ n ” inteiro, tal que “ u ” cabe n vezes em AB , como na figura 1, a seguir:

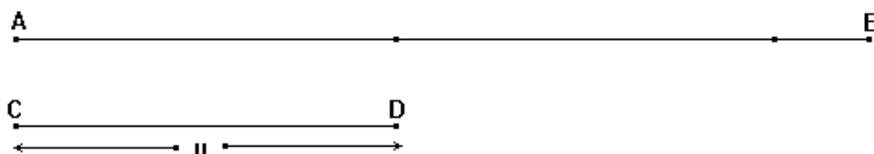
FIGURA 1 – AUXILIAR NA CONSTRUÇÃO DA NOÇÃO DE MEDIDA DE SEGMENTOS DE RETA (i)



então, \overline{AB} contém n vezes o segmento unitário \overline{CD} , ou contém “ n ” segmentos justapostos, congruentes a \overline{CD} . Nesse caso, $med(\overline{AB}) = n.u$, sendo “ u ” a unidade de medida.

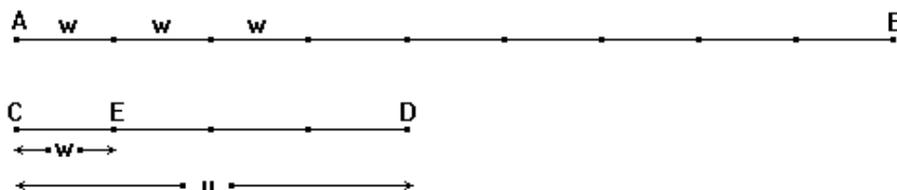
As situações em que “ u ” não cabe um número inteiro de vezes em AB são mais comuns. Por exemplo: queremos determinar a medida do segmento AB , tomando \overline{CD} como unidade de medida, sendo $med(\overline{CD}) = u$.

FIGURA 2 – AUXILIAR NA CONSTRUÇÃO DA NOÇÃO DE MEDIDA DE SEGMENTOS DE RETA (ii)



Neste caso, \overline{CD} não “cabe” um número inteiro de vezes em \overline{AB} , mas é possível subdividir \overline{AB} e \overline{CD} , como mostra a figura 3 a seguir:

FIGURA 3 – AUXILIAR NA CONSTRUÇÃO DA NOÇÃO DE MEDIDA DE SEGMENTOS DE RETA (iii)

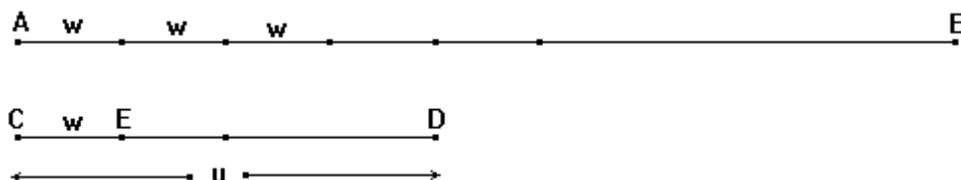


Como $med(\overline{CE}) = w$, temos $med(\overline{AB}) = 9.w$ e $med(\overline{CD}) = 4.w$, logo,

$$med(\overline{AB}) = \frac{9}{4}.u.$$

De forma geral, a medida de um segmento \overline{AB} , tomando \overline{CD} como unidade de medida, pode ser vista da seguinte forma:

FIGURA 4 – AUXILIAR NA CONSTRUÇÃO DA NOÇÃO DE MEDIDA DE SEGMENTOS DE RETA (iv)



De acordo com a figura 4, $med(\overline{CD}) = u$ e $med(\overline{CE}) = w$.

Se existem m e n inteiros positivos, tais que: $med(\overline{AB}) = n.w$ e $med(\overline{CD}) = m.w$, (ou $u = m.w$), temos: $med(\overline{AB}) = \frac{n}{m}.u$, sendo $\frac{n}{m}$ um número racional e “ u ”, a unidade de medida.

Neste último caso, \overline{CE} é submúltiplo comum de \overline{AB} e \overline{CD} , pois m e n são inteiros com $AB = n.CE$ e $CD = m.CE$.

Dizemos, então, que \overline{AB} e \overline{CD} são *segmentos comensuráveis*.

• Segmentos incomensuráveis

Dois segmentos quaisquer, PQ e RS , são incomensuráveis, se não existe um segmento XY , que seja submúltiplo comum de \overline{PQ} e \overline{RS} , ou seja, se não existem m e n inteiros, tais que: $PQ = m.XY$ e $RS = n.XY$.

• Identificação de segmentos incomensuráveis

O processo de divisões sucessivas, baseado no algoritmo de Euclides: $a = b.q + r$, nos permite determinar o máximo divisor comum de números inteiros. Se tomarmos como exemplo, os números 123 e 20, temos:

TABELA 1 – PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS PARA O CÁLCULO DO m.d.c. DE NÚMEROS NATURAIS

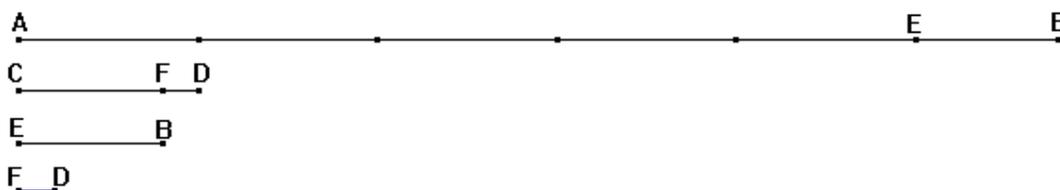
	6	6	1	2
123	20	3	2	1
3	2	1	0	

m.d.c. (123, 20) = 1 e dizemos que 123 e 20 são primos entre si.

O mesmo algoritmo, em sua variante para grandezas, permite a identificação de segmentos incomensuráveis. Na proposição 2, no livro X dos Elementos, Euclides trata dessa questão, dizendo: “Se quando a menor de duas grandezas distintas é continuamente subtraída da maior, a grandeza restante nunca divide aquela que a antecede, então, as grandezas são incomensuráveis”¹⁸ (HEATH, 1956, p. 17).

Considerando, como exemplo, os segmentos de reta: AB e CD , temos:

FIGURA 5 – PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS APLICADO A GRANDEZAS



¹⁸ Tradução nossa, do original em inglês.

TABELA 2 – PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS APLICADO A DUAS GRANDEZAS DADAS

	5	1	4
AB	CD	EB	FD
EB	FD	0	

Nesse caso, diz-se que os segmentos AB e CD são comensuráveis e FD é sua “maior medida comum”.

Por outro lado, podemos considerar dois segmentos PQ e RS , para os quais esse processo de divisões sucessivas apresenta restos cada vez menores, mas não nulos, prometendo um número infinito de passos. Se ainda assim, por menores que sejam esses restos, nenhum deles “cabe” um número inteiro de vezes no segmento anterior, então, de acordo com a proposição 2, do livro X, dos Elementos de Euclides, os dois segmentos considerados inicialmente são incomensuráveis.

Podemos, para esse caso, representar o algoritmo de Euclides da seguinte forma:

TABELA 3 - PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS APLICADO A DUAS GRANDEZAS QUAISQUER

	n_1	n_2	n_3
PQ	RS	TV	MN
TV	MN

A prova da incomensurabilidade dos segmentos PQ e RS , considerados no parágrafo anterior, pode ser construída a partir da suposição de que existe um segmento XY , que seja “medida comum” de \overline{PQ} e \overline{RS} .

Temos:

- a) XY é “medida comum” de PQ e RS , isto é, XY é submúltiplo comum de PQ e RS , então XY será submúltiplo também de TV , pois $TV = PQ - n_1 \cdot RS$;
- b) se XY é submúltiplo comum de RS e TV , pela mesma razão será submúltiplo também de MN ;
- c) por esse processo, obtemos como restos, segmentos cada vez menores, dos quais, XY será submúltiplo comum;
- d) por menor que seja, XY é fixo. Assim, se a divisão se prolongar indefinidamente, esse processo pode nos levar a um resto menor do que XY , e, utilizando os mesmos argumentos, provaremos que XY é submúltiplo também desse resto.

Isso é um absurdo e, então, concluímos que \overline{PQ} e \overline{RS} não possuem uma “medida comum”, isto é, \overline{PQ} e \overline{RS} são incomensuráveis.

• A descoberta dos segmentos incomensuráveis

A descoberta da existência de segmentos incomensuráveis (século V a.C.) perturbou a sociedade pitagórica, contrariando a crença de que tudo dependia dos números inteiros e de que duas grandezas quaisquer, de mesma espécie, sempre seriam comensuráveis.

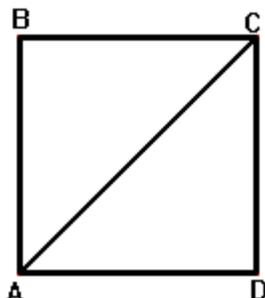
De acordo com a literatura que relata a história da matemática, há opiniões distintas a respeito da época e das circunstâncias em que ocorreu essa descoberta.

Boyer (1974, p. 54) afirma que é comum a suposição de que essa descoberta tenha ocorrido pela aplicação do teorema de Pitágoras a um triângulo retângulo isósceles. Essa idéia está presente na demonstração da incomensurabilidade de dois segmentos apresentada por Aristóteles (384-322 a.C.), que pode ser desenvolvida da seguinte forma:

Seja o quadrado ABCD da figura 6 a seguir:

FIGURA 6 – QUADRADO ABCD

PROVA 1 – INCOMENSURABILIDADE DE SEGMENTOS DE RETA



Hipótese: $\{ABCD \text{ é um quadrado}\}$

Tese: $\{\overline{AB} \text{ e } \overline{AC} \text{ são segmentos incomensuráveis}\}$

Demonstração:

a) Suponhamos que \overline{AB} e \overline{AC} são segmentos comensuráveis. Nesse caso, existe XY , tal que: $AB = m.XY$ e $AC = n.XY$, com m e n inteiros positivos.

b) Temos então: $\frac{AC}{AB} = \frac{n.XY}{m.XY} = \frac{n}{m}$. (i)

c) Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABC, retângulo em B, temos:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = AB^2 + AB^2 \Rightarrow AC^2 = 2.AB^2 \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \sqrt{2} \quad \text{(ii)}$$

d) De (i) e (ii), temos: $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$. (iii)

e) Suponhamos que $m.d.c.(m,n)=1$. Temos:

$$\text{de (iii): } 2 = \frac{n^2}{m^2} \Rightarrow n^2 = 2.m^2 \Rightarrow n^2 \text{ é par} \Rightarrow n \text{ é par.} \quad \text{(iv)}$$

f) n é par $\Rightarrow \exists z \in \mathbb{Z} / n = 2z$. Nesse caso, $n^2 = 4z^2$. (v)

g) $(n^2 = 2m^2$ (iv) e $n^2 = 4z^2$ (v)) $\Rightarrow 2m^2 = 4z^2 \Rightarrow m^2 = 2z^2 \Rightarrow m^2$ é par $\Rightarrow m$ é par. (vi)

h) De (iv) e (vi), m e n são pares, o que é absurdo, pois consideramos m e n primos entre si.

i) Esse absurdo é decorrente da suposição de que \overline{AC} e \overline{AB} são segmentos comensuráveis.

Assim, \overline{AC} e \overline{AB} são incomensuráveis.

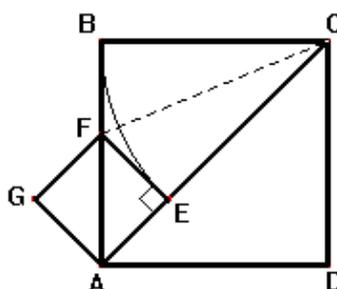
Por outro lado, Ávila (1984) comenta que, em virtude do alto grau de abstração requerido por essa demonstração, “muitos historiadores da Ciência acreditam que a descoberta dos incomensuráveis tenha ocorrido com um raciocínio mais concreto, como o argumento geométrico” (p. 10).

Os argumentos geométricos a que Ávila (1984) se refere foram utilizados no desenvolvimento da demonstração¹⁹ apresentada a seguir:

Consideramos o quadrado ABCD da figura 7:

FIGURA 7 – QUADRADO ABCD

PROVA 2 – INCOMENSURABILIDADE DE SEGMENTOS DE RETA



¹⁹ Algumas das obras que trazem essa demonstração, com pequenas variações: Boyer, *História da matemática*, p. 54; Eves, *Introdução à história da matemática*, p. 106; Heath, *The thirteen books of Euclid's elements*, livro X, p. 19; Katz, *A history of mathematics an introduction*, p. 80.

Hipótese: $\{ABCD \text{ é quadrado}\}$

Tese: $\{\overline{AB} \text{ e } \overline{AC} \text{ são incomensuráveis}\}$

Utilizamos aqui a notação: $med(\overline{AB}) = AB$.

Demonstração:

- a) Suponhamos que \overline{AB} e \overline{AC} sejam comensuráveis. Nesse caso, existe um XY , submúltiplo comum de AB e AC .
- b) Construindo o arco BE com centro em C e raio \overline{BC} , temos: $\overline{BC} \equiv \overline{EC}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{EC}$.
- c) Seja F em \overline{AB} , tal que \overline{EF} seja tangente ao arco BE no ponto $E \Rightarrow \overline{EF} \perp \overline{AC}$.
- d) Sabemos que $\triangle BCF \equiv \triangle CEF \Rightarrow \overline{BF} \equiv \overline{EF}$.
- e) $med(\widehat{AFE}) = med(\widehat{EAF}) = 45^\circ \Rightarrow \triangle AEF$ é isósceles e $\overline{EF} \equiv \overline{AE}$.
- f) Tomamos G , tal que $A EFG$ seja um quadrado.
- g) Temos: $AC = AE + EC \Rightarrow AC = AE + AB$ (i)
- h) Da mesma forma, $AB = AF + BF \Rightarrow AB = AF + AE$. (ii)
- i) Se XY é submúltiplo comum de AC e AB , então, de (i) concluímos que XY é submúltiplo de AE e, conseqüentemente, de (ii) concluímos que XY é submúltiplo de AF .
- j) Pelo item anterior, XY é submúltiplo comum de AE e AF , que são, respectivamente, lado e diagonal do quadrado $A EFG$.
- k) Repetindo o processo, poderíamos obter um terceiro quadrado, e provaríamos, usando os mesmos argumentos, que sua diagonal e seu lado têm XY como submúltiplo comum.

- l) Poderíamos, então, construir tantos quadrados quantos quiséssemos, e pelo mesmo processo realizado acima provaríamos que XY (fixo) é submúltiplo comum do lado e da diagonal de todos eles, por mais insignificantes que fossem suas dimensões.
- m) Ora, o segundo quadrado apresenta medidas reduzidas a menos da metade daquelas observadas no quadrado original. O terceiro quadrado teria dimensões reduzidas a menos da metade daquelas observadas no segundo quadrado e assim por diante. Se essas construções sucessivas podem nos levar a um quadrado de dimensões tão pequenas quanto desejarmos, é possível que como resultado de nossas construções tenhamos um quadrado, cujas dimensões sejam menores do que XY , e, ainda assim, poderemos provar, usando os mesmos argumentos, que XY é submúltiplo comum de seu lado e de sua diagonal.

Isso é um absurdo!

Chegamos a esse absurdo por havermos suposto a existência de XY , submúltiplo comum de AB e AC , ou seja, por havermos suposto \overline{AB} e \overline{AC} comensuráveis.

Logo, \overline{AB} e \overline{AC} são incomensuráveis.

Segundo Eves (2004), “por algum tempo, $\sqrt{2}$ foi o único número irracional conhecido”, mas, no mesmo texto, o autor acrescenta que “é possível que $\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$, que é a razão entre o lado e a diagonal de um pentágono regular, tenha sido o primeiro irracional conhecido” (p. 107). Essa incerteza a respeito da situação em que ocorreu a descoberta dos irracionais está clara nos dois textos a seguir, em que se observa que há outros modos pelos quais pode ter ocorrido a descoberta de segmentos incomensuráveis:

É possível que o primeiro par de segmentos incomensuráveis encontrado tenha sido o lado e a diagonal de um pentágono, pois essa figura era a favorita dos pitagóricos pelo fato de suas diagonais formarem um pentágono estrelado, o distintivo de sua sociedade. A prova disto, mais uma vez, é indireta [...], mas é mais geométrica e envolve uma forma intuitiva de argumento-limite. (Rossmeyssl e Webber, 1992, p. 55).

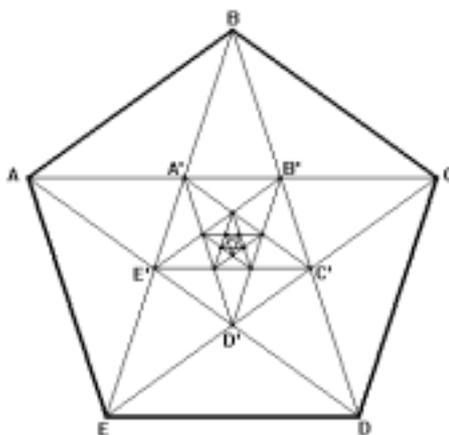
E ainda:

[...] a simples observação de que quando se traçam as cinco diagonais de um pentágono elas formam um pentágono regular menor [...] e as diagonais do segundo pentágono por sua vez formam um terceiro pentágono regular, que é ainda menor. Esse processo pode ser continuado indefinidamente, resultando em pentágonos tão pequenos quanto se queira e levando à conclusão de que a razão da diagonal para o lado num pentágono regular não é racional (Boyer, 1974, p. 54).

A incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um pentágono regular qualquer também é demonstrada de forma indireta, a partir dos infinitos pentágonos regulares que podem ser construídos no interior do pentágono original, conforme observamos a seguir:

FIGURA 8 – O PENTÁGONO REGULAR

DEMONSTRAÇÃO DA INCOMENSURABILIDADE DE SEGMENTOS



Vamos provar que a diagonal e o lado de um pentágono regular qualquer são segmentos incomensuráveis, em duas etapas, utilizando as notações: $med(\overline{AB}) = AB$ e $med(\widehat{ABC}) = \widehat{ABC}$.

Primeira parte:

Hipótese: $\{ABCDE$ é pentágono regular

Tese: $\{BC = A'C$

Demonstração:

a) $ABCDE$ é pentágono regular $\Rightarrow AB = BC = CD$ e $\hat{A}BC = \hat{B}CD = 108^\circ$
 $\Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle BCD$ (caso L.A.L. de congruência de triângulos).

b) De forma análoga, provamos que são congruentes os triângulos: $BCD, CDE, DEA, EAB \Rightarrow \hat{B}AA' = \hat{A}BA' = \hat{B}'\hat{B}C = \hat{B}C\hat{B}'$ (i)

c) $(AB=BC \text{ e } \hat{B}AA' = \hat{A}BA' = \hat{B}'\hat{B}C = \hat{B}C\hat{B}') \Rightarrow \triangle AA'B \equiv \triangle BB'C$ (caso A.L.A. de congruência de triângulos).

d) De forma análoga, provamos que são congruentes todos os triângulos: $AA'B, BB'C, CC'D, DD'E, EE'A \Rightarrow \hat{A}A'B \equiv \hat{B}B'C \equiv \hat{C}C'D \equiv \dots \Rightarrow \hat{E}'\hat{A}'B' \equiv \hat{A}'\hat{B}'C' \equiv \hat{B}'\hat{C}'D' \equiv \dots$

e) $\hat{E}'\hat{A}'B' = \hat{A}'\hat{B}'C' = \hat{B}'\hat{C}'D' = \dots = 108^\circ \Rightarrow \hat{B}A'B' = \hat{B}B'A' = 72^\circ \Rightarrow \hat{A}'\hat{B}B' = 36^\circ$. (ii)

f) Analogamente, provamos que $\hat{B}'\hat{C}C' = \hat{C}'\hat{D}D' = \hat{D}'\hat{E}E' = \dots = 36^\circ$ (iii)

g) $AA'B, BB'C, CC'D, \dots$ são triângulos congruentes $\Rightarrow BA' = BB' = CB' = CC' = \dots$ (iv)

h) de (iii) e (iv), concluímos que $A'BB', B'CC', C'DD', \dots$ são triângulos congruentes (caso LAL), logo, $A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = E'A'$ e $A'B'C'D'E'$ é pentágono regular.

i) De (i) e (ii), $\Rightarrow \hat{A}BA' = \hat{A}'\hat{B}B' = \hat{B}'\hat{B}C = 36^\circ \Rightarrow \hat{A}'\hat{B}C = 72^\circ$.

j) $\hat{B}A'B' = \hat{A}'\hat{B}C = 72^\circ \Rightarrow \triangle A'BC$ é isósceles de base $\overline{BA'}$ $\Rightarrow BC = A'C$. (v)

Segunda parte:

Hipótese: $\{ABCDE \text{ é pentágono regular}$

Tese: $\{a \text{ diagonal e o lado do pentágono } ABCDE \text{ são segmentos incomensuráveis}$

Demonstração:

- a) Suponhamos que \overline{BD} e \overline{ED} são comensuráveis. Nesse caso, existe XY , submúltiplo comum de BD e ED .
- b) Da primeira parte da demonstração, sabemos que $A'B'C'D'E'$ também é pentágono regular e que $BC = A'C$. Assim, podemos afirmar que $BC' = ED$.
- c) $\triangle BED \sim \triangle BE'C'$, pois seus ângulos são respectivamente congruentes. Nesse caso, os lados correspondentes são proporcionais: $\frac{BD}{BC'} = \frac{ED}{E'C'}$.
- d) Sendo $BC' = ED$, escrevemos: $\frac{BD}{ED} = \frac{ED}{E'C'} \Rightarrow E'C' = \frac{(ED)(ED)}{BD} \Rightarrow XY$ é submúltiplo também de $E'C'$ (pois foi suposto que XY é submúltiplo comum de ED e de BD). (vi)
- e) Por outro lado, $\triangle BE'C' \sim \triangle BA'B'$, pois os ângulos são respectivamente congruentes
- $$\Rightarrow \frac{E'C'}{A'B'} = \frac{BC'}{BB'} \Rightarrow \frac{E'C'}{A'B'} = \frac{ED}{ED - A'B'} \Rightarrow (E'C')(ED) - (E'C')(A'B') = (A'B')(ED) \Rightarrow$$
- $$\Rightarrow A'B' = \frac{(E'C')(ED)}{E'C' + ED}$$
- Assim, se XY é submúltiplo de $E'C'$ (por vi) e é submúltiplo de ED (suposto inicialmente), então, XY é submúltiplo também de $A'B'$. (vii)
- f) De (vi) e (vii), concluímos que XY é submúltiplo comum de $E'C'$ e $A'B'$, respectivamente diagonal e lado do pentágono regular $A'B'C'D'E'$.
- g) Os pontos de intersecção das diagonais do pentágono regular $A'B'C'D'E'$ são vértices de um terceiro pentágono regular, e, usando os mesmos argumentos, poderíamos provar que XY é submúltiplo comum de sua diagonal e seu lado.
- h) Os pontos de intersecção das diagonais desse terceiro pentágono regular também serão vértices de um novo pentágono regular, e o processo pode se repetir indefinidamente, resultando no traçado de pentágonos regulares cujas dimensões podem ser tão pequenas quanto desejarmos.

i) Assim, se admitimos, em princípio, que existe XY (fixo) submúltiplo comum do lado e da diagonal do primeiro pentágono, podemos provar que XY é submúltiplo comum do lado e da diagonal do segundo, do terceiro, do quarto... do enésimo e daquele pentágono regular, cujas dimensões são desprezíveis! Ou seja, podemos obter um pentágono cujas dimensões sejam menores do que XY , e ainda, usando os mesmos argumentos, podemos provar que XY é submúltiplo comum do lado e da diagonal desse pentágono.

Isso é um absurdo... e esse absurdo é resultado de havermos suposto que \overline{BD} e \overline{ED} , respectivamente, diagonal e lado do primeiro pentágono regular, são segmentos comensuráveis.

Assim, concluímos que *o lado e a diagonal de qualquer pentágono regular são segmentos incomensuráveis.*

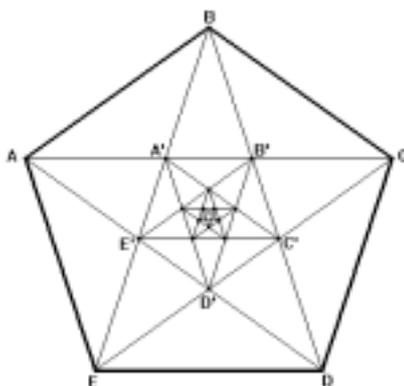
Uma outra característica notável na construção do pentágono regular foi citada por Boyer (1974):

[...] não é difícil ver que os pontos $A'B'C'D'E'$ dividem as diagonais de um modo notável. Cada um deles divide uma diagonal em dois segmentos desiguais, tais que a razão da diagonal toda para o maior é igual à deste para o menor. Essa subdivisão das diagonais é a bem conhecida "secção áurea" de um segmento (p. 37).

Tomando a mesma figura do pentágono regular:

FIGURA 9 – O PENTÁGONO REGULAR

RAZÃO ÁUREA: DIAGONAL/LADO



consideramos a diagonal \overline{AC} :

FIGURA 10 – DIAGONAL DO PENTÁGONO REGULAR



De acordo com Boyer (1974), o ponto A' , intersecção entre as diagonais \overline{BE} e \overline{AC} , divide \overline{AC} em dois segmentos distintos ($\overline{AA'}$ e $\overline{A'C}$), de tal forma que:

$$\frac{AC}{A'C} = \frac{A'C}{AA'}. \text{ (a razão entre } AC \text{ e } A'C \text{ é áurea).}$$

Mas já provamos que $BC = A'C$ (p. 53-54), então, podemos também concluir que no pentágono regular a razão entre AC (diagonal) e BC (lado) é áurea.

Mas que condições são necessárias para garantir a existência da razão áurea entre dois segmentos quaisquer?

Boyer (1974), na citação anterior, traz a definição de seção áurea da diagonal do pentágono regular, que aqui adotaremos, generalizando para um segmento qualquer \overline{AB} :

Definição: Um ponto C divide um segmento \overline{AB} em *seção áurea*,²⁰ ou em *média e extrema razão*,²¹ se sobre ele determina dois segmentos distintos, \overline{AC} e \overline{CB} , de tal forma que a razão entre o segmento AB e a parte maior seja igual à razão entre a parte maior e a parte menor.

Com o auxílio da figura 11, destacamos algumas das propriedades da “seção áurea” de um segmento de reta:

²⁰ Em 1509, Luca Pacioli escreveu o tratado *De divina proportione* que trata da seção áurea e foi ilustrado por Leonardo da Vinci. (Schenck e Selby, 1992, p. 44).

²¹ Kepler chamava a divisão de um segmento em média e extrema razão de “divina proporção” (Huntley, 1970, p. 37).

FIGURA 11 – SEÇÃO ÁUREA DO SEGMENTO AB



C divide \overline{AB} em média e extrema razão, ou, ainda, C ocupa a posição de ouro²² em \overline{AB} , se e somente se, $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$.

Na figura 11, $AB = a + b$, $AC = a$ e $CB = b$, com $b < a$. Logo, $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow a^2 = ab + b^2 \Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$.

Das raízes dessa equação: $a_1 = \frac{b \cdot (1 + \sqrt{5})}{2}$ e $a_2 = \frac{b \cdot (1 - \sqrt{5})}{2}$, interessamos para este estudo, a solução positiva, mas a divisão de um segmento de reta AB , em média e extrema razão resulta em duas soluções: a raiz positiva da equação, que é o ponto de ouro interno e a raiz negativa da equação, que é o ponto de ouro externo.²³

Assim, independentemente da medida do segmento AB da figura 11, sempre teremos: $\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Segundo Huntley (1970, p. 37), $\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ é conhecido como “razão áurea” entre os segmentos AB e AC da figura considerada.

Por sugestão do matemático americano Mark Barr, foi adotada a letra Φ (Phi)²⁴, para representar o número irracional $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, em homenagem ao escultor grego Phidias (490?-430?), pois foi observado que em suas obras há uma predileção por dimensões que atendem à razão áurea.

²² “Posição de ouro” é a expressão utilizada por Biembengut (1996), quando se refere à posição do ponto C sobre \overline{AB} , determinando a seção áurea desse segmento (p. 13).

²³ Ver Tahan, 1987, p. 240.

²⁴ Ver Ghyka, 1978, p. 29 e Biembengut, 1996, p. 18.

Na figura 11, \overline{AC} é o *segmento áureo* de \overline{AB} e \overline{CB} é o *complemento áureo* de \overline{AB} .

Assim, se a descoberta da existência de segmentos incomensuráveis ocorreu pela construção do pentágono regular, o primeiro número irracional conhecido foi $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Apresentamos a seguir três *propriedades do número Φ* que nos auxiliarão em demonstrações posteriores:

Primeira: Para se obter o inverso do número áureo, basta subtrair do mesmo, uma unidade: $\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$

Verificação:

$$\Phi - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}-2}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad (\text{i})$$

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot (1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2 \cdot (1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad (\text{ii})$$

de (i) e (ii) concluímos que $\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$

Segunda: Para elevarmos Φ ao quadrado, basta adicionar ao mesmo uma unidade: $\Phi^2 = \Phi + 1$

Pela primeira propriedade, temos:

$$\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi} \Rightarrow (\Phi - 1) \cdot (\Phi) = \left(\frac{1}{\Phi} \right) \cdot \Phi \Rightarrow \Phi^2 - \Phi = 1 \Rightarrow \Phi^2 = \Phi + 1.$$

Terceira: Subtraindo 2 de Φ^2 , obtém-se o inverso de Φ , ou seja,

$$\Phi^2 - 2 = \frac{1}{\Phi}.$$

$$\text{Justificativa: } \Phi^2 - 2 = (\Phi + 1) - 2 = \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}.$$

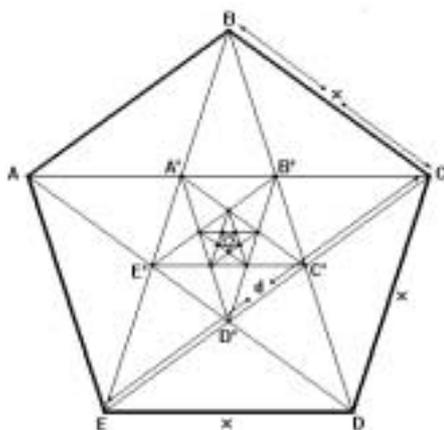
• A seção áurea no pentágono regular

Boyer (1974, p. 37) nos convida a observar que os pontos A' , B' , C' , D' e E' dividem as diagonais de um pentágono regular $ABCDE$ segundo a “seção áurea”. Assim, apresentamos a seguir, a prova de que: duas diagonais que não partem de um mesmo vértice de um pentágono regular se interceptam num ponto que é a seção áurea de cada uma delas.

Para isso, consideramos a figura 12 a seguir, em que “ x ” é o lado e “ d ” é a diagonal do pentágono regular:

FIGURA 12 – O PENTÁGONO REGULAR

DEMONSTRAÇÃO – RAZÃO ÁUREA: DIAGONAL/LADO



Hipótese: { $ABCDE$ é pentágono regular de lado “ x ” e diagonal “ d ”

Tese: { a razão entre a diagonal “ d ” e o lado “ x ” é áurea

Demonstração:

$$\text{a) } E' \hat{E} D' \equiv A' \hat{B} B' \Rightarrow \Delta B C' E \text{ é isósceles} \Rightarrow \overline{B C'} \equiv \overline{E C'} \quad (\text{i})$$

$$\text{b) } \Delta B C C' \text{ é isósceles de base } \overline{C C'} \text{ (p. 53-54)} \Rightarrow \overline{B C'} \equiv \overline{B C} \quad (\text{ii})$$

$$\text{c) De (i) e (ii), temos: } \overline{E C'} \equiv \overline{B C} \quad (\text{iii})$$

$$\text{d) } \overline{B C} = \overline{E C'} = x \text{ (lado do pentágono)}$$

e) Aplicando o teorema dos cossenos ao triângulo CDC' , temos:

$$CD^2 = (CC')^2 + (DC')^2 - 2.(CC')(DC').\cos(\widehat{D C' C})$$

$$x^2 = (d-x)^2 + (d-x)^2 - 2.(d-x)(d-x).\cos 108^\circ$$

$$x^2 = 2.(d-x)^2 - 2.(d-x)^2.\cos 108^\circ \quad (\text{iv})$$

f) Aplicando o teorema dos cossenos ao triângulo CDE , temos:

$$EC^2 = DC^2 + DE^2 - 2.(DC).(DE).\cos \widehat{E D C}$$

$$d^2 = x^2 + x^2 - 2.x.x.\cos 108^\circ \Rightarrow d^2 = 2.x^2 - 2.x^2.\cos 108^\circ \Rightarrow \cos 108^\circ = \frac{2x^2 - d^2}{2.x^2} \quad (\text{v})$$

g) Substituindo (v) em (iv), temos:

$$x^2 = 2.(d-x)^2 - 2.(d-x)^2 \cdot \left(\frac{2x^2 - d^2}{2x^2} \right) \Rightarrow x^2 = 2.(d-x)^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{2x^2 - d^2}{2x^2} \right) \right] \Rightarrow$$

$$x^2 = (d-x)^2 \cdot \frac{d^2}{x^2} \Rightarrow x^4 = (d-x)^2 \cdot d^2 \Rightarrow x^2 = (d-x)d \Rightarrow \frac{d}{x} = \frac{x}{d-x}$$

Logo, a razão entre “ d ” e “ x ” é áurea.

Assim, em todo pentágono regular, a razão entre a diagonal e o lado é áurea, ou seja, o lado é segmento áureo da diagonal.

Considerando ainda a figura 12, uma vez que $BC=EC'=BC'$, concluímos que C' é a seção áurea de \overline{BD} e \overline{EC} . Analogamente, podemos provar que em todo pentágono regular, o ponto de intersecção de duas diagonais, que não partem de um mesmo vértice do pentágono, determina a seção áurea de cada uma delas.

Do estudo realizado, a respeito do pentágono regular, que é um dos contextos em que pode ter ocorrido a descoberta da existência de segmentos incomensuráveis, destacamos três fatos que estão estreitamente relacionados:

- (I) a diagonal e o lado são segmentos incomensuráveis;
- (II) a razão entre a diagonal e o lado é áurea;
- (III) a razão áurea é um número irracional.

Para a compreensão e o desenvolvimento da noção de incomensurabilidade de segmentos de reta, no contexto da seção áurea de segmentos, o aluno deverá ser auxiliado por seus conhecimentos sobre medida de comprimento, conjuntos numéricos (representação, operações, aproximação), proporcionalidade, semelhança de figuras planas e por suas habilidades para a utilização de algumas técnicas, como o algoritmo de Euclides, a resolução de equações literais do 2º grau, as construções geométricas e para a elaboração de justificativas.

O processo de divisões sucessivas, em geral utilizado para o cálculo do máximo divisor comum de números inteiros, com base no algoritmo de Euclides, é instrumento auxiliar na construção da noção de segmentos comensuráveis e incomensuráveis. Trata-se de algoritmo desenvolvido no quadro numérico, que, para atender aos fins estabelecidos em nossa engenharia, é utilizado nos quadros geométrico e das grandezas. Estabelece-se aqui uma interação entre os quadros numérico, geométrico e das grandezas, tendo como elemento articulador o algoritmo de Euclides.

O estudo realizado evidencia a inter-relação entre os conteúdos: “incomensurabilidade de segmentos”, “razão áurea” e “números irracionais”, e se desenvolveu pela interação entre os quadros numérico, algébrico, geométrico e

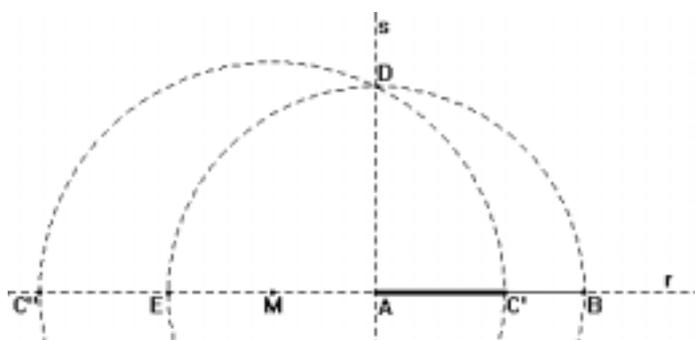
das grandezas. No contexto do pentágono regular, tanto a demonstração da incomensurabilidade da diagonal e do lado quanto a demonstração de que a razão entre esses mesmos segmentos é áurea só foram possíveis mediante os jogos de quadros.

Ao desenvolver esta engenharia, tivemos a intenção de criar condições para que, tendo compreendido a noção de incomensurabilidade de segmentos de reta, os participantes elaborassem justificativas para compor uma prova da incomensurabilidade dos lados do retângulo áureo. Com base em nosso estudo, presumimos que a relação estreita que se estabelece entre “incomensurabilidade de segmentos”, “razão áurea de um segmento” e “números irracionais” pode favorecer a utilização dos “jogos de quadros” como forma de alcançar esse propósito.

Complementamos, a seguir, o estudo da seção áurea, dando maior destaque para o retângulo áureo, cujas características e construção geométrica serão retomadas na apresentação das atividades que compõem a seqüência didática.

• A construção geométrica da seção áurea de um segmento de reta

FIGURA 13 – DIVISÃO DO SEGMENTO AB EM MÉDIA E EXTREMA RAZÃO

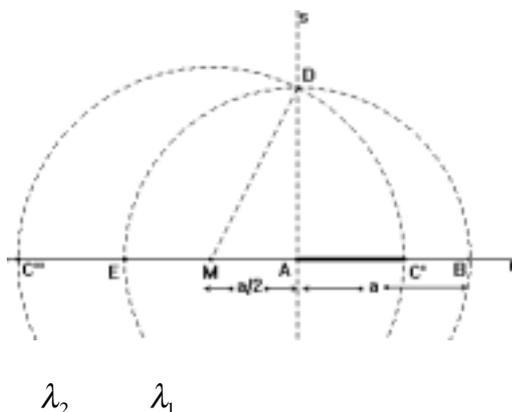


- Sendo dado o segmento AB , contido na reta r , traçamos um arco, com centro em A e raio \overline{AB} , interceptando a reta r , no ponto E .

- A seguir, pelo ponto A , traçamos uma reta s , perpendicular a r , interceptando o arco, no ponto D .
- Determinamos M ponto médio do segmento AE .
- Traçamos um arco, com centro em M e raio \overline{MD} , interceptando a reta r , nos pontos C' e C'' , como mostra a figura 13.
- Nesse caso, $\overline{AC'}$ é segmento áureo de \overline{AB} e $\overline{BC'}$ é complemento áureo de \overline{AB} e $\overline{AC''}$ é segmento áureo de $\overline{BC''}$ e \overline{AB} é complemento áureo de $\overline{BC''}$.

Justificativa

FIGURA 14 – AUXILIAR NA JUSTIFICATIVA – SEGMENTO ÁUREO



- Seja λ_1 o arco com centro em A e raio AB , que intercepta r no ponto E . Dessa forma, $AB = AD = AE$.
- Seja a , tal que $AB = AD = AE = a$.
- M é ponto médio de \overline{AE} , logo, $AM = \frac{a}{2}$.
- A reta s é perpendicular a r , no ponto A e intercepta λ_1 em D , logo, o triângulo ADM é retângulo em A .

e) Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ADM , temos:

$$DM^2 = AD^2 + AM^2, \text{ ou seja, } DM^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2. \text{ Assim, } DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

f) Seja λ_2 o arco com centro em M e raio \overline{DM} , que intercepta a reta r nos pontos

$$C' \text{ e } C''. \text{ Nesse caso, } MC' = MC'' = DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

g) Como $MC' = AC' + AM$, temos:

$$\frac{a\sqrt{5}}{2} = AC' + \frac{a}{2} \text{ e } AC' = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} = \frac{a(-1 + \sqrt{5})}{2} \text{ e, então,}$$

$$AC' = a \frac{1}{\Phi} \text{ e } AC' = AB \frac{1}{\Phi}, \text{ ou seja, } \overline{AC'} \text{ é segmento áureo de } \overline{AB}.$$

h) Por outro lado, $AC'' = AM + MC''$, ou $AC'' = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a(1 + \sqrt{5})}{2}$.

i) Considerando que $BC'' = BA + AM + MC''$, podemos escrever: $BC'' = a + \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$$\text{e ainda: } BC'' = a \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

j) Determinando a razão entre AC'' e BC'' , temos:

$$\frac{AC''}{BC''} = \frac{a \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)}{a \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{AC''}{BC''} = \frac{1}{\Phi} \Rightarrow AC'' = BC'' \cdot \frac{1}{\Phi}.$$

Logo, AC'' é segmento áureo de BC'' .

• A “autopropagação” da seção áurea

Uma propriedade importante observada na seção áurea é sua “autopropagação”.²⁵ Tomando um segmento AB , conforme mostra a figura 15, se o ponto C divide o segmento AB em média e extrema razão, tal que CB é o segmento maior, e, se marcarmos um ponto D sobre esse segmento maior, tal que $AC = DB$, teremos o segmento CB subdividido em média e extrema razão, pelo ponto D . Da mesma forma, se marcarmos os pontos E, F, G, H, \dots , tais que $CD = EB, DE = FB, \dots$, teremos segmentos cada vez menores, divididos em média e extrema razão, num processo de seção áurea de segmentos cada vez menores, que pode se repetir indefinidamente...

FIGURA 15 – “AUTOPROPAGAÇÃO” DA SEÇÃO ÁUREA DE UM SEGMENTO



Essa mesma propriedade de “autopropagação” da seção áurea pode ser observada na subdivisão infinita do retângulo áureo, cujo estudo faremos a seguir.

O retângulo áureo

O retângulo áureo apresenta medidas na razão de 1 para Φ ou de Φ para 1.

Se do retângulo $ABCD$ “retiramos” um quadrado $ABFE$, restando um outro retângulo $CDEF$, semelhante ao original, dizemos que $ABCD$ é um retângulo áureo.

²⁵ O termo “autopropagação” é usado por Boyer (1974), quando se refere ao processo iterativo de subdivisão de um segmento em média e extrema razão (p. 37).

FIGURA 16 – RETÂNGULO ÁUREO

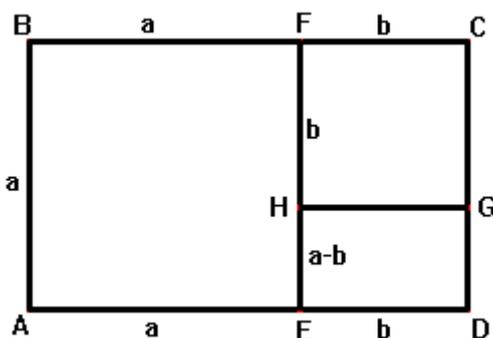


Na figura 16, se $ABCD \sim CDEF$, dizemos que $ABCD$ é retângulo áureo.

$$ABCD \sim CDEF \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$

Considerando agora o retângulo $CDEF$, de lados “ a ” e “ b ”, “retiramos” o quadrado $CFHG$, de lado “ b ”, obtendo o retângulo $DEHG$, como mostra a figura 17, a seguir:

FIGURA 17 – SUBDIVISÃO DO RETÂNGULO ÁUREO (I)



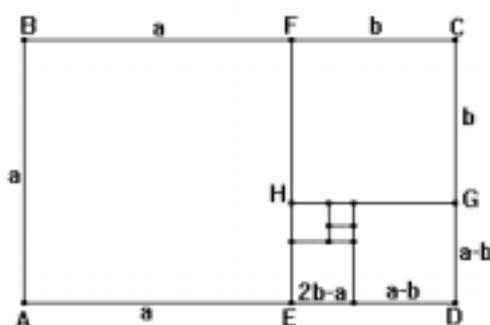
Podemos escrever:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{a-b}{(a+b)-a} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$$

Concluimos, então, que o retângulo $CDEF$ de lados a e b é semelhante ao retângulo $DEHG$, de lados b e $a-b$. Portanto, o retângulo $CDEF$ também é áureo.

A figura seguinte dá a idéia de que esse processo pode continuar indefinidamente:

FIGURA 18 – SUBDIVISÃO DO RETÂNGULO ÁUREO (II)



Dessa subdivisão resulta que são áureos os retângulos de lados:

$$a+b \text{ e } a$$

$$a \text{ e } b$$

$$b \text{ e } a-b$$

$$a-b \text{ e } 2b-a$$

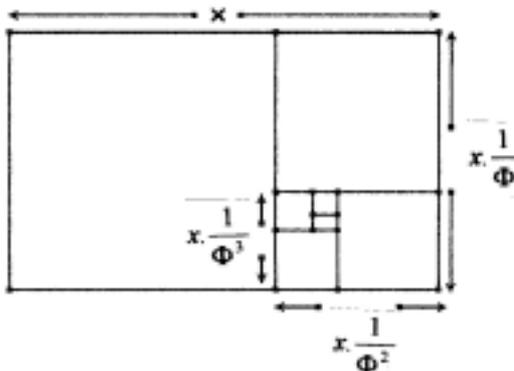
$$2b-a \text{ e } 2a-3b, \text{ etc.}$$

É possível, então, construir a seguinte seqüência: $a, b, a-b, 2b-a, 2a-3b, 5b-3a, 5a-8b, 13b-8a, \dots$, em que são considerados: $x_0 = a, x_1 = b, x_2 = a-b, x_3 = 2b-a, x_4 = 2a-3b, \dots$ etc., cujo termo geral é dado pela fórmula: $x_n = x_{n-2} - x_{n-1}$.

O processo que permitiu a construção dessa seqüência mostra que quaisquer dois termos consecutivos são os lados de um retângulo áureo, ou seja, há aqui uma seqüência infinita de retângulos áureos, cujas dimensões são cada vez menores, tendendo a zero.

Considerando que no retângulo áureo as medidas dos lados estão na razão de 1 para Φ ou de Φ para 1, a figura anterior (de número 18) pode se apresentar da seguinte forma:

FIGURA 19 – SUBDIVISÃO DO RETÂNGULO ÁUREO (III)



e a seqüência anterior passa a ser representada assim:

$$\left(x, x \cdot \frac{1}{\Phi}, x \cdot \frac{1}{\Phi^2}, x \cdot \frac{1}{\Phi^3}, x \cdot \frac{1}{\Phi^4} \dots, x \cdot \frac{1}{\Phi^n}, \dots \right),$$

que é uma progressão geométrica infinita de razão igual a $\frac{1}{\Phi}$.

A soma dos termos dessa seqüência, ou seja, a soma das medidas dos lados desses retângulos áureos será:

$$S = x \left(1 + \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi^3} + \frac{1}{\Phi^4} + \dots + \frac{1}{\Phi^n} + \dots \right), \text{ isto é,}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = x \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\Phi}} \right)$$

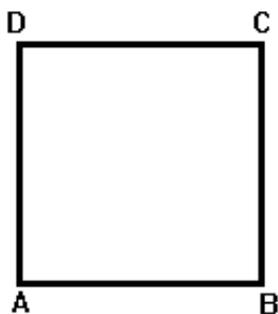
$$S = x \cdot \left(\frac{1}{\frac{\Phi - 1}{\Phi}} \right) \Rightarrow S = \frac{x \cdot \Phi}{\Phi - 1} \Rightarrow S = \frac{x \cdot \Phi}{1} \Rightarrow S = x \cdot \Phi^2$$

• **Construção do retângulo áureo com o auxílio de régua e compasso**

1.º processo – Dado o quadrado $ABCD$, o traçado do retângulo áureo é realizado de acordo com as orientações apresentadas a seguir:

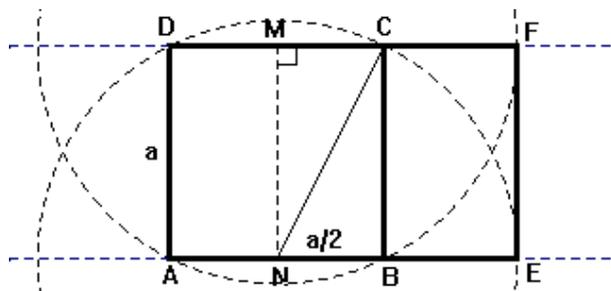
FIGURA 20 - QUADRADO ABCD

AUXILIAR NO TRAÇADO DO RETÂNGULO ÁUREO (1.º PROCESSO)



- Determinamos N ponto médio do lado AB .
- Determinamos M ponto médio do lado DC .
- Traçamos o segmento MN .
- Traçamos o arco DC , com centro em N e raio NC .
- Traçamos o arco AB , com centro em M e raio MB .
- Construimos a reta suporte de \overline{DC} , que intercepta o arco AB , no ponto F .
- Construimos a reta suporte de \overline{AB} , que intercepta o arco DC , no ponto E .
- Traçamos o segmento EF .
- O retângulo $AEFD$ é áureo.

FIGURA 21 – 1.º PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO ÁUREO



Justificativa

Seja a o lado do quadrado $ABCD$.

a) M e N são pontos médios de \overline{DC} e \overline{AB} , respectivamente, logo, $MC = \frac{a}{2}$.

b) O triângulo MNC é retângulo em M . Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$NC^2 = MN^2 + MC^2, \text{ ou, ainda,}$$

$$NC^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \text{ e, nesse caso, } NC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

c) Como $NE = NB + BE$ e $NC = NE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ (raios da circunferência com centro em N), temos:

$$\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{2} + BE, \text{ ou seja, } BE = a \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right).$$

d) Sendo $AE = AB + BE$, vem:

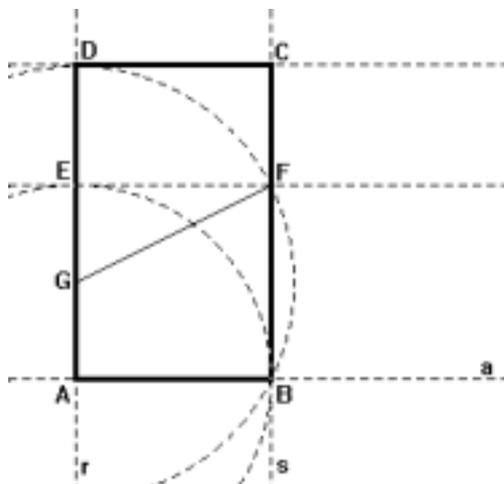
$$AE = a + a \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) = \frac{a + a\sqrt{5}}{2} = \frac{a(1 + \sqrt{5})}{2} = a \cdot \Phi.$$

e) Considerando que $AD = a$ e $AE = a \cdot \Phi$, concluímos que $AE = AD \cdot \Phi$ e o retângulo $ADFE$ é áureo.

2.º processo – Dado o lado menor \overline{AB} , a construção do retângulo áureo pode ser acompanhada pela observação da figura 22:

- Construimos um quadrado $ABFE$, de lado AB .
- Traçamos as retas r e s , suportes dos segmentos AE e BF , respectivamente.
- Seja G ponto médio do segmento AE . Traçamos o segmento GF .
- Construimos um arco com centro em G e raio GF , determinando o ponto D sobre a reta r , tal que E pertença a \overline{GD} .
- AD é o lado maior do retângulo desejado.
- Por D , traçamos uma reta perpendicular a r , interceptando s , no ponto C .
- O retângulo $ABCD$ é áureo.

FIGURA 22 – 2.º PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO ÁUREO



Justificativa

a) Por construção, temos: $AB = AE$.

b) Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo EFG , retângulo em E , temos:

$$FG^2 = GE^2 + EF^2, \text{ ou seja, } FG^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + AB^2 \text{ e } FG = \frac{AB\sqrt{5}}{2}.$$

c) O arco com centro em G e raio GF intercepta r , no ponto D , logo,

$$FG = GD = \frac{AB\sqrt{5}}{2}.$$

d) Sendo $GD = GE + ED$, temos: $\frac{AB\sqrt{5}}{2} = \frac{AB}{2} + ED$, ou seja, $ED = \frac{AB(\sqrt{5}-1)}{2}$, ou

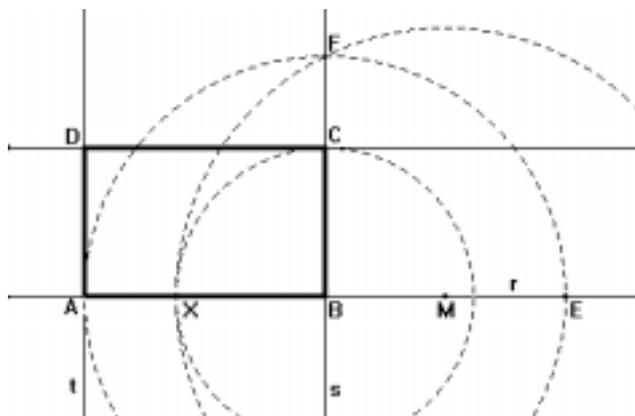
$$ED = \frac{1}{\Phi} AB \text{ e ainda, } ED = \frac{1}{\Phi} DC.$$

e) Nesse caso, o retângulo $CDEF$ é áureo e, conseqüentemente, $ABCD$ também é áureo.

3.º processo – Dado o lado maior \overline{AB}

- Traçamos a reta r , suporte do segmento AB .
- Por B , traçamos a reta s , perpendicular a r .
- Por A , traçamos a reta t , perpendicular a r .
- Determinamos o ponto X sobre \overline{AB} , tal que \overline{XB} seja segmento áureo de \overline{AB} (processo de construção do segmento áureo, p. 63 e ss).
- Traçamos um arco com centro em B e raio \overline{XB} , interceptando a reta s no ponto C .
- Pelo ponto C , traçamos uma paralela a r , interceptando t no ponto D .
- $ABCD$ é retângulo áureo.

FIGURA 23 – 3.º PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO ÁUREO



Justificativa

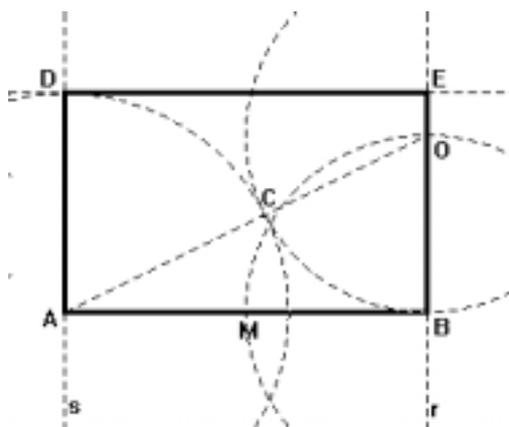
- a) Por construção, \overline{XB} é segmento áureo de \overline{AB} , ou seja, $XB = AB \cdot \frac{1}{\Phi}$.
- b) Como $BC = XB$, temos $BC = AB \cdot \frac{1}{\Phi}$. Logo, $ABCD$ é retângulo áureo.

4.º processo – Dado o lado maior \overline{AB} ,

- Por B , traçamos a reta r , perpendicular a \overline{AB} .
- Por A , traçamos a reta s , perpendicular a \overline{AB} .
- Seja M ponto médio de \overline{AB} .
- Traçamos um arco, com centro em B e raio \overline{BM} , interceptando r no ponto O .
- Traçamos o segmento AO .
- Construimos um arco, com centro em O e raio \overline{OB} , interceptando o segmento AO no ponto C .
- Construimos um arco, com centro em A e raio \overline{AC} , interceptando a reta s no ponto D .

- \overline{AD} será o lado menor do retângulo áureo desejado.
- Pelo ponto D , traçamos uma perpendicular a s , interceptando r no ponto E .
- O retângulo $ABED$ é áureo.

FIGURA 24 – 4.º PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO ÁUREO



Justificativa

- a) Seja $AB = a$. M é ponto médio de $AB \Rightarrow MB = \frac{a}{2}$.
- b) Por construção, $MB = BO = OC = \frac{a}{2}$, logo, $AO = \frac{a}{2} + AC$.
- c) O triângulo ABO é retângulo em B , pois r é perpendicular a \overline{AB} . Por Pitágoras, vem: $AO^2 = BO^2 + AB^2$, ou seja, $\left(AC + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2$, o que nos leva a concluir que $AC = a \cdot \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) = a \cdot \frac{1}{\Phi}$, ou ainda: $AC = AB \cdot \frac{1}{\Phi}$.
- d) Sendo $AC = AD$, temos: $AD = AB \cdot \frac{1}{\Phi}$. Logo, $ABED$ é retângulo áureo.

Fibonacci²⁶ e o retângulo áureo

Fibonacci utilizou como contexto um problema relacionado com a reprodução de coelhos,²⁷ para apresentar a seqüência de números inteiros positivos: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233..., em que cada elemento, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois elementos precedentes. De acordo

com demonstração apresentada por Ávila (1985, p. 13), $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1}}{f_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\Phi}$,

sendo f_n o termo geral da seqüência de Fibonacci.

A situação apresentada por Fibonacci, como estratégia de abordagem deste conteúdo, dá origem à seqüência que acabamos de mencionar, porém qualquer outra seqüência, cuja lei de formação seja $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$, com $n \geq 3$, nos levará também a um limite de $\frac{f_{n-1}}{f_n}$ igual a $\frac{1}{\Phi}$, quando $n \rightarrow \infty$.

Por exemplo, tomando aleatoriamente dois números inteiros: 5 e 21, temos: 5, 21, 26, 47, 73, 120, 193, 313, 506, 819, 1325... ou mesmo invertendo a ordem desses mesmos dois números, temos: 21, 5, 26, 31, 57, 88, 145, 233, 378, 611, 989, 1600, 2589..., quanto maior for o termo escolhido, na seqüência, tanto mais próximo de 0,618... estará o quociente entre esse número e o seu sucessor.

A lei de formação que caracteriza qualquer seqüência fibonacciana, ou seja, $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$, para $n \geq 3$, é a mesma que levaremos em conta, para a seqüência de retângulos, cuja construção comentamos a seguir, podendo ser acompanhada com o auxílio da figura 25.

Tomando dois quadrados quaisquer, que chamaremos de 1 e 2, vamos representar seus lados, por l_1 e l_2 , respectivamente.

Sendo adjacentes²⁸ esses quadrados, podemos traçar o primeiro retângulo, cujo lado maior mede $l_1 + l_2$ e cujo lado menor mede l_2 .

Construiremos, então, o quadrado 3, de lado l_3 , tal que $l_3 = l_2 + l_1$,

²⁶ Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci (filho de Bonaccio), viveu no período de aproximadamente 1170 a 1250. Publicou, em 1202, o *Liber Abaci*, livro que popularizou no Ocidente o uso dos algarismos arábicos e os métodos hindus de cálculo com números inteiros, frações e raízes (ver Ávila, 1985, p. 12).

²⁷ "Um casal de coelhos torna-se produtivo após dois meses de vida e, a partir de então, produz um novo casal a cada mês. Começando com um único casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais existirão ao final de um ano?" (Idem).

²⁸ Consideraremos, aqui, como *quadrados adjacentes* aqueles que apresentam um vértice comum e não têm pontos internos comuns. Além disso, o quadrado menor tem outro vértice contido em um dos lados do quadrado maior.

- S_1 , a seqüência formada pelos lados dos retângulos áureos resultantes da subdivisão infinita (p. 68): $a, b, a - b, 2b - a, 2a - 3b, 5b - 3a, 5a - 8b, 13b - 8a, \dots$, em que consideraremos: $x_0 = a, x_1 = b, x_2 = a - b, x_3 = 2b - a, x_4 = 2a - 3b$ etc., cujo termo geral é expresso por: $x_n = x_{n-2} - x_{n-1}$, com $n \geq 4$.
- S_2 , a seqüência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233..., com: $f_0 = f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 3, f_4 = 5 \dots$ ou seja, $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$, sendo $n \geq 4$.
- S_3 , a seqüência formada pelos lados dos quadrados construídos na figura 25, de tal forma que: $l_3 = l_2 + l_1, l_4 = l_3 + l_2, \dots, l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$, também com $n \geq 4$.

Nossa intenção é demonstrar que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{n-1}}{l_n} = \frac{1}{\Phi}$.

Para isso, provaremos, antes, que: $x_n = x_{n-2} - x_{n-1} = (-1)^n \cdot (l_{n-2} \cdot a - l_{n-1} \cdot b)$ (I), com $n \geq 4$ estabelecendo uma relação entre a lei de formação da seqüência S_1 (lados dos retângulos áureos) e a lei de formação da seqüência S_3 (lados dos quadrados).

A relação (I) é válida, para a seqüência de Fibonacci, para qualquer $n \leq 4$, ou seja,

$$\text{quando } n=2, \text{ temos: } x_2 = x_0 - x_1 = (-1)^2 \cdot (f_0 a - f_1 b) = a - b,$$

$$\text{quando } n=3, \text{ temos: } x_3 = x_1 - x_2 = (-1)^3 \cdot (f_1 a - f_2 b) = 2b - a \text{ e}$$

$$\text{quando } n=4, \text{ temos: } x_4 = x_2 - x_3 = (-1)^4 \cdot (f_2 \cdot a - f_3 \cdot b) = 2a - 3b.$$

Uma vez que a seqüência de quadrados construídos na fig. 25 (S_3) tem a mesma lei de formação da seqüência de Fibonacci (S_2), podemos afirmar que a relação (I) é verdadeira também para S_3 , isto é,

$$x_n = x_{n-2} - x_{n-1} = (-1)^n \cdot (l_{n-2} \cdot a - l_{n-1} \cdot b)$$

vale para qualquer n , tal que $n \leq 4$.

Tendo como hipótese de indução: $x_k = (-1)^k \cdot (l_{k-2} \cdot a - l_{k-1} \cdot b)$, com $4 \leq n \leq k$, devemos provar que essa lei de formação vale também para $n=k+1$.

Vejamos:

Partindo de $x_{k+1} = x_{k-1} - x_k$, e aplicando a hipótese de indução, para os termos x_{k-1} e x_k , temos:

$$x_{k+1} = (-1)^{k-1} \cdot (l_{k-3} \cdot a - l_{k-2} \cdot b) - (-1)^k \cdot (l_{k-2} \cdot a - l_{k-1} \cdot b).$$

Colocando $(-1)^{k+1}$ em evidência, temos:

$$x_{k+1} = (-1)^{k+1} \cdot [(-1)^{-2} \cdot (l_{k-3} \cdot a - l_{k-2} \cdot b) - (-1)^{-1} \cdot (l_{k-2} \cdot a - l_{k-1} \cdot b)] =$$

$$x_{k+1} = (-1)^{k+1} \cdot [(+1)(l_{k-3} \cdot a - l_{k-2} \cdot b) - (-1)(l_{k-2} \cdot a - l_{k-1} \cdot b)] =$$

$$x_{k+1} = (-1)^{k+1} [l_{k-3} \cdot a - l_{k-2} \cdot b + l_{k-2} \cdot a - l_{k-1} \cdot b] =$$

$$x_{k+1} = (-1)^{k+1} [(l_{k-3} + l_{k-2}) \cdot a - (l_{k-2} + l_{k-1}) \cdot b] =$$

$$x_{k+1} = (-1)^{k+1} \cdot [l_{k-1} \cdot a - l_k \cdot b], \text{ que corresponde a escrever:}$$

$$x_n = (-1)^n \cdot (l_{n-2} \cdot a - l_{n-1} \cdot b).$$

Logo, essa relação vale também para qualquer $n \geq 4$.

Sabemos que na seqüência S_1 , as medidas dos lados dos retângulos áureos tendem a zero, quando n tende ao infinito. Então, dizer que: $x_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, é o mesmo que dizer: $(l_{n-2} \cdot a - l_{n-1} \cdot b) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (l_{n-2} \cdot a - l_{n-1} \cdot b) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (l_{n-2} \cdot a) - \lim_{n \rightarrow \infty} (l_{n-1} \cdot b) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (l_{n-2} \cdot a) = \lim_{n \rightarrow \infty} (l_{n-1} \cdot b).$$

Dividindo os dois membros da igualdade por: $\lim_{n \rightarrow \infty} (l_{n-1} \cdot a)$ (não nulo),

temos:

$$\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (l_{n-2} \cdot a)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (l_{n-1} \cdot a)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (l_{n-1} \cdot b)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (l_{n-1} \cdot a)}, \text{ ou seja, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{l_{n-2} \cdot a}{l_{n-1} \cdot a} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{l_{n-1} \cdot b}{l_{n-1} \cdot a} \right) \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{l_{n-2}}{l_{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{a} \right)$$

como $\frac{b}{a}$ é constante, temos: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{l_{n-2}}{l_{n-1}} \right) = \frac{b}{a}$, que pode ser escrito da forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{l_{n-1}}{l_n} \right) = \frac{b}{a} = \frac{1}{\Phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Fica provado assim que, na medida em que acrescentamos quadrados de lado l_n à figura 25, de tal forma que $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$, os retângulos obtidos terão dimensões cada vez mais próximas daquelas apresentadas por um retângulo áureo.

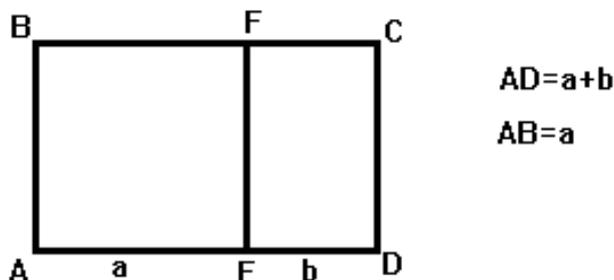
Os lados do retângulo áureo são segmentos incomensuráveis

Vamos provar a incomensurabilidade dos lados do retângulo áureo, apresentando duas justificativas:

O argumento algébrico

Seja o retângulo áureo $ABCD$:

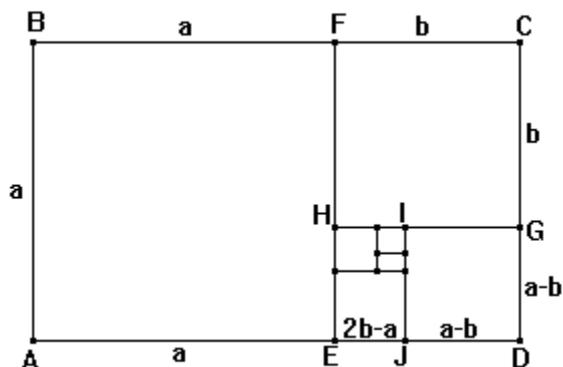
FIGURA 26 – AUXILIAR NA JUSTIFICATIVA DA
INCOMENSURABILIDADE DOS LADOS DO RETÂNGULO ÁUREO (i)



a) Suponhamos que \overline{AD} e \overline{AB} são comensuráveis. Nesse caso, existe XY , submúltiplo comum de AB e AD , tal que $AD = (a+b)(XY)$ e $AB = (a)(XY)$, sendo a e b inteiros positivos.

b) Na figura 27, a seguir,

FIGURA 27 – AUXILIAR NA JUSTIFICATIVA DA
INCOMENSURABILIDADE DOS LADOS DO RETÂNGULO ÁUREO (ii)



temos $AD = AE + ED$ ou $AD = AB + ED$ e XY é submúltiplo comum de AB e AD , então, XY é submúltiplo também de ED .

c) Da mesma forma, $CD = CG + GD$, ou seja, $AB = ED + GD$. Como XY é submúltiplo de AB e ED , então, XY é também submúltiplo de GD . Neste caso, podemos escrever $GD = (a-b)(XY)$ e $(a-b)$ é um número inteiro positivo.

b) Por construção, $AF = AB$ e $AE = AD$ e, então, XY deve ser submúltiplo comum também de AE e AF .

c) Construindo o segmento EF , seja G o ponto de intersecção entre \overline{DC} e \overline{EF} .

d) Temos então, os triângulos AFE e DFG , retângulos, tais que: $\triangle AFE \sim \triangle DFG$.

Então, $\frac{AF}{DF} = \frac{AE}{DG}$ ou seja, $\frac{AB}{AB-AD} = \frac{AD}{DG}$ e, ainda, $DG = \frac{(AB-AD)(AD)}{AB}$.

e) Se XY é submúltiplo comum de AB e AD , e $DG = \frac{(AB-AD)(AD)}{AB}$, então, XY é submúltiplo também de DG . (i)

f) ($FD = AF - AD$ e $AF = AB$) \Rightarrow $FD = AB - AD$.

g) Se XY é submúltiplo comum de AB e AD , e $FD = AB - AD$, então, XY é submúltiplo também de FD . (ii)

h) De (i) e (ii), concluímos que XY é submúltiplo comum de DG e FD , que são, respectivamente, base e altura do triângulo DFG .

i) Se traçarmos um arco com centro em D e raio DG , obteremos um triângulo menor, semelhante aos triângulos AFE e DFG , e, utilizando os mesmos argumentos, provaremos que XY é submúltiplo comum de sua base e altura.

j) O triângulo DFG apresenta medidas reduzidas a menos da metade daquelas observadas no triângulo AFE e, se repetirmos o processo indefinidamente, poderemos obter triângulos semelhantes a esses, com dimensões muito pequenas, tão pequenas quanto desejarmos, tendo ainda XY como submúltiplo comum da base e da altura. É possível, então, obter um triângulo cujas dimensões sejam menores do que XY , e, utilizando os mesmos argumentos, podemos provar que XY é submúltiplo comum de sua base e de sua altura.

Chegamos, então, a um absurdo, fruto de havermos suposto a existência de um XY , submúltiplo comum de AD e AB .

Logo, \overline{AD} e \overline{AB} são incomensuráveis.

Observamos, então, que os três elementos destacados anteriormente no estudo do pentágono regular (seção áurea de segmentos de reta, incomensurabilidade de segmentos de reta e números irracionais) podem ser explorados, tendo como contexto o retângulo áureo, pois,

- os lados do retângulo áureo são segmentos incomensuráveis;
- a razão entre o lado maior e o menor é áurea;
- a razão áurea é um número irracional.

CAPÍTULO 4

O PRÉ-TESTE

A fim de completar os dados necessários para a elaboração da seqüência didática, foi elaborado um pré-teste composto de três questões que contemplam de forma geral os tópicos que constituem o tema de nossa pesquisa: seção áurea de um segmento e incomensurabilidade de segmentos de reta.

Nosso propósito foi verificar os conhecimentos dos futuros professores, participantes de nosso experimento, a respeito dos conteúdos “seção áurea de um segmento” e “incomensurabilidade de segmentos de reta”, para estabelecer um ponto de partida para a elaboração da seqüência, ou seja, desejávamos definir alguns parâmetros, a partir dos quais teríamos condições de avaliar os sinais de progresso durante o desenvolvimento da seqüência didática.

4.1. As questões do pré-teste

Apresentamos a seguir as questões do pré-teste, justificando nossas escolhas e relacionando as competências necessárias para seu desenvolvimento.

Questão 1 – Você sabe o que é seção áurea de um segmento de reta?

Em caso afirmativo, que condições devem ser satisfeitas, para que um ponto P seja considerado seção áurea de um segmento AB Qualquer?

Dê um exemplo.

Ao propor esta questão, tínhamos a intenção de verificar que conhecimento os estudantes possuíam a respeito da seção áurea de um segmento de reta e se poderiam apontar as condições necessárias para que um ponto determinasse a seção áurea de um segmento.

Escolhemos enunciar a questão 1 de forma ampla para dar aos participantes a liberdade de elaborar definições e exemplos que pudessem envolver tanto o quadro geométrico quanto o algébrico ou numérico.

Questão 2 – Defina segmentos comensuráveis e segmentos incomensuráveis. Dê exemplos.

Propondo esta questão, queríamos constatar se os estudantes já haviam construído a noção de incomensurabilidade de grandezas, mais especificamente incomensurabilidade de segmentos de reta. Uma vez que nossa intenção era criar condições para que os estudantes pudessem verificar que os lados do retângulo áureo são segmentos incomensuráveis, essa informação seria importante para que pudessemos fazer as adequações necessárias, caso fosse constatada a ausência desse conhecimento.

A questão proposta solicita definição e exemplos de segmentos comensuráveis e incomensuráveis, e para elaborar uma resposta o estudante pode recorrer a alguns conhecimentos prévios nos quadros geométrico, numérico, algébrico e das grandezas, envolvendo:

- figuras geométricas (segmentos de reta);
- medida e unidade de medida;
- comprimento de segmentos de reta;
- múltiplos e submúltiplos;
- números racionais e irracionais;

Questão 3 – Qual é a relação entre seção áurea e incomensurabilidade de segmentos de reta?

Nosso intuito, ao colocar esta questão, foi averiguar se os participantes que já haviam construído as noções de incomensurabilidade de segmentos e seção áurea poderiam estabelecer alguma relação entre os dois conteúdos, ou seja, se já tinham conhecimento de que a seção áurea de um segmento determina sobre ele dois segmentos incomensuráveis.

4.2. Aplicação do pré-teste

O pré-teste foi aplicado a um grupo de nove estudantes do Curso de Licenciatura, em instituição particular de ensino superior localizada na capital de São Paulo. Teve a duração de 15 minutos e foi respondido individualmente.

Antes da aplicação, esclarecemos que a finalidade do pré-teste era estabelecer um ponto de partida para o desenvolvimento de uma seqüência de atividades, ou seja, as respostas nos dariam elementos para avaliar seus avanços na construção de alguns conhecimentos, durante a realização das atividades.

Esclarecemos ainda que, após o término da aplicação da seqüência, deveríamos avaliar em conjunto se este trabalho é adequado e suficiente para a construção dos conhecimentos em questão. Seria uma oportunidade para refletir a respeito das modificações consideradas necessárias para que a seqüência produzisse efeitos mais satisfatórios.

4.3. O pré-teste como auxiliar na elaboração da seqüência didática

Em resposta à *questão 1* (conhecimentos sobre a seção áurea de um segmento), cinco estudantes mostraram desconhecer a noção de seção áurea de um segmento, dizendo não saber sua definição ou apenas deixando em branco. Dois estudantes afirmaram ter ouvido falar no assunto, mas não saberiam explicitar algo a respeito. As respostas dos dois restantes demonstraram que algum trabalho sobre a seção áurea de segmentos já havia sido desenvolvido anteriormente. Fizeram menção à existência de condições a serem satisfeitas para que ocorra a seção áurea de um segmento, porém não tinham conhecimento

ou lembrança dessas condições. Os protocolos da figura 29 nos mostram essas duas respostas:

FIGURA 29 – PROTOCOLOS DE EXPERIMENTAÇÃO – QUESTÃO 1 – PRÉ-TESTE

Não sei se está enganada, mas o que me lembro é que a hipótese é que é um trecho no segmento AB que pode ser encontrada obedecendo as condições que não me lembro quais são.
 Quanto a $\frac{1}{2}$ ser considerado hipótese é verdadeira, eu imaginava que um ponto não era considerado, mas sim um trecho do segmento.

Não. Criei que o ponto P deve estar a uma distância d de A no segmento AB para que AP, PB tenham segmentos áureos. O lado do pentágono regular é segmento áureo de sua diagonal.

Quanto à questão 2 (conhecimentos sobre a incomensurabilidade de segmentos de reta), quatro participantes definiram segmentos comensuráveis como segmentos que podem ser medidos, e segmentos incomensuráveis, com a negação dessa afirmação. Suas definições apresentam pequenas variações dos excertos que mostramos a seguir:

FIGURA 30 – PROTOCOLOS DE EXPERIMENTAÇÃO – QUESTÃO 2 – PRÉ-TESTE

O termo comensurável acredito que se trata de algo se pode medir e incomensurável não se pode. Não sei o que é segmentos comensurável e incomensurável. Para ser incomensurável, mas minha cabeça, só se for infinito, mas estamos falando de segmento e não de reta.

Segmentos comensuráveis: são aqueles que podem ser medidos por exemplo: \overline{AB} se houver um u (unidade) que caiba em \overline{AB} , o segmento é comensurável. Por exemplo $\frac{1}{2}$, $u = \frac{1}{2}$ (um dos possíveis valores de u)
 Segmentos incomensuráveis: são os segmentos que não pode ser medido, por exemplo: $\overline{AB} = \sqrt{2}$, não há nenhum valor de u que caiba certo em $\sqrt{2}$

O segundo protocolo exibido na figura 30 revela que o estudante estabelece uma relação entre segmentos incomensuráveis e números irracionais, mas a definição apresentada demonstra que esse conhecimento ainda não foi construído.

Dois participantes se referiram a uma relação entre as medidas dos segmentos comensuráveis, porém não especificaram qual é essa relação. Um deles apresentou a definição: “Nos segmentos comensuráveis existe uma relação de medidas e nos segmentos incomensuráveis não existe”.

Um dos participantes deixou esta questão em branco, e os outros dois apresentaram respostas indicando que deve ter havido anteriormente algum trabalho sobre incomensurabilidade de segmentos de reta, conforme mostram os protocolos exibidos na figura 31.

FIGURA 31 – OUTROS PROTOCOLOS DE EXPERIMENTAÇÃO – QUESTÃO 2 – PRÉ-TESTE

Segmentos comensuráveis:
Admitem \exists de um sub-múltiplo comum.

Segmentos incomensuráveis:
Não admitem sub-múltiplo comum.

Segmentos comensuráveis: são segmentos que podem ser medidos através de uma unidade e qualquer e seus múltiplos e submúltiplos. Exemplo: medir a largura de um terreno: 4,53 m. (m=metro, unidade)

Segmentos incomensuráveis: são segmentos que não podem ser medidos por uma unidade qualquer com seus respectivos múltiplos e submúltiplos. Exemplo: $\sqrt{2}$ possui infinitas casas decimais.

Quanto à *questão 3*, ou os estudantes responderam que não sabiam, ou deixaram em branco, demonstrando desconhecer a relação entre seção áurea de um segmento e incomensurabilidade de segmentos de reta.

As respostas apresentadas às questões do pré-teste indicaram que, mesmo àqueles que já haviam tido algum contato com os conteúdos seção áurea de um segmento e/ou incomensurabilidade de segmentos de reta, deveríamos propor uma seqüência didática com abordagem mais de construção do que de aprofundamento dessas noções, a fim de atingir o objetivo que havíamos proposto para nosso trabalho.

CAPÍTULO 5

A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

5.1. Uma visão geral

Neste tópico, expomos uma síntese do que pretendíamos com a realização da seqüência como um todo – uma visão geral do trabalho que tínhamos intenção de desenvolver. Em seguida, apresentaremos, em separado, a análise *a priori*, o relato da experimentação e a análise *a posteriori* de cada atividade.

Com a finalidade de motivar o grupo de estudantes, escolhemos orientar nossa seqüência didática a partir da observação do Partenon – templo grego, construído no século V a.C. – que, de acordo com Strickland (2003), foi considerado “o símbolo máximo do refinamento arquitetônico” apresentando as proporções matemáticas ideais, perfeitas, como um exemplo de “equilíbrio entre arquitetura e escultura” (p. 13).

Para isso, nos fundamentamos em Huntley (1970, p. 63), que em seu ensaio sobre a beleza na matemática afirma que, quando a fachada do Partenon ainda estava intacta, seria possível encaixá-la em um retângulo áureo imaginário.

Na *atividade 1*, os participantes deveriam perceber que o quociente entre a medida do lado maior e a medida do lado menor do retângulo imaginário que “contém” a fachada do Partenon é igual ao quociente entre as medidas de determinadas partes do corpo humano.

Para a observação das medidas do rosto, por exemplo, destacamos o retrato de Isabel d'Este²⁹, pintado por Leonardo da Vinci (1452-1519) e uma foto de Maria Müller,³⁰ com 103 anos de idade, para que o estudante considerasse a possibilidade de existência das mesmas proporções tanto na arte quanto em pessoas que não apresentam beleza significativa.

O material que seria utilizado para o desenvolvimento desta atividade, incluindo calculadora e instrumentos comuns de medida, forneceria valores aproximados. Consideramos esta parte da seqüência apenas introdutória, pois nossa intenção era de que a freqüência do número 1,6 (aproximado) fosse observada pelos participantes, em questões internas da matemática, na medida em que as demais atividades fossem realizadas.

Assim, ao propormos as *atividades 2 a 4*, desejávamos que o estudante mudasse o foco de sua atenção, da arte para a matemática, e percebesse que também nesta última o número 1,6 (aproximado) aparece com freqüência considerável.

Ao final da *atividade 4*, o estudante saberia que a razão entre o lado maior e o lado menor de um retângulo áureo é de aproximadamente 1,6 e que é possível subdividi-lo infinitamente, obtendo a cada etapa dessa subdivisão um quadrado e um retângulo menor semelhante ao anterior.

O conhecimento dessas características deveria, então, auxiliar o estudante no desenvolvimento da *atividade 5*, em que é dado um retângulo áureo e solicita-se a razão entre o lado maior e o lado menor, sem aproximação. Nessa atividade, o problema é proposto no quadro geométrico, a figura apresentada no enunciado não traz medidas, o estudante não tem instrumentos de medir à sua disposição e a solicitação feita no enunciado exige um resultado numérico. Essa aparente ausência de dados suficientes deveria, então, provocar um impasse. Esperávamos, assim, que o estudante percebesse a necessidade de buscar em

²⁹ Em seu estudo sobre a vida de Leonardo da Vinci, Bérence (1974) relata fatos que podem ser a indicação de que o retrato de Isabel d'Este tenha sido pintado por Boltraffio, auxiliar de Leonardo da Vinci (ver p. 142, 147 e 148).

³⁰ Maria Müller, professora, foi homenageada em artigo publicado no *Jornal do MEC*, n. 14, out. 2001.

outro quadro de conhecimentos os recursos necessários para obter o resultado pedido.

A solução numérica seria obtida a partir da semelhança dos retângulos formados pela subdivisão do retângulo áureo (quadro geométrico). A partir daí, construindo a proporção formada pelos lados correspondentes dos retângulos, o estudante deveria obter uma equação (quadro algébrico), cuja solução é o número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ pedido no enunciado (quadro numérico).

É importante ressaltar que, tendo como objeto de estudo o “retângulo áureo”, cujos lados são segmentos incomensuráveis, nossa intenção ao solicitar do estudante o cálculo da razão entre os lados desse retângulo era de que, ao final, ele percebesse que esse resultado é um número irracional.

Dessa forma, o estudante acrescentaria às suas informações sobre o retângulo áureo o fato de que a razão entre seu lado maior e seu lado menor é o número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, cuja representação decimal com aproximação de milésimos é 1,618...

Propondo a *atividade 6*, solicitamos dos estudantes a construção do retângulo áureo, apenas com o auxílio de material sem graduação.

As discussões em grupo a respeito dessa construção seriam importantes para auxiliar os participantes na organização e formulação de idéias sobre a possibilidade ou não da construção do retângulo áureo, com base nos dados levantados nas atividades anteriores.

Esse processo deveria ser complementado com a elaboração de um texto, contendo as estratégias utilizadas para a realização da atividade.

Com o desenvolvimento da *atividade 7* o estudante teria oportunidade de experimentar a construção da mesma figura, utilizando uma estratégia que não foi elaborada por ele. Nossa intenção era de que todos tivessem em mãos os mesmos dados para elaborar uma justificativa de que a figura construída representa um retângulo áureo.

Seria, então, necessário que o estudante recorresse a conhecimentos construídos nos quadros algébrico e numérico para o desenvolvimento de uma justificativa em resposta ao problema proposto no quadro geométrico, ocorrendo, assim, uma interação entre esses quadros de conhecimentos.

Consideramos este momento oportuno para a *institucionalização* da noção de retângulo áureo.

Tendo conduzido o estudante da observação da arte para a construção da noção de retângulo áureo, a etapa que, segundo nossos objetivos iniciais, deveria completar a seqüência – a prova da incomensurabilidade dos lados do retângulo áureo – exigiria um passo intermediário, que seria uma abordagem da noção de incomensurabilidade de segmentos de reta.

Elaboramos, assim, a *atividade 8*, com base no algoritmo de Euclides, bastante conhecido e utilizado para o cálculo do máximo divisor comum de números inteiros positivos, que permite também a determinação da “maior medida comum” de dois segmentos e a identificação de segmentos comensuráveis ou incomensuráveis.³¹

Assim, utilizando compasso e régua não graduada, os estudantes teriam oportunidade de constatar, geometricamente, que o lado e a diagonal de um quadrado qualquer não possuem submúltiplo comum. Essa constatação seria ponto de partida para a discussão a respeito da noção de incomensurabilidade de segmentos de reta e sua oficialização.

Consideramos que seria adequado nesse momento colocar em discussão uma demonstração da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado qualquer, para que os participantes pudessem conjecturar, argumentar e elaborar uma justificativa por escrito, como preparação para o desenvolvimento da última atividade, de número 9.

Finalmente, com a proposta da *atividade 9*, tínhamos a intenção de criar condições para que os estudantes elaborassem algumas justificativas que iriam compor uma prova da incomensurabilidade dos lados do retângulo áureo,

³¹ Ver p. 46 e s.s.

completando a interação que desejávamos entre a seção áurea e a noção de incomensurabilidade de segmentos de reta.

A organização dos participantes em grupos deveria possibilitar a exposição de diferentes pontos de vista e garantir a oportunidade de argumentação. As discussões permitiriam o levantamento das conclusões, cuja formalização seria feita individualmente.

O papel do pesquisador seria orientar as discussões nos grupos e prestar os esclarecimentos necessários ao desenvolvimento das atividades.

5.2. Concepção da seqüência, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*

A análise *a priori* de cada atividade contém os objetivos que desejávamos alcançar, a justificativa das escolhas feitas durante a elaboração e algumas considerações a respeito das prováveis estratégias e das dificuldades que poderiam ocorrer durante a realização das tarefas propostas.

A seqüência foi aplicada pelo pesquisador a 10 estudantes (futuros professores), em 8 sessões, de aproximadamente 2 horas. Durante a realização de todas as atividades, esses estudantes estiveram organizados em três grupos, formados aleatoriamente, a que iremos nos referir a partir de agora, como G-1 (5 estudantes), G-2 (3 estudantes) e G-3 (2 estudantes).

Conforme já foi mencionado, ao longo de todo o período da experimentação, tivemos a presença do professor da classe e fomos auxiliados por quatro mestrados em educação matemática, que se revezaram, desempenhando o papel de observadores dos grupos G-1 e G-2, tendo a incumbência de gravar e registrar informações sobre a interação entre os participantes, as intervenções do pesquisador e outros dados que fossem considerados importantes para a elaboração da análise *a posteriori*. Ressalvamos, aqui, que o grupo G-3 não contou com a presença de um observador e, em virtude disso, foram avaliadas apenas suas produções escritas.

Apresentamos a seguir, cada uma das atividades, bem como as respectivas análises *a priori*, os relatos de experimentação e análises *a posteriori*.

1.ª sessão

Atividade 1 – Matemática na arte

A) O Partenon

A foto abaixo nos mostra o *Partenon* – templo construído no século V a.C., para acolher a estátua da deusa Atena, com quase 15m de altura. Nessa época, eram estabelecidas as proporções ideais para os elementos que compunham os templos, com o objetivo de que fossem admirados como esculturas.

O Partenon é uma das obras mais importantes da arquitetura grega e considera-se que, mesmo estando em ruínas, projeta uma imagem de lógica e precisão.

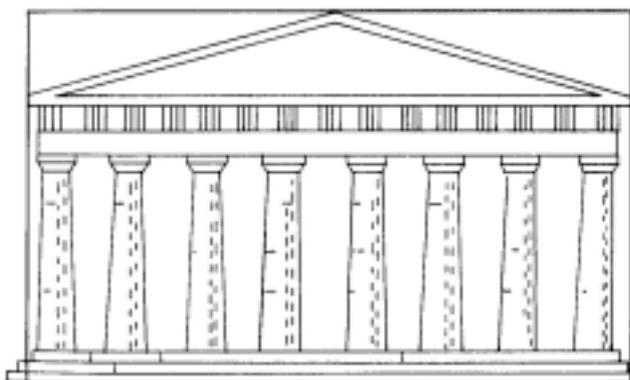
FIGURA 32 – O PARTENON



Fonte: Strickland, 2003, p.13.

O contorno de sua fachada, quando ainda estava intacta, poderia ser “encaixado” em um retângulo, como podemos observar na figura abaixo:

FIGURA 33 – O PARTENON



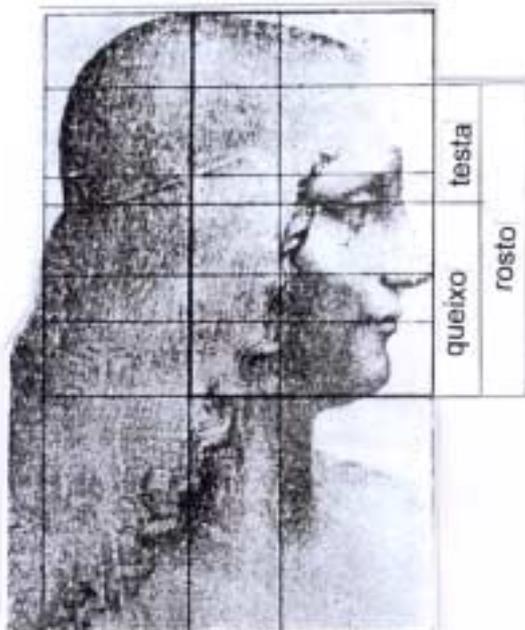
Fonte: Huntley, 1970, p. 63.

Meça os lados do retângulo que “contorna” o Partenon na figura acima e depois complete:

$$\frac{\text{comprimento}}{\text{largura}} \cong$$

B) Isabel d'Este

FIGURA 34 - ISABEL D'ESTE, por Leonardo da Vinci



Fonte: Tahan, 1987, p. 235.

FIGURA 35 – ISABEL D'ESTE, por Leonardo da Vinci



Fonte: Bérence, 1974, p. 142.

Este é o retrato de Isabel d'Este, obra famosa de Leonardo da Vinci, datada de 1500.

Um esboço da mesma obra, à esquerda, apresenta traços que indicam as proporções observadas pelo artista.

Com o auxílio desse esboço, complete a tabela abaixo:

TABELA 4 – A RAZÃO ÁUREA NO RETRATO DE ISABEL D'ESTE

Q (queixo)	T (testa)	R (rosto)	$\frac{R}{Q}$	$\frac{Q}{T}$

C) Maria Müller

FIGURA 36 - MARIA MÜLLER



Fonte: *Jornal do MEC*, out. 2001 (capa).

Aqui temos *Maria Müller*, professora, 103 anos, memória do magistério do início do século passado (*Jornal do MEC*, out. 2001).

Pensamos que, se Leonardo da Vinci houvesse pintado esse retrato, talvez pudesse ter utilizado as mesmas proporções observadas no retrato de Isabel d'Este.

Obtenha as medidas do rosto (R), da testa (T) e do queixo (Q), e complete a tabela:

TABELA 5 – A RAZÃO ÁUREA NA FOTO DE MARIA MÜLLER

	Rosto (R)	Queixo (Q)	Testa (T)	$\frac{R}{Q}$	$\frac{Q}{T}$
Maria Müller					

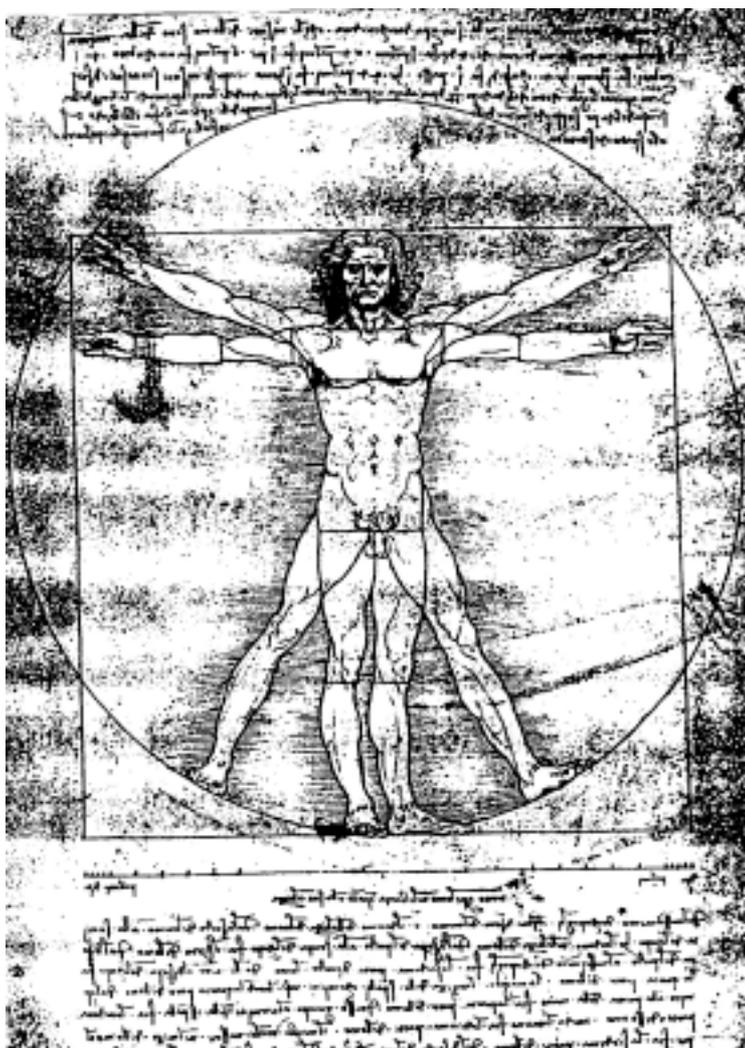
Compare os resultados obtidos para os itens A), B) e C) desta atividade. O que você observou?

D) O ideal de beleza – O corpo inteiro

Por meio dos itens anteriores, somos levados a notar a importância atribuída aos padrões de beleza preestabelecidos e a fidelidade mantida por alguns artistas, no sentido de observar determinadas proporções, buscando imprimir em suas obras características de harmonia e perfeição.

Os gregos estabeleceram as medidas ideais para o corpo humano, que serviram como parâmetros para a produção de esculturas que se tornaram modelos de beleza ideal. O quadro abaixo ilustra a idéia de padrão de beleza idealizado por Vitruvius:

FIGURA 37 - O HOMEM SEGUNDO AS PROPORÇÕES DE VITRÚVIO



Fonte: Bérance, 1974, p. 227.

Determine o quociente entre o lado do quadrado e o raio da circunferência.

Que relação existe entre este item da atividade e os itens anteriores?

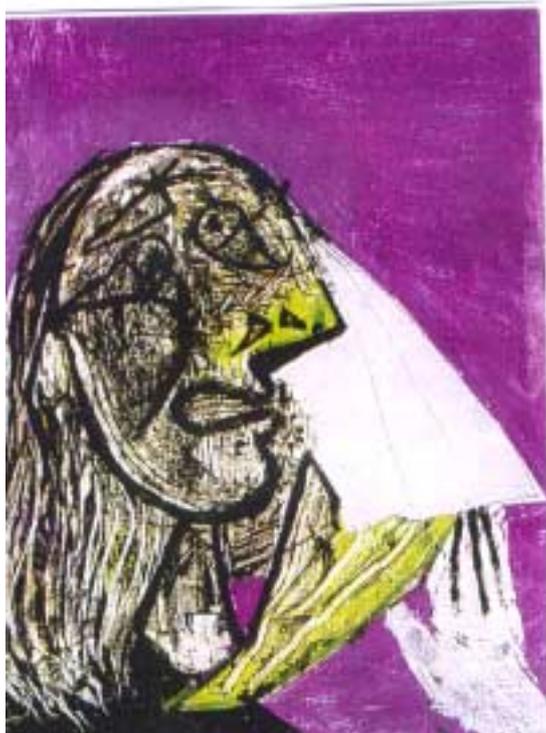
E) Arte *in* perfeição matemática

Há séculos vem sendo observada essa busca de harmonia e perfeição, talvez atendendo a uma necessidade característica do homem, no sentido de completar, com sua contribuição, a arte já começada, exposta no universo.

Não há dúvida a respeito do bem-estar que a harmonia proporciona, mas a ausência da harmonia e da obediência a padrões estabelecidos não implica ausência da arte.

Dora Maar – musa – é a prova do que acabamos de dizer.

FIGURA 38 - A MULHER QUE CHORA, por Picasso.



Fonte: *Veja*, jul. 1999, p. 150.

FIGURA 39 - CABEÇA DE MULHER, por Picasso.



Fonte: *Veja*, jul. 1999, p. 149.

Nas gravuras acima: *A mulher que chora* e *Cabeça de mulher*, dedicadas a ela, Pablo Picasso (1881-1973) transportou para a tela, em “formas torturadas”, como ele mesmo expressou, uma personalidade triste, depressiva, representando Dora, de acordo com sua interpretação.

Não há necessidade de simetria, padrões ou proporções perfeitas, para que essa obra (quase violenta!) seja apreciada e seu autor, lembrado como um gênio...

Assim sendo, nosso propósito para esta atividade é identificar na arte (ou em parte dela) elementos que possam constituir ponto de partida para o desenvolvimento de um conteúdo matemático.

Levando em consideração os destaques feitos nesta atividade, a respeito da arquitetura (o Partenon), da obra de Leonardo da Vinci (o retrato de Isabel d'Este), de Vitruvius – (os padrões ideais de beleza) e de Pablo Picasso (Dora Maar), conclui-se que o conceito de beleza sofre variações de acordo com as épocas e com os povos. No caso dos padrões gregos de beleza, a matemática pode oferecer recursos para verificar se uma obra apresenta as proporções consideradas perfeitas.

Que conteúdos da matemática você pode usar para realizar essa verificação?

Material disponível para o uso do aluno: calculadoras, compassos, esquadros sem graduação, réguas graduadas e réguas sem graduação.

Análise a priori

Objetivos

Ao elaborar esta atividade, escolhemos ambientes e temas que pertencem a outras áreas, com a intenção de despertar o interesse dos participantes para situações que, embora sejam aparentemente alheias à matemática, são contextos que favorecem o desenvolvimento de noções importantes que estão presentes no currículo escolar.

As solicitações feitas nesta atividade envolvem a medição e o cálculo da razão entre as medidas de segmentos de reta tomados de gravuras que reproduzem obras famosas da pintura e da arquitetura: uma foto do Partenon, um retrato de Isabel d'Este e uma representação do "Homem segundo as proporções de Vitruvius"³². Tomamos também, para compor o conjunto de gravuras, uma foto de Maria Müller.

Interessava-nos, especialmente, a atenção do estudante voltada para a regularidade com que um mesmo valor começaria a ser obtido e a ser registrado na folha da atividade. Esperávamos que o estudante, ao completar esta atividade, houvesse percebido que o número 1,6 (aproximado) está diretamente ligado aos padrões de beleza estabelecidos por volta do século V a.C. e que as formas, os números e as medidas são elementos que vinculam a arte à matemática.

Embora houvesse a intenção de disponibilizar a calculadora, que apresenta resultados aproximados com mais de três dígitos, a medição dos segmentos seria realizada com a régua, e, assim, a máxima precisão para as

³² De acordo com Doczi (1990), um dos primeiros documentos sobre a percepção das proporções humanas foi escrito por Marcus Vitruvius Pollio, arquiteto e escritor romano do século I a.C.. A relação entre o corpo humano, o quadrado e o círculo é baseada na idéia da "quadratura do círculo", ilustrada por Leonardo da Vinci, durante a Renascença (p. 93).

medidas dos segmentos seria dada em centímetros e milímetros. Decidimos, então, estabelecer que neste momento da seqüência iríamos trabalhar com a aproximação de uma casa decimal.

Algumas considerações são necessárias a respeito do item E desta atividade: os itens anteriores (A, B, C e D) apresentaram situações em que o estudante deveria observar a ocorrência da regularidade da razão aproximada de 1,6 entre as medidas de determinados segmentos de reta. Nossa finalidade ao apresentar o item E era provocar uma ruptura dessa regularidade, para que o estudante percebesse que o padrão de beleza destacado nesta atividade era aquele estabelecido pelos gregos, no século V a.C., não significando, por isso, que a beleza estaria presente apenas em pessoas ou em obras cujas dimensões atendem à proporção áurea. Assim, ao propor a questão que encerra o item E, tínhamos a intenção de que o estudante retomasse as conclusões levantadas nos itens anteriores e identificasse os conhecimentos utilizados para seu desenvolvimento.

Trata-se de atividade introdutória que não requer estratégias elaboradas. Assim, consideramos que os participantes não encontrariam dificuldades durante sua realização.

Relato da experimentação

Esta atividade teve a duração de aproximadamente 55 minutos e foi realizada por 10 estudantes, organizados nos grupos G-1, G-2 e G-3, que serão identificados por G-1 (A), G-1 (B), G-1 (C), G-1 (D) e G-1 (E), G-2 (A), G-2 (B) e G-2 (C), G-3 (A) e G-3 (B).

Ao iniciar a atividade, esclarecemos que, por ora, trabalharíamos com a aproximação de apenas uma casa decimal, em virtude da limitada precisão dos instrumentos que seriam utilizados.

Tendo percebido que havia dúvidas a respeito dos termos “comprimento” e “largura”, usados em referência aos lados do retângulo considerado no item A, foi convencionado que durante o desenvolvimento deste

trabalho “comprimento” estaria relacionado ao lado maior do retângulo e “largura” ao lado menor.

Na medida em que os resultados iam sendo registrados, observou-se em alguns participantes a expectativa de obter o valor aproximado de 1,6, para a razão entre as medidas dos segmentos indicados. Dois integrantes do G-2 e dois do G-1 se expressaram nesse sentido, dizendo que ali havia a seção áurea, demonstrando que já tiveram contato com esse conteúdo, ainda que de forma superficial.

Análise a posteriori

Observando as respostas apresentadas, por exemplo:

Observei que existe um [sic] semelhança, aproximação nos resultados das divisões. São todos próximos a 1,6 (G-1 (E)).

Observei que em todos os itens a proporção é a mesma, 1,6 (G-1 (D)).

Todos resultados se aproximam de 1,6 (G-2 (B)),

e levando em conta os nossos objetivos ao propor esta atividade, no sentido de motivar os participantes, despertando seu interesse para a regularidade na ocorrência da razão aproximada de 1,6 entre as medidas dos segmentos de reta indicados em cada enunciado, entendemos que foram criadas a expectativa e a atenção desejada em relação a essa razão.

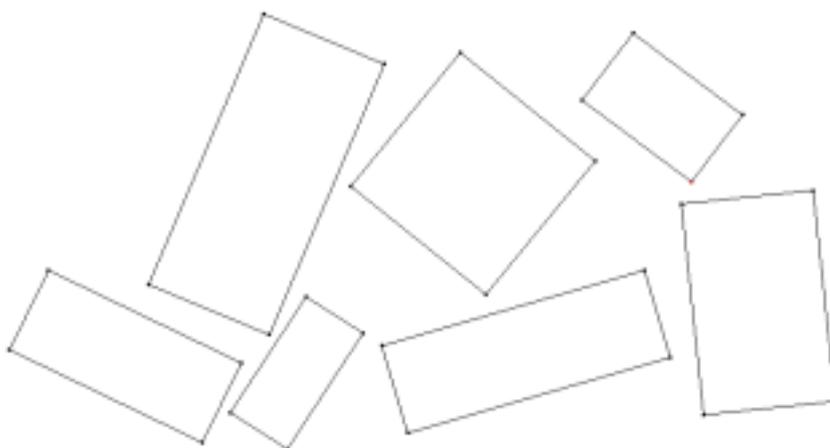
Em suas respostas à questão final do item E, a respeito dos conteúdos que poderiam ser utilizados para verificar se uma obra está de acordo com os padrões gregos de beleza, todos indicaram a proporcionalidade como ferramenta adequada para essa tarefa, além de outros conteúdos que foram mencionados por um número menor de participantes, como medidas (por três estudantes), área (por dois estudantes) e, finalmente, simetria, construções geométricas, utilização de instrumentos, geometria, segmentos comensuráveis e incommensuráveis (cada um destes conteúdos indicado por um único estudante).

Atividade 2

Considere os retângulos abaixo.

Em qual deles, tendo sido ampliado proporcionalmente, poderia ser “encaixada” a fachada do Partenon? (Você pode assinalar um ou mais.) Justifique sua resposta.

FIGURA 40 – RETÂNGULOS APRESENTADOS COMO PARTE DA ATIVIDADE 2



Material disponível: calculadoras, compassos, esquadros sem graduação, régua graduada e régua sem graduação.

Análise a priori

Objetivos

O objetivo desta atividade era criar uma oportunidade para a discussão sobre a semelhança entre os retângulos assinalados pelo estudante e o retângulo imaginário que “contém” a fachada do Partenon, por apresentarem a mesma razão entre as medidas do lado maior e do lado menor.

Características da atividade

Tendo observado nos resultados da primeira atividade a regularidade na ocorrência do valor aproximado de 1,6, os estudantes deveriam agora perceber que a harmonia que se busca na arte, pela escolha de dimensões que atendam a essa razão, está também presente na matemática, em suas questões internas, desligadas de outras áreas.

O enunciado traz figuras geométricas (retângulos) – representando objetos da matemática –, mas a solicitação é feita sem qualquer menção a conceitos ou procedimentos matemáticos. Apresentando esta atividade, desejávamos que o estudante levasse em consideração o que foi observado durante o desenvolvimento da atividade anterior e chegasse à conclusão de que qualquer um destes retângulos, sendo ampliado proporcionalmente, só poderia ter em seu interior “encaixada” exatamente a fachada do Partenon, se apresentasse a razão entre as medidas do lado maior e do lado menor, de aproximadamente 1,6.

Dessa forma, a atividade seria proposta no *quadro geométrico*, mas, para sua realização, seria necessário que o estudante recorresse a ferramentas do *quadro das grandezas* (aqui representado pelos comprimentos dos lados dos retângulos) e do *quadro numérico* (incluído na representação das medidas e no cálculo das razões entre essas medidas). O estudante teria, aqui, uma interação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas, de tal forma que um quadro de conhecimentos deveria fornecer recursos para a solução de uma situação proposta em outro.

Para a realização desta atividade, o estudante poderia utilizar como ferramentas conhecimentos relativos a medidas de segmentos e sua representação, cálculo da razão entre medidas de segmentos de reta, números racionais (representação, operações e aproximação), proporcionalidade e semelhança entre figuras geométricas planas.

Prováveis estratégias e dificuldades

Esperávamos que os estudantes determinassem a razão entre as medidas do lado maior e do lado menor de todos os retângulos apresentados, identificando aqueles com razão aproximada de 1,6 e concluíssem que, por serem semelhantes ao retângulo mencionado na atividade 1, se fossem ampliados proporcionalmente, poderiam “encaixar” exatamente a fachada do Partenon.

Algumas figuras poderiam ser imediatamente descartadas, como o quadrado. Ou seja, consideramos a possibilidade de que alguns estudantes recorressem à medição apenas das figuras que, aparentemente, apresentam as dimensões necessárias para atender às condições impostas no enunciado.

Relato da experimentação e análise *a posteriori*

A aplicação desta atividade teve a duração de 10 minutos aproximadamente, tendo a participação de 10 estudantes, organizados nos mesmos grupos a que chamamos de G-1, G-2 e G-3.

Com exceção dos estudantes G-1(E) e G-2(B), que desprezaram o quadrado (por apresentar razão 1, entre as medidas dos lados), todos recorreram à medição e calcularam a razão entre as medidas dos lados de todos os retângulos. Identificaram, então, os dois retângulos que apresentam dimensões cuja razão é de aproximadamente 1,6, como aqueles que, ampliados proporcionalmente, poderiam “encaixar” exatamente a fachada do Partenon. Algumas dessas respostas são apresentadas a seguir:

Os retângulos F e G [nomeados pelo estudante] poderiam ser ampliados e encaixados no Partenon, pois a proporção entre o comprimento e a altura é a mesma (G-1 A).

Os retângulos 6 e 7 [nomeados pelo estudante], pois a razão entre o comprimento e a largura deu 1,6, semelhantemente ao resultado da razão entre comprimento e largura da atividade que contém a fachada do Partenon (G-1 B).

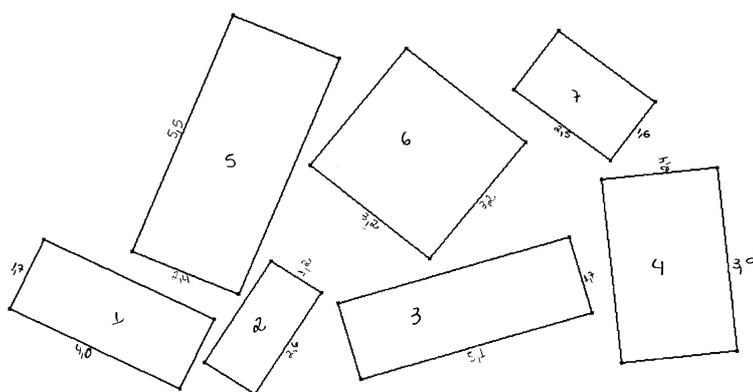
Nos retângulos destacados. A razão entre comprimento e altura é igual a 1,6 (G-2 C).

Os retângulos hachurados têm a mesma proporção dos lados do Partenon (G-2 B).

Os retângulos 4 e 5 [nomeados pelo estudante] são os que poderiam ser ampliados e encaixados no Partenon porque a proporção entre o comprimento e a largura é a mesma obtida no Partenon (G-1 D).

O estudante G-3 (A), tendo determinado a razão entre as medidas dos lados dos retângulos, apontou os retângulos que nomeou de R_4 e R_7 como aqueles que, ampliados proporcionalmente, poderiam “conter” exatamente a fachada do Partenon. Seu protocolo é apresentado na figura 41 a seguir:

FIGURA 41 - PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (A) – ATIVIDADE 2



$$R_1 = \frac{4,0}{1,7} \approx 2,4$$

$$R_2 = \frac{1,2}{0,7} \approx 1,7$$

$$R_3 = \frac{5,1}{1,7} \approx 3,0$$

$$R_4 = \frac{3,9}{2,4} \approx 1,6$$

$$R_5 = \frac{5,5}{2,4} \approx 2,3$$

$$R_6 = \frac{3,2}{3,2} = 1$$

$$R_7 = \frac{1,6}{1,6} = 1,6$$

Ampliando os retângulos 4 e 7, tem-se a fachada do Partenon, pois os lados desses retângulos aumentam de

forma proporcional. R_p = retângulo partenon.

$$\frac{C_p}{C_4} = \frac{9,2}{3,9} \approx 2,4$$

$$\frac{L_p}{L_4} = \frac{5,8}{2,4} \approx 2,4$$

> a razão entre os lados dos retângulos é proporcional.

Esse desenvolvimento mostra que, além de haver percebido que nos retângulos R_4 e R_7 , assinalados, a razão (aproximada de 1,6) entre as medidas do lado maior e do lado menor é a mesma verificada para os lados do retângulo mencionado no item A da atividade 1, constatou também a existência da proporção entre os lados correspondentes do retângulo que nomeou de “4” e do retângulo R_p (retângulo Partenon).

Análise a posteriori

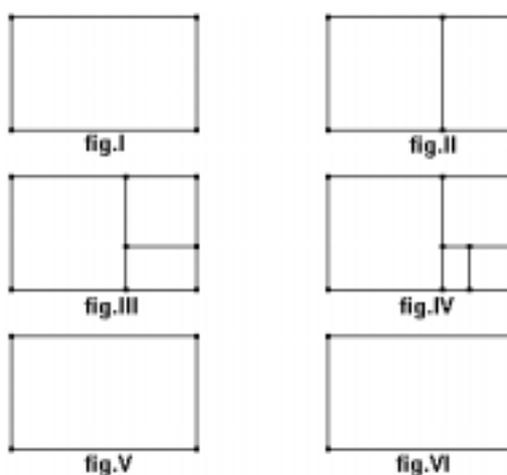
Levando em conta as respostas apresentadas pelos participantes, entendemos que, embora não tenha sido mencionada, a noção de semelhança foi utilizada, implicitamente, como ferramenta para a identificação dos retângulos que atendiam à solicitação do enunciado.

Atividade 3

Na seqüência abaixo, a figura II foi obtida a partir da divisão do retângulo da figura anterior, em um quadrado e um retângulo menor.

Observe a construção das figuras III e IV e, em seguida, complete as figuras V e VI.

FIGURA 42 – SEQÜÊNCIA DE RETÂNGULOS – SUBDIVISÃO ITERATIVA – ATIVIDADE 3



Justifique sua construção, por escrito, apontando as características das figuras anteriores, que serviram como base para o seu procedimento.

Desejando ampliar a seqüência, quantas figuras ainda poderíamos obter, usando o mesmo processo?

Material disponível: calculadoras, compassos, esquadros sem graduação, régua graduada e régua sem graduação.

Análise a priori

Objetivos

As atividades anteriores permitiram a observação da regularidade com que ocorre a razão aproximada de 1,6 entre as medidas do lado maior e do lado menor de alguns retângulos. Embora os estudantes estivessem ainda trabalhando com valores aproximados, nosso intuito ao propor esta atividade era que eles construíssem uma idéia concernente a outras propriedades desses retângulos.

Tínhamos a expectativa de que o estudante percebesse uma regularidade no processo de subdivisão das figuras e fosse capaz de dar continuidade a essa construção, de tal forma que a cada etapa, de um retângulo, fossem obtidos um quadrado e um retângulo menor.

Além disso, desejávamos criar condições para que os estudantes conjecturassem a respeito da possibilidade de novas subdivisões, para que, apesar da relativa imprecisão dos instrumentos utilizados, percebessem que esse processo pode ser infinito.

Características da atividade

Esta atividade trata especificamente de questões internas da matemática, uma vez que o estudante é convidado a observar a lei de formação de uma seqüência de figuras geométricas, completar essa seqüência e justificar seu procedimento.

O estudante teria diante de si um problema, cuja solução iria requerer a observação atenta das figuras que compõem a seqüência, a descoberta de regularidades e a generalização. Poderia, então, elaborar uma estratégia de ação, para dar continuidade ao processo de subdivisão dos retângulos, considerando conhecimentos antigos, como: construções geométricas com régua e compasso, definições e propriedades de figuras geométricas, conceitos sobre paralelismo e perpendicularismo. Alguns estudantes ainda poderiam utilizar conceitos de

medida de comprimento, operações e comparações de números racionais representados na forma decimal.

É importante observar que, ao propor esta atividade, nosso objetivo não era de que os participantes identificassem dentre vários retângulos aqueles que permitem essa subdivisão em seu interior, mas queríamos que percebessem uma nova propriedade do retângulo que estávamos destacando desde a primeira atividade, por apresentar dimensões que atendem à razão de aproximadamente 1,6.

Prováveis estratégias e dificuldades

O enunciado não traz qualquer orientação a respeito da estratégia que se espera do estudante, ou da estratégia mais adequada, permitindo que seja escolhida a abordagem considerada mais conveniente.

Tendo ao seu dispor material que permite medir, traçar e calcular, o estudante poderia utilizar apenas régua sem graduação e compasso, trabalhando apenas no quadro geométrico.

Seria possível ocorrer também que, influenciado pelas atividades anteriores, o estudante utilizasse medidas e fizesse tentativas no sentido de construir no interior das figuras em branco outros retângulos, cujos lados estivessem também à razão de 1,6, aproximadamente, envolvendo, neste caso, os quadros geométrico, numérico e das grandezas.

Quanto à questão “Desejando ampliar a seqüência, quantas figuras ainda poderíamos obter, usando o mesmo processo?”, presumimos que um estudante que se ativesse apenas ao traçado dos segmentos de reta, com régua e/ou compasso, talvez concluísse que seria possível construir uma quantidade finita de subdivisões no interior do retângulo.

As conjecturas e o trabalho em grupo seriam fatores importantes, nesse momento, para que houvesse a discussão sobre a possibilidade de um processo iterativo de subdivisões no interior do retângulo dado.

Sendo solicitado a justificar seus procedimentos, o estudante teria necessidade de rever seu plano de ação, organizar seus pensamentos e avaliar seus resultados, a fim de elaborar um texto (por pequeno que fosse), mas que trouxesse a formalização de suas conclusões.

Relato da experimentação e análise *a posteriori*

Esta atividade foi desenvolvida em aproximadamente 20 minutos.

Os estudantes tiveram liberdade para escolher a estratégia e o material que julgassem mais adequados para o desenvolvimento da atividade.

G-1 (A) e G-2 (B) observaram a lei de formação da seqüência de figuras e usaram medições para completar os retângulos vazios, concluindo que:

a construção de cada quadrado é obtida a partir da largura do retângulo (figura II para III), assim sucessivamente. *Matematicamente infinitas* (G-1 (A)) (grifo nosso).

A figura dividida *forma um quadrado e um retângulo sucessivamente*. O quociente entre os lados do retângulo é 1,6 (G-2 (B)) (grifo nosso).

Os estudantes (B), (C) e (D) do grupo G-1 e os estudantes (A) e (C) do grupo G-2 utilizaram transporte de segmentos com o auxílio do compasso, concluindo que por esse processo é possível construir infinitas figuras. Os excertos a seguir mostram essas conclusões:

Percebi que da figura I para II formamos um quadrado através da largura do retângulo, da figura II para III o lado do quadrado é a largura do retângulo que sobra em II assim por diante; até obter quadrados cada vez menores como mostrados nas figuras V e VI. *Teoricamente, podemos fazer o processo infinitas vezes* porque sempre obteremos um quadrado e um retângulo, que por sua vez, poderá ser dividido por um quadrado e um retângulo mesmo que cada vez menores (G-1 (D)) (grifo nosso).

Observei que para construir as figuras II, III e IV, mediu-se o lado menor do retângulo e marcou a mesma medida no lado maior, formando assim um quadrado e um retângulo. Seguindo esse critério, utilizei o compasso p/ medir o lado menor do retângulo na figura V, obtendo + um quadrado e + um retângulo. Analogamente, consegui na figura VI + um retângulo e + um quadrado. Dessa forma consegue-se infinitas [sic] figuras (G-1 (B)).

Fazendo o transporte da medida do lado de um quadrado formando na figura (retângulo) um quadrado e um retângulo cuja razão entre o comprimento e a largura seja 1,6. Poderíamos obter usando o mesmo processo infinitas figuras (G-2 C) (grifo nosso).

Transporta-se a medida do lado menor do retângulo para o lado maior a fim de formar um quadrado e repete-se o procedimento n vezes (G-2 A) (grifo nosso).

O estudante G-1 (E), tendo concluído que é possível prolongar infinitamente a subdivisão dos retângulos, justificou sua conclusão com base nas medidas dos lados dos retângulos. As figuras 43 e 44 mostram os cálculos que fazem parte de sua justificativa:

FIGURA 43 - PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (E) (i) – ATIVIDADE 3

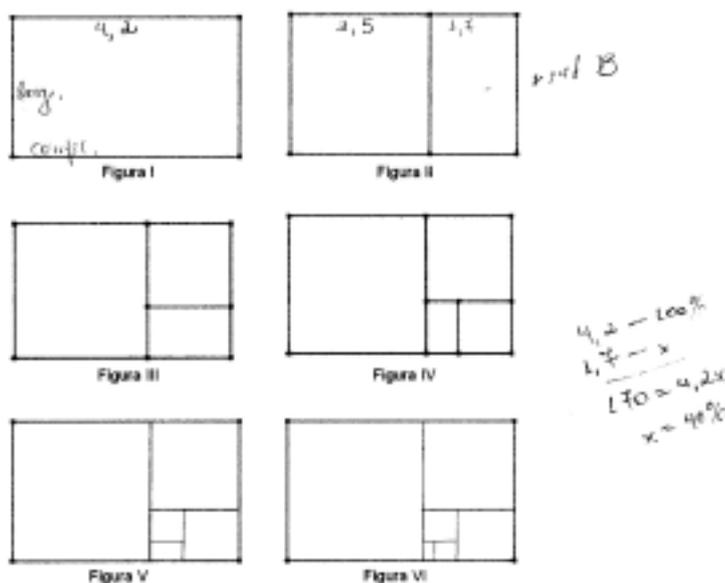


FIGURA 44 - PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (E) (ii) – ATIVIDADE 3

(A)
 * Na figura seguinte, o retângulo existente será dividido de forma a encontrar um quadrado e outro retângulo (B), feito isso na Figura II que foi construída a partir da Figura I.

* Poderíamos obter infinitas figuras usando esse processo, mas os novos retângulos (B) encontrados ficam c/ área cada vez menor até o ponto que nã se pode visualizar a olho nu.

Justificativa da construção: com o cálculo abaixo verifiquei que o comprimento do retângulo (B) encontrado na figura II corresponde a 40% do compr. do menor retângulo existente na figura Anterior (figura I).
 $1,7$ é 40% de $4,2$

$$\begin{array}{r} 4,2 - 100\% \\ 1,7 - x \\ \hline x = 40\% \end{array}$$

No Grupo G-3, os participantes completaram as figuras em branco, empregando as medidas obtidas com o auxílio de régua graduada. Ambos apresentaram um desenvolvimento como o que pode ser visto nas figuras 45 e 46 a seguir, chegando à conclusão de que é possível realizar infinitas subdivisões.

FIGURA 45 - PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (A) (i) – ATIVIDADE 3

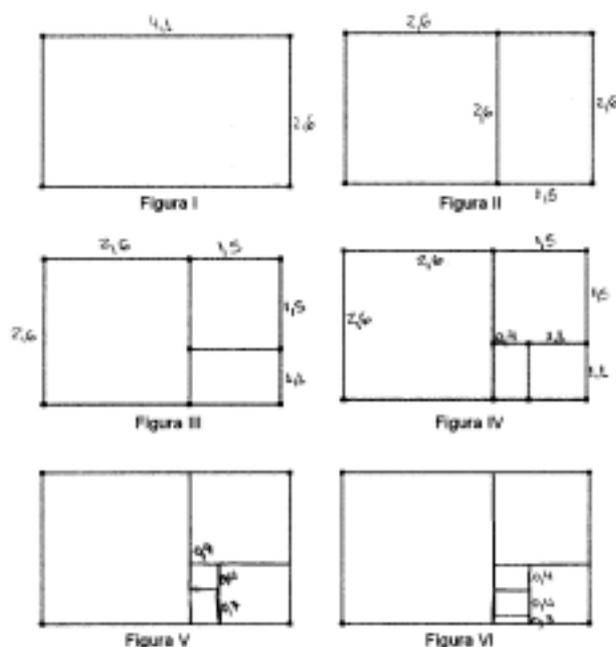


FIGURA 46 - PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (A) (ii) – ATIVIDADE 3

Na fig 3, temos um quadrado de $1,5 \times 1,5$ e sobrou um retângulo de $1,1 \times 1,5$. Pega o lado menor e faz-se um quadrado dentro desse retângulo, sobrou um um quadrado de $1,1 \times 1,1$, sobrando um retângulo de $0,4 \times 1,1$.

Pega-se o retângulo $0,4 \times 1,1$ e faz-se um quadrado de $0,4 \times 0,4$, sobrando um retângulo de $0,4 \times 0,7$.

Pega-se o lado menor do retângulo e faz-se um quadrado.

Poderíamos obter uma sequência infinita de figuras.

Tendo apresentado a mesma subdivisão dos retângulos, G-3 (B) concluiu dizendo: "Dividi a figura 1 em um quadrado e sobrou um novo retângulo, esse novo retângulo sempre gera um novo quadrado a partir de seu menor lado e assim sucessivamente. Com esse processo podemos obter infinitas figuras".

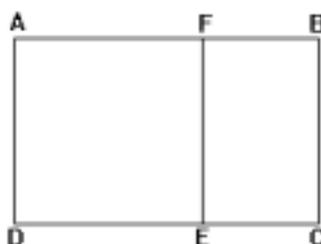
As considerações feitas por esses dois participantes (G-3 (A) e G-3 (B)) demonstram que perceberam a possibilidade de prolongar infinitamente o processo de subdivisão. Entretanto, a conclusão de que cada novo retângulo gera um novo quadrado (conclusão coerente com a figura apresentada pelos dois estudantes) mostra que não ficou suficientemente claro que a cada subdivisão se obtém um único quadrado e um retângulo menor.

2.^a sessão

Atividade 4

A) Na figura 47 a seguir, do retângulo ABCD, “retiramos” o quadrado ADEF, obtendo o retângulo BCEF.

FIGURA 47 – RETÂNGULO ABCD – 1.^a SUBDIVISÃO – ATIVIDADE 4



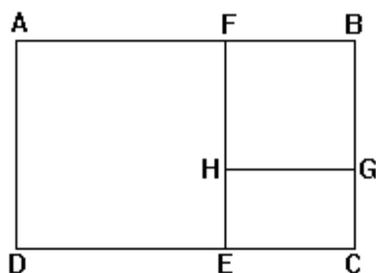
Complete a seguinte tabela:

TABELA 6 – A SEÇÃO ÁUREA NOS LADOS DOS RETÂNGULOS FORMADOS PELA 1.^a SUBDIVISÃO DE ABCD

	<i>comprimento</i>	<i>largura</i>	$\frac{\textit{comprimento}}{\textit{largura}}$
Retângulo ABCD			
Retângulo BCEF			

B) Considerando ainda a mesma figura, do retângulo BCEF, “retiramos” o quadrado BGHF, obtendo um outro retângulo menor, que é CEHG.

FIGURA 48 – RETÂNGULO ABCD – 2.ª SUBDIVISÃO – ATIVIDADE 4



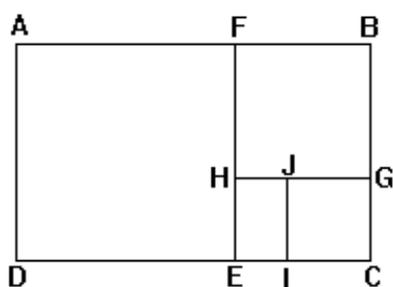
Complete a tabela:

TABELA 7 – A SEÇÃO ÁUREA NOS LADOS DOS RETÂNGULOS FORMADOS PELA 2.ª SUBDIVISÃO DE ABCD

	<i>comprimento</i>	<i>largura</i>	$\frac{\textit{comprimento}}{\textit{largura}}$
Retângulo ABCD			
Retângulo BCEF			
Retângulo CEHG			

C) Se ainda, na mesma figura, “retirarmos” do retângulo CEHG, um quadrado CIJG, obteremos o retângulo menor EHJI.

FIGURA 49 – RETÂNGULO ABCD – 3.ª SUBDIVISÃO – ATIVIDADE 4



Complete a tabela:

TABELA 8 – A SEÇÃO ÁUREA NOS LADOS DOS RETÂNGULOS FORMADOS PELA 3.^a SUBDIVISÃO DE ABCD

	<i>comprimento</i>	<i>largura</i>	$\frac{\textit{comprimento}}{\textit{largura}}$
Retângulo ABCD			
Retângulo BCEF			
Retângulo CEHG			
Retângulo EHJI			

1) Considerando as construções desta atividade, responda:

- a) Os retângulos ABCD, BCEF, CEHG e EHJI são semelhantes? Justifique sua resposta.
- b) Desejando continuar a subdivisão, quantos retângulos mais você considera possíveis?
- c) Que relação existe entre o retângulo inicial ABCD e todos os possíveis retângulos, dessa subdivisão? Explique.

2) O retângulo imaginário, no qual seria possível “encaixar” a fachada do Partenon, é denominado *retângulo áureo*, em virtude das características especiais, que lhe dão um aspecto de mais precisão, lógica e harmonia.

- a) Sabendo que o retângulo ABCD desta atividade é semelhante àquele retângulo imaginário, o que você conclui a respeito de cada um dos retângulos obtidos pelo processo de subdivisão, realizado nesta atividade?
- b) Considerando as atividades já desenvolvidas, quais são as características de um retângulo áureo?

Material disponível aos alunos: calculadoras, compassos, esquadros sem graduação, régua graduada e régua sem graduação.

Análise a priori

Objetivos

Ao propor esta atividade, tínhamos o propósito de apresentar aos estudantes uma situação que possibilitasse a verificação de que são semelhantes todos os retângulos formados a partir das subdivisões sucessivas do retângulo dado inicialmente.

Além disso, nossa expectativa era de que percebessem que, além de ser infinito, esse processo de subdivisões poderia resultar na construção de um retângulo tão pequeno quanto desejassem, cujas dimensões seriam tais que a razão entre as medidas do lado maior e do lado menor ainda seria aproximada de 1,6.

Esperávamos, também, que ao final desta atividade os estudantes fossem capazes de elaborar uma definição do retângulo áureo (ainda com razão aproximada, entre as medidas dos lados: maior e menor) e concluíssem que todos os retângulos obtidos a partir dessa subdivisão também são áureos, por serem semelhantes a um retângulo áureo, como aquele que “contém” a fachada do Partenon.

Características da atividade

A questão envolve, novamente, os quadros geométrico, numérico e das grandezas, e, para atender às solicitações expressas no enunciado, o estudante deveria recorrer às definições e propriedades de figuras geométricas (retângulo e quadrado), às noções de medida de segmentos e razão entre duas medidas, aos números racionais (representação, operações e aproximação) e às noções de proporcionalidade e semelhança de polígonos.

Prováveis estratégias e dificuldades

Esta atividade complementaria a atividade 3, uma vez que aqui o estudante deveria analisar separadamente cada uma daquelas figuras. Deveria perceber a ocorrência de uma regularidade que, aos poucos, iria se somando àquela já notada em atividades anteriores, ou seja, a cada subdivisão realizada se obtém um retângulo menor, cujos lados também estão na razão de aproximadamente 1,6, já observada nas atividades 1 e 2.

O estudante que, ao desenvolver a atividade 3, havia percebido a possibilidade de uma quantidade indeterminada de subdivisões no interior daquele retângulo possuiria, a partir da atividade 4, um elemento a mais para compor a idéia que estaria se formando. Durante o desenvolvimento desta atividade, iria constatar que os infinitos retângulos obtidos por essas subdivisões são todos semelhantes ao retângulo dado inicialmente. Além disso, esses retângulos apresentam razão entre as medidas do lado maior e do lado menor de aproximadamente 1,6 – característica que estabelece uma ligação entre estes retângulos e aquele imaginário que “contém” a fachada do Partenon.

Caberia ao estudante a construção da definição (quase completa, por enquanto) do retângulo, que a partir desta atividade passaria a ser identificado como *retângulo áureo*.

O enunciado fornece as informações que faltam para a elaboração dessa definição, ou seja,

- o retângulo que lhe foi apresentado no item A da primeira atividade é *áureo*;
- este retângulo $ABCD$ é semelhante àquele apresentado na primeira atividade.

A conclusão de que todos os retângulos obtidos pelas subdivisões são semelhantes a este $ABCD$ (que esperávamos como resposta à questão 1 do item C) e a propriedade transitiva da semelhança de polígonos deveriam auxiliar o estudante em suas conclusões a respeito do retângulo áureo.

Relato da experimentação e análise *a posteriori*

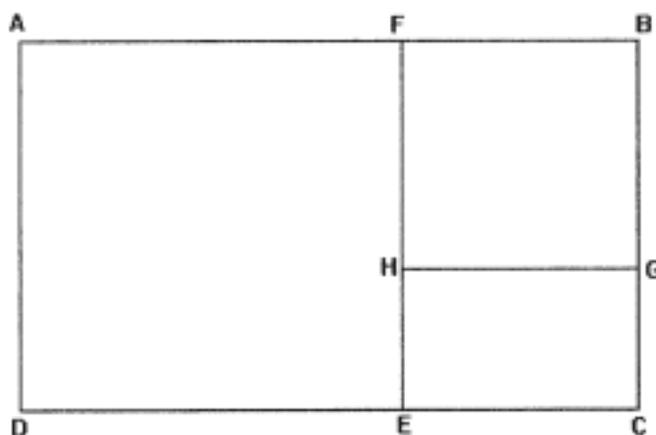
A atividade 4 teve a duração de aproximadamente 55 minutos.

Os *itens A e B*, de certa forma, retomavam os procedimentos utilizados para o desenvolvimento das atividades 1 e 2, ou seja, os estudantes deveriam realizar medições de segmentos e determinar a razão entre as medidas obtidas.

Para atender à solicitação feita no enunciado, não houve discussão nos grupos G-1 e G-2 e não foram necessários maiores esclarecimentos.

Quanto aos integrantes do grupo G-3, embora durante a realização das atividades 1 e 2 já houvessem associado os termos “comprimento” e “largura”, respectivamente, aos lados maior e menor dos retângulos, nesta atividade associaram o lado que está na posição horizontal ao termo “comprimento” e o lado que está na posição vertical ao termo “largura”. O protocolo a seguir (figura 50) mostra a resposta de G-3(A) ao item B:

FIGURA 50 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (A) – ATIVIDADE 4, ITEM B



Complete a tabela:

	<i>comprimento</i>	<i>largura</i>	$\frac{\text{comprimento}}{\text{largura}}$
Retângulo ABCD	9,2	5,6	$\frac{9,2}{5,6} \approx 1,6$
Retângulo BCEF	3,5	5,6	$\frac{3,5}{5,6} \approx 0,6$
Retângulo CEHG	5,5	2,2	$\frac{5,5}{2,2} \approx 2,5$

A seguir, fazemos observações a respeito do desenvolvimento do item C, analisando as questões separadamente:

Item C:

1) Considerando as construções desta atividade, responda:

a) Os retângulos ABCD, BCEF, CEHG e EHJI são semelhantes?

Justifique sua resposta.

Esta questão provocou nos grupos uma discussão quanto à diferença entre os conceitos de “semelhança” e “congruência” de figuras planas, levando finalmente os integrantes dos grupos G-1 e G-2 à conclusão de que os retângulos ABCD, BCEF, CEHG e EHJI são semelhantes, conforme se expressou G-1 (D): “Sim, os 4 retângulos são semelhantes porque possuem a mesma razão de proporcionalidade”. Percebemos, pelas respostas de alguns dos participantes, que não havia clareza quanto à distinção entre os termos “proporção” e “razão”:

Sim, porque a proporção $\frac{\text{comprimento}}{\text{largura}}$ é igual para todos. Isto é, há uma razão de proporcionalidade. (G-1 B).

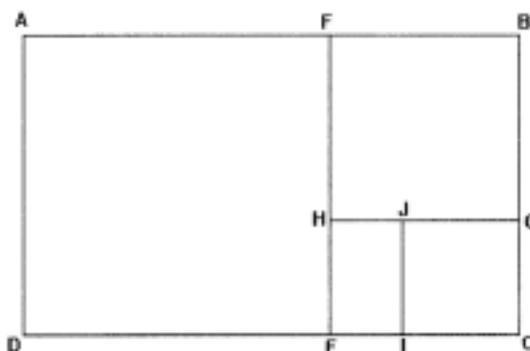
Sim, pois, possuem a mesma proporção comprimento/largura (G-1 A).

Sim, porque a razão entre os retângulos é a mesma (G-2 C).

Para a mesma questão, o estudante G-1 (E) respondeu que todos os retângulos são semelhantes, mas o argumento apresentado justifica a resposta apenas para dois dos retângulos: ABCD e BCEF: “Sim. Pois \overline{AD} está para \overline{FB} , assim como \overline{DC} está para \overline{BC} ”.

Observamos que os resultados obtidos pelo grupo G-3, conforme o protocolo exibido na figura 51 a seguir,

FIGURA 51 - PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (A) – ATIVIDADE 4, ITEM C



Complete a tabela:

	comprimento	largura	$\frac{\text{comprimento}}{\text{largura}}$
Retângulo ABCD	9,2	5,6	$\frac{9,2}{5,6} \approx 1,6$
Retângulo BCEF	3,5	5,6	$\frac{3,5}{5,6} \approx 0,6$
Retângulo CEHG	3,5	2,2	$\frac{3,5}{2,2} \approx 1,6$
Retângulo EHJI	1,4	2,2	$\frac{1,4}{2,2} \approx 0,6$

garantiram a semelhança dos retângulos dados, dois a dois, que G-3 (B) explicitou da seguinte forma: “São semelhantes os retângulos $ABCD \cong CEHG$ e $BCEF \cong EHJI$ pois têm a mesma razão de proporção”.

Talvez pudéssemos atribuir esse engano a trabalhos anteriores em que o retângulo tenha sempre sido apresentado na mesma posição, com o lado maior (nomeado de comprimento) paralelo à margem inferior do papel. No entanto, o desenvolvimento da atividade 2, pelos mesmos estudantes, invalida essa nossa suposição, pois temos ali vários retângulos dispostos em posições diversas, e em todos os casos o termo “comprimento” foi associado ao lado maior e “largura” ao lado menor.

De qualquer forma, julgamos que esse equívoco poderia ter sido evitado, se houvésssemos utilizado as expressões “lado maior” e “lado menor”, em vez de “comprimento” e “largura”, respectivamente.

b) Desejando continuar a subdivisão, quantos retângulos mais você considera possíveis?

Respondendo a essa questão, os integrantes do grupo G-1 afirmaram que há possibilidade de construir infinitos retângulos, a partir do processo indicado na figura, acrescentando, em seguida, observações a respeito do número limitado de retângulos possíveis, quando traçados com régua e/ou compasso. G-1 (B), por exemplo, diz em sua resposta: “teoricamente [é possível construir] infinitos. Mas continuando a subdivisão consegui mais quatro retângulos”.

G-1 (D) contornou a questão da limitação do papel, recorrendo mentalmente ao Cabri, para concluir que:

No ambiente papel e lápis a partir do tamanho acima podemos fazer uns 4 a 5 retângulos a mais enquanto sabemos que é possível fazer infinitos retângulos. No ambiente Cabri pode-se mostrar que a quantidade de retângulos é infinito [sic] ao “ampliar” o retângulo original. “Ampliar” no Cabri no sentido de manipular o comprimento e a largura do retângulo para simular um “zoom” e mostrar que sempre num retângulo cabe [sic] mais quadrados e retângulos.

Os integrantes dos grupos G-2 e G-3 não fizeram qualquer menção à limitação do papel. Para estes, não houve dúvida a respeito de serem infinitos os retângulos resultantes dessa subdivisão.

Considerávamos importante que os estudantes percebessem a possibilidade de construir infinitos retângulos no interior do retângulo áureo, porque a idéia de infinito iria permear todo o desenvolvimento da seqüência e deveria auxiliar na elaboração da prova da incomensurabilidade dos lados do retângulo áureo, durante a última atividade da seqüência (atividade 9).

c) Que relação existe entre o retângulo inicial ABCD e todos os possíveis retângulos dessa subdivisão? Explique.

As respostas dos integrantes do G-1 e G-2 demonstram que perceberam a semelhança entre os infinitos retângulos resultantes da subdivisão do retângulo ABCD:

[...] possuem *lados proporcionais* (G-1 (E)) (grifo nosso).

[...] todos eles têm a *mesma razão de proporcionalidade*; todos são obtidos a partir da subdivisão de um outro; o comprimento de um será sempre a largura do retângulo posterior (G-1 (B)) (grifo nosso).

[...] que a *razão dos lados (comprimento/largura)* são os mesmos [*sic*], e, portanto, os retângulos *são semelhantes* (G-1 (C)) (grifo nosso).

[...] Por essa razão, ao tomar a largura do retângulo como lado para o quadrado, *podemos formar sempre retângulos semelhantes*, ou seja, possuem a mesma proporcionalidade (G-1 (D)) (grifo nosso).

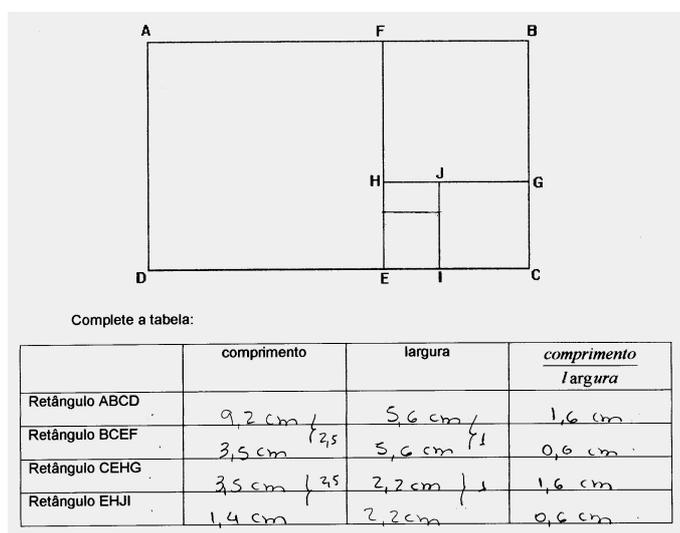
Todos os retângulos obtidos possuem a mesma proporção comprimento/largura, logo, *são todos semelhantes* ao retângulo ABCD (G-1 (A)).

Semelhança. A razão entre o comprimento e a largura é sempre 1,6 (G-2 (A)).

Semelhantes com razão 1,6 (G-2 (C)).

O estudante G-3 (B), cujo protocolo reproduzimos a seguir,

FIGURA 52 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (B) – ATIVIDADE 4, ITEM C, QUESTÃO 1, a



respondeu ao item c da seguinte forma:

FIGURA 53 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (B) – ATIVIDADE 4, ITEM C, QUESTÃO 1,c.

1.ª) A razão entre o retângulo inicial e o próximo retângulo é da seguinte forma:

- a razão entre os comprimentos sempre é de 2,5 cm
- a razão entre as larguras sempre é de 1,0 cm

Essa conclusão é decorrente de o estudante haver considerado como comprimento o lado paralelo à margem inferior do papel. É possível que esse desenvolvimento seja resultado de trabalhos anteriores sobre a semelhança de figuras planas, em que essas figuras tenham sido apresentadas sempre na mesma posição.

2) O retângulo imaginário, no qual seria possível “encaixar” a fachada do Partenon, é denominado retângulo áureo, em virtude das características especiais que lhe dão um aspecto de mais precisão, lógica e harmonia.

a) Sabendo que o retângulo ABCD desta atividade é semelhante àquele retângulo imaginário, o que você conclui a respeito de cada um dos retângulos obtidos pelo processo de subdivisão, realizado nesta atividade?

Três estudantes do grupo G-1 mencionaram a razão de semelhança dos retângulos formados no interior do retângulo *ABCD* e a lei de formação da subdivisão, mas suas respostas não indicam alguma conclusão a respeito de serem áureos esses retângulos. Isso pode ser constatado pela observação de suas respostas:

São retângulos que possuem a mesma razão de proporção. E o comprimento de um é a largura do próximo (G-1 (C)).

O lado maior (comprimento) do próximo retângulo é igual à largura do retângulo anterior (G-1 (E)).

São retângulos que possuem a mesma razão de proporcionalidade comprimento/largura, sendo que a largura do retângulo maior será sempre o comprimento do retângulo menor (G-1 A).

Os demais estudantes concluíram que os infinitos retângulos obtidos pela subdivisão de $ABCD$ são áureos. Os trechos que seguem foram retirados de suas respostas:

São retângulos áureos. Pois se reduzirmos ou ampliarmos o seu tamanho teremos sem [sic] a mesma razão de proporcionalidade (G-1 (B)).

Como a fachada do Partenon e $ABCD$ são ~ [semelhantes], e $ABCD$ e todos os demais também são ~ [semelhantes], todos os retângulos são semelhantes e áureos (G-2 (A)).

Que todos os retângulos obtidos têm a mesma harmonia do retângulo inicial, ou seja, são retângulos áureos, como o retângulo do Partenon (G-3 (B)).

b) Considerando as atividades já desenvolvidas, quais são as características de um retângulo áureo?

Selecionamos algumas das definições do retângulo áureo, elaboradas pelos estudantes, observando que as demais constituem variações destas:

Deve ser semelhante ao retângulo de Partenon, ou seja, ter *razão entre comprimento e largura igual a 1,6* (G-2 (A)) (grifo nosso).

Retângulo áureo tem o seu *comprimento* construído *dependente da medida da largura* ou vice-versa. Existe uma maneira de construir um retângulo áureo (com precisão, lógica e harmonia) usando régua e compasso, mas não lembro como (G-1 (E)) (grifo nosso).

São retângulos que possuem: • *mesma razão de proporcionalidade* entre comprimento/largura. • *Harmonia na construção* (entre comprimento/largura). Na construção temos *aproximadamente o comprimento igual a 1,5 da largura* (G-1 (A)) (grifo nosso).

Considerando essas respostas, que estão muito próximas das demais definições apresentadas, percebemos que o desenvolvimento das atividades 1 a 4 despertou a atenção dos estudantes, especialmente para uma característica do retângulo áureo: a razão entre as medidas do lado maior e do lado menor é aproximadamente 1,6.

Desejávamos que após a discussão os estudantes tivessem incluído em suas definições a possibilidade de subdivisão iterativa do retângulo áureo, com a obtenção de um quadrado e um retângulo menor, semelhante ao original. Os participantes do grupo G-2, em suas respostas, se referiram apenas à semelhança entre o retângulo áureo e aquele retângulo imaginário que “contém” a fachada do Partenon e somente três estudantes, dentre os demais, fizeram menção à semelhança entre os retângulos obtidos “a partir dele [do retângulo áureo]”, conforme notamos nas respostas abaixo:

É um retângulo obtido através de um critério específico que garante precisão, lógica e harmonia e, que a partir dele [do retângulo áureo] pode [sic] construir outros com a mesma lógica, precisão e harmonia, que serão semelhantes ao primeiro... G-1(B).

Um retângulo áureo sempre será semelhante a outro retângulo obtido a partir dele, encontrando uma nova figura composta de um quadrado e um retângulo com mesma razão de proporção do inicial (G-3 (B)).

Um retângulo áureo sempre tem uma razão de semelhança, em relação a um outro retângulo obtido a partir dele, mas esse retângulo obtido não é qualquer (G-3 (A)).

As conclusões apresentadas pelo grupo G-3 demonstram que durante o desenvolvimento da atividade foram feitas correções necessárias, pois, embora tenha sido observada uma certa instabilidade nas respostas anteriores, em relação aos termos “comprimento” e “largura”, os dois integrantes do grupo mencionaram a semelhança entre um retângulo áureo e qualquer outro obtido a partir dele.

Constatamos que, embora alguns dos integrantes do grupo G-1, ao elaborar sua definição, tenham omitido a possibilidade de subdivisão iterativa do retângulo áureo, com a obtenção de um quadrado e um retângulo menor semelhante ao original, essas características foram discutidas durante a realização da atividade. O quadro 1, a seguir, mostra que, em princípio, havia ficado mais evidente para

alguns integrantes deste grupo o fato de que a razão entre o lado maior e o lado menor é um número aproximado de 1,6. Pelas falas dos participantes percebe-se também que ainda não haviam associado ao retângulo áureo a possibilidade de subdivisão infinita, tendo como resultado um quadrado e um retângulo menor. No entanto, notamos que as tentativas de construção da figura e as conjecturas a respeito dessa construção permitiram que retomassem e explicitassem as características do retângulo áureo, vistas durante as atividades já realizadas.

QUADRO 1 – TRANSCRIÇÃO DE PARTE DE DISCUSSÃO – GRUPO G-1 – ATIVIDADE 4 (grifos nossos)

G-1 (D): *a única característica foi a razão de proporcionalidade... a única...*

G-1 (B): a razão de proporcionalidade... também acho... você acha que tem outra coisa?

G-1 (A): não tem os retângulos?

G-1 (E): eu acho que não tem nada a ver... *eu acho que a partir de qualquer retângulo... (...)*

G-1 (D): é... mas é que pode ser uma característica...

G-1 (C): mas tem uma coisa aqui... não seria também harmônico, alguma coisa?

G-1 (E): é... porque você pega aqui, ó, tem uma vez e meia, mais ou menos, a largura... por aqui também...

G-1 (D): eu acho que sim... *com qualquer retângulo...* porque se você pegar... faz um quadradinho...

(...)

G-1 (A): mas, eu acho que pode ser outra razão... aqui, vai ter outra razão... mas se você voltar a subdividir, vai ter de ser a mesma razão... *se for dividindo, vai ser a mesma razão...*

G-1 (E): o retângulo áureo tem características especiais ou seja, lógicas e harmônicas... (...)

G-1 (D): *não é qualquer um não, concorda?*

G-1 (E): vamos fazer assim, ó... aí, esse aqui, vai ser assim, este passa pra cá, vai ficar assim... concorda que ele é muito menos harmônico do que este?

G-1 (A): eu acho que quando for construir o retângulo inicial... se você for achar um retângulo, sempre vai ter de dar um retângulo e um quadrado... aqui não dá...

(...)

G-1 (E): é só ele pegar essa medida, e marcar aqui... *sempre vai dar um quadrado e um retângulo...*

G-1 (A): mas a razão de proporcionalidade é menor... tem um critério de construção, sim... (...)

G-1 (B): *acho que nesse caso são retângulos semelhantes...*

G-1 (E): eu acho isso... além da proporcionalidade, tem um critério mais harmônico, que eu não sei exatamente qual é...

(...)

G-1 (C): *a gente pode construir infinitos*, com essa proporção...

(...)

G-1 (E): a gente está achando que o 1,6 é o que define o fato de ser um retângulo áureo...
sempre vai ter de obedecer 1,6, pra ser áureo.

G-1 (D): sim. *Não importa o comprimento e a largura que você tenha... desde que a razão entre o comprimento e a largura seja 1,6.*

Ressaltamos aqui que era fundamental que todos os participantes percebessem a semelhança entre os retângulos que se obtêm pela subdivisão repetida do retângulo áureo, para garantir um bom desempenho durante o desenvolvimento da atividade seguinte, de número 5.

Analisando novamente as respostas dos demais estudantes, à questão: *que relação existe entre o retângulo inicial ABCD e todos os possíveis retângulos dessa subdivisão? Explique.* (item C1.c desta mesma atividade):

[...] possuem lados proporcionais (G-1 (E)).

[...] que a razão dos lados (comprimento/largura) são os mesmos [sic], e, portanto, os retângulos são semelhantes (G-1 (C)).

Por essa razão, ao tomar a largura do retângulo como lado para o quadrado, podemos formar sempre retângulos semelhantes, ou seja, possuem a mesma proporcionalidade (G-1 (D)).

Todos os retângulos obtidos possuem a mesma proporção comprimento/largura, logo, são todos semelhantes ao retângulo ABCD (G-1 (A)).

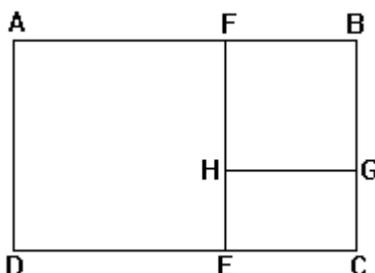
Semelhança. A razão entre o comprimento e a largura é sempre 1,6 (G-2 (A)). (resposta semelhante às apresentadas por G-2 (B) e G-2 (C)).

consideramos que os estudantes estavam preparados para a realização da próxima atividade (de número 5).

Atividade 5

É dado o retângulo áureo ABCD.

FIGURA 54 – RETÂNGULO ÁUREO – ATIVIDADE 5



Durante o desenvolvimento das atividades anteriores, trabalhamos com valores aproximados.

Considere todas as características do retângulo áureo e determine a razão $\frac{AB}{BC}$, sem aproximação.

Material disponível: Apenas a folha da atividade. O aluno não terá à sua disposição qualquer material que permita a medição ou o cálculo da razão entre segmentos.

Análise a priori

Objetivos

Neste ponto do desenvolvimento da seqüência, o estudante já conhecerá do retângulo áureo, a razão aproximada de 1,6 entre as medidas do lado maior e do lado menor, e o fato de que é possível realizar uma subdivisão infinita em seu interior, resultando sempre em um quadrado e um outro retângulo menor, semelhante ao original.

Desejávamos, com esta atividade, que o estudante completasse as informações que iriam compor a definição do retângulo áureo, percebendo a possibilidade de determinar, para a razão entre as medidas do lado maior e do lado menor, um valor sem aproximação – no caso um número irracional.

Características da atividade

Tendo o estudante construído uma idéia (ainda incompleta) de retângulo áureo, durante o desenvolvimento das atividades anteriores, o propósito desta atividade era apresentar uma situação em que as características e propriedades, já conhecidas, do retângulo áureo servissem como ferramentas para a obtenção da razão entre as medidas do lado maior e do lado menor desse retângulo. Com esta atividade, a razão conseguida não seria mais aproximada de 1,6, e sim o número irracional: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é o número de ouro.

Estaríamos então apresentando um problema elaborado no quadro geométrico, em que não seriam fornecidas quaisquer informações do quadro numérico.

Além disso, não seriam colocados à disposição do estudante materiais que permitissem a medição dos lados dos retângulos ou o cálculo da razão entre essas medidas. No entanto, o estudante deveria apresentar um resultado numérico.

O estudante poderia pôr em ação uma estratégia de ataque ao problema, considerando a semelhança dos retângulos e a proporcionalidade dos lados correspondentes nesses retângulos, mas, para o cálculo da razão entre AB e BC, teria necessidade de utilizar um cálculo algébrico, buscando a solução de uma equação do segundo grau, cujos coeficientes seriam representados sob a forma literal.

A solução dessa equação é um número irracional, que foi tratado, desde o princípio, com aproximação de uma casa decimal (1,6), em virtude da imprecisão dos instrumentos de medir, utilizados para o desenvolvimento das atividades iniciais.

Nesse caso, teríamos a interação entre os quadros: geométrico, algébrico e numérico, favorecendo a construção de uma idéia mais completa do retângulo áureo, pois o estudante, após esta atividade, já saberia que a razão entre as medidas do lado maior e do lado menor desse retângulo é o número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Assim, para a realização desta atividade o estudante iria mobilizar conhecimentos sobre:

- figuras geométricas planas e suas propriedades (segmento de reta, quadrado, retângulo);
- semelhança de polígonos;
- proporcionalidade;
- cálculo algébrico;
- resolução de equações literais do segundo grau.

Prováveis estratégias e dificuldades

A organização dos estudantes em grupos deveria possibilitar a discussão a respeito dos dados levantados durante o desenvolvimento das atividades anteriores, que serviriam como hipóteses para a prova a ser construída.

Esperávamos, então, que o estudante considerasse a semelhança entre dois retângulos da figura (por exemplo, $ABCD$ e $BCEF$) e estabelecesse uma relação entre os lados correspondentes desses retângulos, construindo uma

proporção do tipo: $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CE}$.

Uma vez que não há dados numéricos no enunciado da atividade e os instrumentos de medir não iriam ser disponibilizados, essa relação entre os lados correspondentes deveria ter sua representação em linguagem algébrica.

O estudante deveria perceber nessa proporção o caminho para a obtenção da medida de um dos lados do retângulo $ABCD$, utilizando a propriedade fundamental das proporções e resolvendo a equação literal do 2.º grau.

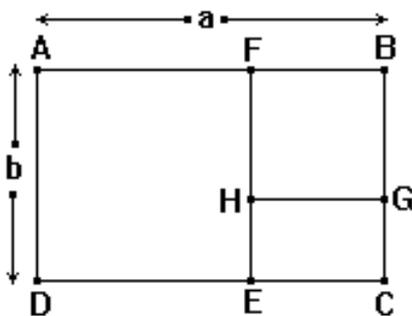
A dificuldade poderia ocorrer, no caso de o estudante não perceber que $CE=AB-BC$, pois seu próximo passo seria a resolução da equação $(BC)^2 = (AB)(CE)$, que não forneceria o resultado esperado.

Poderia ainda considerar dois retângulos “na mesma posição”, levando em conta a semelhança de todos os retângulos formados a partir dessa subdivisão. Nesse caso, poderia tomar os retângulos $ABCD$ e $HGCE$, cuja semelhança permitiria que o estudante escrevesse: $\frac{AB}{HG} = \frac{BC}{GC}$.

Novamente aqui alguma dificuldade talvez ocorresse, se o estudante não observasse que $HG=AB-BC$ e $GC=2.BC-AB$.

Seria possível também ao aluno atribuir “medidas” aos segmentos AB e AD , como mostra a figura a seguir, em que $med(\overline{AB})=a$ e $med(\overline{AD})=b$:

FIGURA 55 – PROVÁVEL ESTRATÉGIA PARA A SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 5



Nesse caso, poderia construir a proporção: $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$, obtendo a equação do 2.º grau: $b^2 + ab - a^2 = 0$.

Aqui, a dificuldade, se houvesse, poderia estar ligada à resolução de equações literais do 2.º grau.

O enunciado não especifica se a prova deve ser apresentada em linguagem matemática. Nesse caso, o estudante teria liberdade de escolha para formalizar suas conclusões, expressando-se em linguagem natural ou utilizando símbolos matemáticos. Mesmo assim, essa formalização deveria requerer uma reorganização das idéias discutidas em grupo e a percepção da necessidade de justificativas coerentes.

Relato da experimentação

A aplicação desta atividade ocorreu em aproximadamente 40 minutos e foi desenvolvida por 10 estudantes organizados nos grupos G-1, G-2 e G-3.

Ao iniciar a atividade, os estudantes já haviam composto uma noção do retângulo áureo (ainda incompleta) e, possivelmente, em virtude das questões do pré-teste, talvez tivessem criado a expectativa de que iríamos tratar de segmentos comensuráveis e incomensuráveis no decorrer da engenharia didática.

G-2 (A), por exemplo, como resposta a esta atividade, escreveu apenas: “é impossível determinar um valor para essa razão, pois as medidas são incomensuráveis”. Observamos que em sua resposta à primeira questão do pré-teste (sobre a seção áurea) o mesmo estudante registrou: “Creio que o ponto P deva estar a uma distância d de A no segmento AB para que AP e PB tenham segmentos áureos. O lado do pentágono regular é segmento áureo de sua diagonal”, demonstrando já haver trabalhado com esse conteúdo, ainda que superficialmente. A segunda questão do pré-teste, sobre a incomensurabilidade de segmentos de reta, foi entregue em branco por esse estudante.

Poderíamos interpretar essas duas respostas às questões do pré-teste supondo que esse estudante teve algum contato com os assuntos “seção áurea de um segmento” e/ou “retângulo áureo”, tem a informação de que os lados do

retângulo áureo são segmentos incomensuráveis, mas ainda não construiu a noção de incomensurabilidade de segmentos de reta.

Os outros dois integrantes do grupo G-2 apresentaram respostas semelhantes:

A razão entre os lados do ret. [sic] áureo se aproxima de 1,6, portanto para este retângulo é impossível determinar $\frac{AB}{BC}$ sem aproximação (G-2 (B)).

É impossível obter um valor sem aproximação pois as medidas dos lados são incomensuráveis (G-2 (C)).

As três respostas parecem estar baseadas na mesma idéia de que, sendo \overline{AB} e \overline{BC} incomensuráveis, não é possível determinar a razão entre os dois segmentos – que poderíamos traduzir por “não existe um número que represente a razão entre as medidas de dois segmentos AB e BC incomensuráveis”, ou “não existe um número sem aproximação que represente a razão entre as medidas de dois segmentos incomensuráveis”.

Percebemos que seria conveniente intervir para observar que a atividade tratava de um retângulo áureo e que as conclusões levantadas nas atividades anteriores deveriam servir como recurso para a solução do problema. Não tínhamos à nossa disposição, para esta atividade, os instrumentos de medir, mas, possuíamos as características do retângulo áureo, que agora poderíamos considerar como hipóteses.

Foram retomadas, em conjunto com a classe, as características do retângulo áureo e o Grupo G-2 reiniciou a atividade 5. Usando agora a semelhança de retângulos, o estudante G-2(B) construiu a proporção: $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CE} = \frac{CE}{EH}$, mas é provável que não tenha percebido sua utilidade para a resolução do problema, pois sua estratégia de resolução foi interrompida.

Outras estratégias foram experimentadas pelo mesmo grupo, conforme mostram os apontamentos feitos pelo observador:

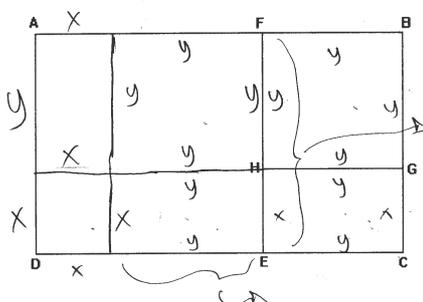
FIGURA 56 – APONTAMENTOS DO OBSERVADOR – GRUPO G-2 – ATIVIDADE 5

Pensaram em seguida, considerar \overline{BC} como uma unidade de medida e transportá-la em \overline{AF} , mas não evoluiu
 Em seguida pensaram em considerar $AD = x = 1$ e portanto a diagonal $DF = x\sqrt{2} = \sqrt{2}$, $AB = y$ e $FB = y - x$
 (não evoluiu)

A seguir, ainda de acordo com as anotações feitas pelo observador, os estudantes do G-2 conjecturaram sobre a possibilidade de trabalhar com áreas, mas, provavelmente, não consideraram uma boa estratégia para ajudá-los na solução do problema, pois também foi abandonada.

O estudante G-2 (A) apresentou o traçado que reproduzimos na figura 57, mas não completou sua resolução.

FIGURA 57 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-2 (A) – ATIVIDADE 5



Esta abordagem produziria a solução desejada, se o estudante construísse a proporção: $\frac{2y+x}{y+x} = \frac{y+x}{y}$. Ao final, obteria a razão $\frac{y}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Os integrantes do grupo G-1, com exceção de G-1 (B), utilizaram a semelhança entre os retângulos ABCD e BCEF, construindo proporções, conforme mostra o excerto apresentado na figura 58, mas ainda sem obter a razão entre os lados do retângulo áureo, solicitada no enunciado da atividade.

FIGURA 58 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (A) – ATIVIDADE 5

aproximação.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{CD} & \overline{CB} &= \overline{EF} & \overline{AF} &= \overline{FE} = \overline{DE} = \overline{AD} = \\ \overline{BC} &= \overline{AD} & \overline{CE} &= \overline{BF} = \overline{GH} = \overline{BG} & \overline{BC} & \end{aligned}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CG}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AF} + \overline{BF}}{\overline{BG} + \overline{CG}} = \frac{\overline{AF} + \overline{BF}}{\overline{BF} + \overline{CG}} = \frac{\overline{AF} + \overline{BF}}{\overline{BF} + (\overline{BC} - \overline{BG})} =$$

$$= \frac{\overline{AF} + \overline{BF}}{\overline{BF} + \overline{BC} - \overline{BG}}$$

O estudante G-1 (B) também considerou a semelhança entre os retângulos ABCD e BCEF e desenvolveu sua solução a partir de uma proporção formada pelos lados correspondentes nesses retângulos:

FIGURA 59 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (B) – ATIVIDADE 5

aproximação.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{GH}}$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB} \times \overline{CE}$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot (\overline{AB} - \overline{AF})$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AF}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{DC} \\ \overline{AB} &= \overline{FE} = \overline{BC} \\ \overline{BF} &= \overline{GH} = \overline{CE} \\ \overline{AF} &= \overline{DE} \\ \overline{CE} &= \overline{AB} - \overline{AF} \end{aligned}$$

A solução do problema estava, assim, encaminhada pelo estudante G-1 (B), bastando apenas que percebesse que $AF = BC$. Nesse caso, teríamos a equação literal do 2.º grau: $BC^2 + (AB)(BC) - AB^2 = 0$, que forneceria a razão solicitada no problema.

A estratégia empregada pelos integrantes do G-3 foi iniciada com a subdivisão do retângulo dado, conforme pode ser observado nas figuras 60 e 61:

FIGURA 60 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (A) – ATIVIDADE 5 (i)

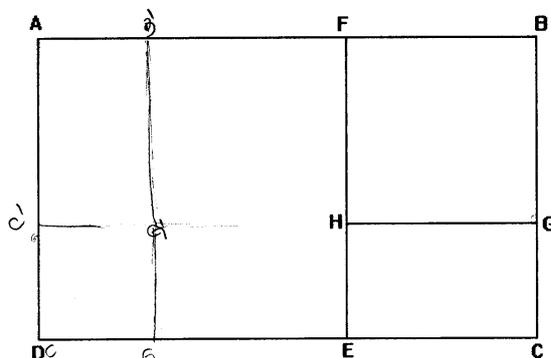


FIGURA 61 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (A) – ATIVIDADE 5 (ii)

$$AB = 2FB + CG$$

$$BC = FB + CG$$

Logo,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2FB + CG}{FB + CG}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2(BC - CG) + CG}{BC}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2BC - 2CG + CG}{BC}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2BC - CG}{BC}$$

Resumo

$$FB = BC - CG$$

$$AB = 2FB + CG$$

$$AB = 2(BC - CG) + CG$$

$$AB = 2BC - 2CG + CG$$

$$AB = 2BC - CG$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2BC - CG}{BC} =$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2BC}{BC} - \frac{CG}{BC}$$

$$\frac{AB}{BC} = 2 - \frac{CG}{BC}$$

Tendo partido da mesma subdivisão do retângulo dado, G-3 (B) obteve: $AB = 2.FB + CG$ e desenvolveu uma estratégia que permitiria obter o resultado desejado. Seu desenvolvimento pode ser observado na próxima figura, de número 62:

FIGURA 62 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (B) – ATIVIDADE 5

$$\begin{aligned}
 AB &= 2FB + GC \\
 BC &= FB + GC \\
 \text{Logo, } \frac{AB}{BC} &= \frac{2FB + GC}{FB + GC}
 \end{aligned}$$

$$\frac{AB}{AF} = \frac{BC}{BG}$$

$$\frac{2FB + GC}{FB + GC} = \frac{FB + GC}{FB}$$

$$(FB + GC)(FB + GC) = FB(2FB + GC)$$

$$FB^2 + 2FBGC + GC^2 = 2FB^2 + FBGC$$

$$FB^2 + FBGC + GC^2 = 0$$

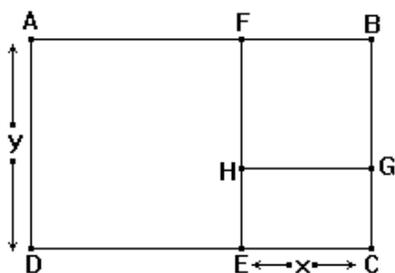
Entendemos que nesse desenvolvimento o estudante tenha considerado, implicitamente, a semelhança entre os retângulos ABCD e BCEF para construir a proporção $\frac{AB}{AF} = \frac{BC}{BG}$.

A partir daí, salvo o engano ao colocar um sinal (pois o correto seria escrever: $-FB^2 + FB.GC + GC^2 = 0$), essa estratégia permitiria ao estudante determinar a razão entre o lado maior e o lado menor do retângulo dado, conforme havia sido solicitado.

Notamos que havia necessidade de intervenção, pois esta sessão deveria ser encerrada e, embora tivéssemos soluções encaminhadas, percebemos que estavam encontrando dificuldades em avançar em suas estratégias.

Utilizamos, então, a escolha de um dos integrantes do G-2, em suas conjecturas e tentativas de resolução: $AD = y$ e $EC = x$ e a figura da atividade 5 passou a ser a seguinte:

FIGURA 63 – ESTRATÉGIA INICIADA POR UM INTEGRANTE DO G-2 – ATIVIDADE 5



Foram revistas as características do retângulo áureo e discutida a possibilidade de utilizar a semelhança entre os retângulos da figura, conforme alguns dos participantes já haviam feito, implicitamente. Sugerimos, assim, que identificassem os retângulos semelhantes naquela figura. Desses, foram destacados os retângulos $ABCD$ e $BCEF$, e os estudantes foram convidados a determinar a razão entre as medidas de AB e CD , para a aula seguinte.

Teriam, então, oportunidade de pesquisar e discutir a respeito do retângulo áureo e complementar o trabalho que havia sido iniciado em classe.

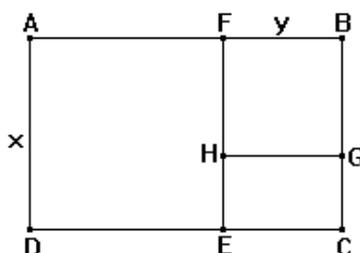
Análise a posteriori

Analisando o resultado da aplicação desta atividade, percebemos que, não obstante alguns estudantes tenham recorrido à mudança do quadro geométrico (considerando a semelhança entre os retângulos) para o quadro algébrico (construindo as proporções formadas pelos lados correspondentes nesses retângulos), houve dificuldade na manipulação dos dados algébricos, necessária para a elaboração da equação que deveria fornecer o resultado desejado.

Notamos, ainda, examinando as produções dos estudantes G-1 (B) e G-3 (B) (figuras 59 e 62, respectivamente), que às dificuldades que já havíamos previsto em nossa análise *a priori* talvez tenha sido acrescentada uma outra, relacionada com a resolução de equações literais do segundo grau. Ou seja, é possível que o bloqueio tenha ocorrido, por ser esperada uma solução numérica para uma equação cujos coeficientes estavam representados por letras.

Essa dificuldade talvez fosse reduzida, se, no enunciado, a figura apresentasse outras informações, como:

FIGURA 64 – OUTRA POSSIBILIDADE PARA O ENUNCIADO DA ATIVIDADE 5



Nesse caso, o estudante ainda teria de buscar a solução de uma equação literal representada da forma: $x^2 - xy - y^2 = 0$, que é aparentemente mais simples do que a equação: $BC^2 + AB.BC - AB^2 = 0$.

Ainda que houvesse esse acréscimo de informações, seria indispensável que os estudantes recorressem aos jogos de quadros para solucionar o problema, conforme havíamos previsto em nossa análise *a priori*.

3.^a sessão

Institucionalização

Levando em conta os resultados das atividades propostas e o plano de trabalho que havíamos elaborado para dar continuidade à engenharia didática, este seria o momento oportuno para realizar a institucionalização da noção de “retângulo áureo”.

Em conjunto com os estudantes, fizemos uma retrospectiva das atividades anteriores, explicitando os objetivos que desejávamos alcançar com a proposta de cada uma delas. Deixamos claro que para a elaboração da primeira atividade escolhemos outros ambientes, aparentemente não relacionados com a matemática, a fim de despertar-lhes o interesse para a regularidade com que

ocorre o número aproximado de 1,6 e, em seguida, iniciar a abordagem do tema que seria o objeto de nosso estudo – o retângulo áureo.

Esclarecemos que, tendo trabalhado com valores aproximados, até a atividade 4, ao apresentar a atividade 5, tínhamos o propósito de que percebessem que a razão entre as medidas do lado maior e do lado menor do retângulo áureo (aqui tratados como “comprimento” e “largura”, respectivamente), é um número irracional.

O desenvolvimento da atividade, por quatro estudantes, entre a sessão anterior e esta, permitiu que discutíssemos a estratégia iniciada no final do último encontro e calculássemos a razão entre as medidas do lado maior e do lado menor do retângulo áureo, obtendo como resposta, o número irracional: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Finalizando a institucionalização, foram levantadas as características do retângulo áureo:

- a razão entre o lado maior e o menor é igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$;
- é possível realizar no retângulo áureo um número indeterminado de subdivisões, tendo como resultado sempre um quadrado e um retângulo menor;
- todos os retângulos obtidos a partir dessas subdivisões são semelhantes e são áureos.

Consideramos que durante a institucionalização foram feitas as correções necessárias e foi suprida a ausência de dados e informações que eventualmente tenham dificultado o desenvolvimento da atividade. Entendendo que se trata de conhecimento em construção, acreditamos que com a

realização das demais atividades a noção de “retângulo áureo” foi complementada e aprimorada.

Atividade 6 – A construção do retângulo áureo

Primeira parte

1. Construa um retângulo áureo, sem trabalhar com medidas.
2. Faça um registro escrito de sua construção, justificando cada passo.

Segunda parte

Use a régua graduada e a calculadora, para verificar se as medidas do retângulo construído também garantem que seja um retângulo áureo.

Material disponível

Primeira parte: compassos, esquadros não graduados e réguas não graduadas.

Segunda parte: calculadoras e réguas graduadas.

Análise a priori

Objetivos e características da atividade

Esta atividade complementar as anteriores, auxiliando os estudantes na construção da noção de retângulo áureo.

Escolhemos apresentar a primeira parte desta atividade convidando os estudantes à construção de um retângulo áureo, sem disponibilizar qualquer material que permitisse a medição, para restringir as estratégias possíveis, exigindo que os estudantes recorressem a conhecimentos já institucionalizados, inclusive durante o desenvolvimento desta seqüência.

A solicitação assim apresentada exigiria um trabalho no quadro geométrico, que deveria incluir as características do retângulo áureo vistas nas atividades anteriores, conhecimentos sobre paralelismo e perpendicularismo e sobre construções geométricas de figuras planas. O estudante poderia ainda utilizar seus conhecimentos referentes à construção geométrica de números irracionais, como auxílio para o traçado solicitado. Assim, considerávamos que esta etapa da atividade poderia permitir que o estudante percebesse a importância do recurso das construções geométricas no estudo de outros conteúdos.

O trabalho em grupo deveria auxiliar o estudante em sua construção individual, propiciando a oportunidade de discussão para a elaboração das justificativas solicitadas.

Mais do que a obtenção de uma figura que atendesse exatamente ao que foi pedido – um retângulo áureo –, nossa intenção era provocar a discussão sobre as características da figura, as estratégias para o traçado e a busca de conhecimentos já institucionalizados, deste ou de outro quadro de conhecimentos, para a resolução do problema.

Prováveis estratégias e dificuldades

Seriam disponibilizados, para a construção requisitada nesta primeira etapa, réguas e esquadros não graduados e compassos, para permitir que o estudante tivesse oportunidade de elaborar seu próprio plano de construção da figura, ainda que percebesse alguma inconsistência em seu desenvolvimento, em virtude da aparente limitação apresentada pelos instrumentos disponíveis.

Os esquadros foram incluídos nesse material para evitar que algum estudante se visse impossibilitado de realizar a atividade, por motivos que não eram o nosso foco de atenção no momento. Assim, mesmo o estudante que não dominasse as técnicas de construção de retas paralelas e perpendiculares, usando apenas régua e compasso, poderia desenvolver a construção proposta, utilizando régua e esquadro.

Pela atividade anterior, o estudante já saberia que a razão entre as medidas do lado maior e do lado menor de um retângulo áureo é de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Seria possível, então, que o estudante construísse um triângulo retângulo com catetos de medidas $1u$ e $2u$. Em seguida, pelo teorema de Pitágoras, mostraria que a hipotenusa desse triângulo mede $\sqrt{5}u$.

Por processos geométricos de transporte de segmentos e determinação do ponto médio de um segmento, o estudante poderia construir geometricamente um segmento de comprimento $\frac{1+\sqrt{5}}{2}u$, que seria o lado maior do retângulo desejado. O lado menor, nesse caso, mediria $1u$.

Esperávamos, dessa forma, que os estudantes que já tivessem os conhecimentos prévios, necessários para a construção geométrica de números irracionais, sentissem necessidade de utilizá-los como ferramentas para a construção do retângulo áureo, considerando que a razão entre as medidas do lado maior e do lado menor desse retângulo é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Algumas dificuldades possíveis seriam aquelas decorrentes da ausência de noções de quadriláteros e suas propriedades ou do processo de construção geométrica de figuras ou de números irracionais. Entretanto, as interações entre os participantes e nossa intervenção poderiam auxiliá-los a superar essas dificuldades.

Na segunda parte da atividade, o estudante deveria verificar se o retângulo construído apresentava dimensões tais que a razão entre o lado maior e o lado menor era um valor aproximado de $1,6$, utilizando os instrumentos de medida, que nesta etapa deveriam ser disponibilizados.

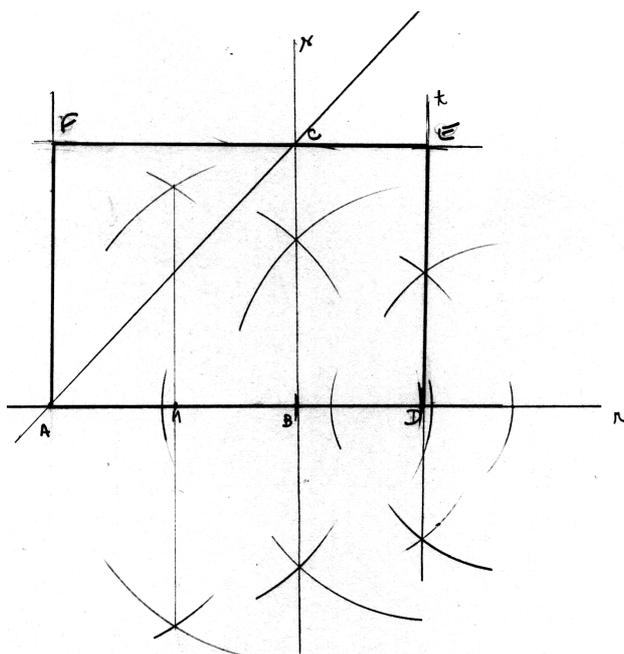
Durante o desenvolvimento desta atividade, o estudante poderia mobilizar seus conhecimentos sobre figuras geométricas planas, paralelismo, perpendicularismo, construções geométricas de figuras planas e de números irracionais.

Relato da experimentação

Esta atividade foi desenvolvida em aproximadamente 45 minutos, por 8 estudantes, organizados da seguinte forma: grupo G-1 (4 estudantes), G-2 (2 estudantes) e G-3 (2 estudantes).

Embora já houvéssimos desenvolvido a atividade 5, com a prova de que a razão entre o lado maior e o lado menor do retângulo áureo é o número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, os traçados desenvolvidos pelos integrantes do grupo G-3, em resposta a esta atividade, apresentam retângulos cujos lados estão à razão de 1,5 (figura 65, a seguir).

FIGURA 65 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO - G-3 (A) – ATIVIDADE 6



No texto que acompanha a construção, o aluno explica sua estratégia:

- Construir uma reta r e dois pontos A e B que pertencem a r .
- Construir uma reta $s \perp r$ passando por B .
- Transportar com o compasso a medida de \overline{AB} para a reta s a partir do ponto B , obtendo C .

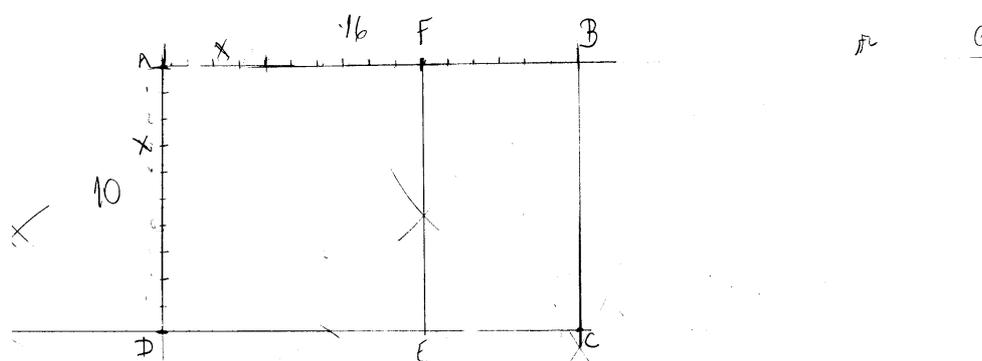
- Encontrar o ponto médio M de \overline{AB} e transportar a medida de \overline{MB} , a partir do ponto B, obtendo o ponto D.
- Traçar uma reta $t \perp r$, passando por D.
- Com o esquadro traçar uma paralela à reta t que passa pelo ponto A e traçar uma paralela à reta r que passa por C, obtendo as intersecções E e F.

Tendo assim, o retângulo ADEF.

De acordo com o relato do observador, a estratégia adotada pelos integrantes do grupo G-2 também tinha como ponto de partida a determinação do ponto médio de um segmento qualquer, mas foi abandonada e a atividade foi entregue em branco.

Quanto ao grupo G-1, a abordagem empregada por três estudantes foi iniciada com a construção de um quadrado, para em seguida completarem a figura com o traçado do retângulo menor. Após algumas tentativas, essa idéia foi rejeitada, sendo iniciada uma outra construção. Partindo do traçado de duas retas perpendiculares, escolheram como unidade de medida uma abertura arbitrária do compasso, e, por transporte de segmentos, a partir do ponto de intersecção entre as duas retas, determinaram 10 pontos sobre uma delas (construindo o lado menor do retângulo) e 16 pontos sobre a outra (construindo o lado maior). Assim, o retângulo traçado tem razão de 1,6 entre o lado maior e o menor. Apresentamos na figura 66, a seguir, o retângulo construído por um desses estudantes:

FIGURA 66 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (C) – ATIVIDADE 6

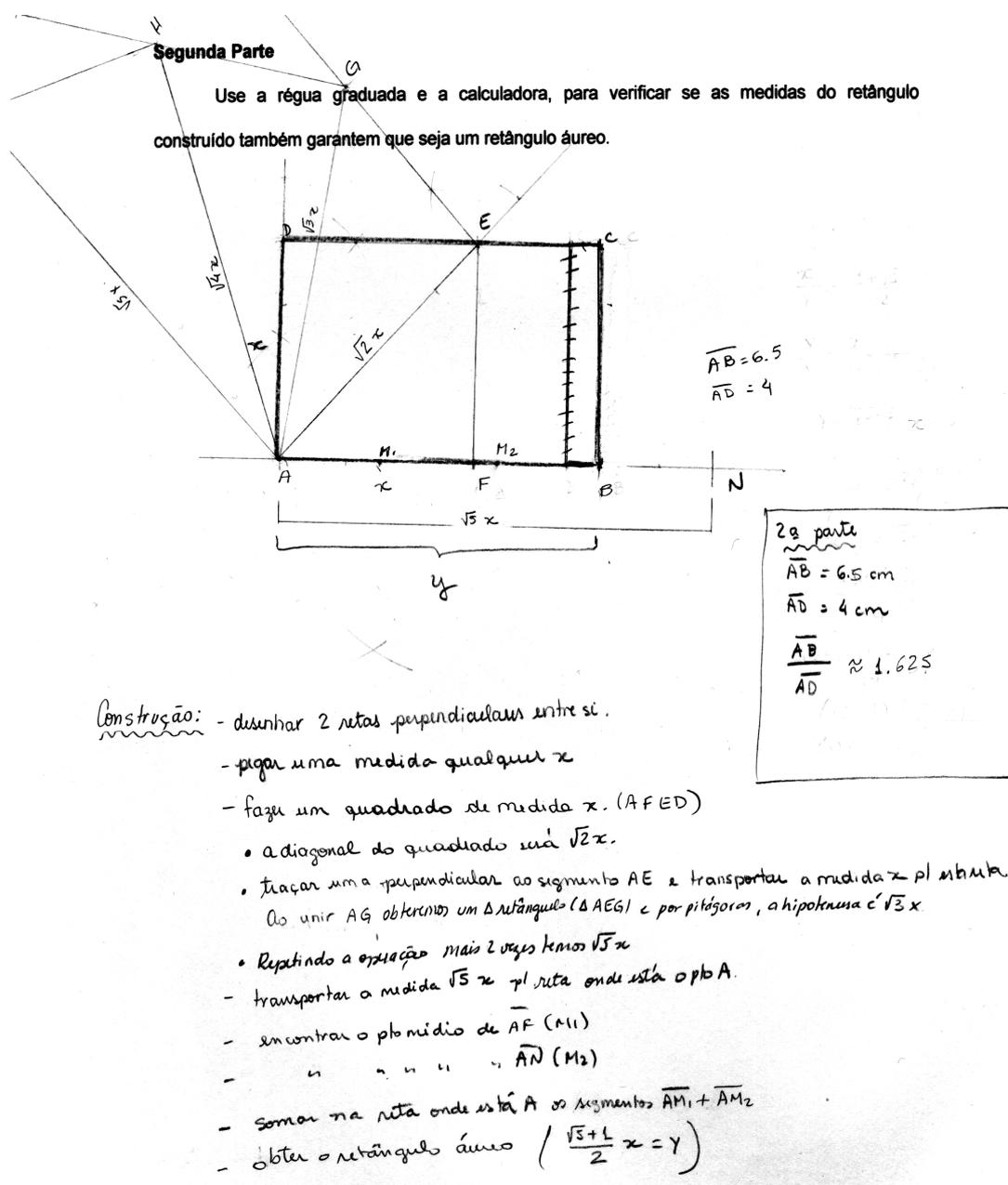


- 1) Fazer uma reta r ,
- 2) Com uma abertura qualquer, fez 16 partes iguais nela, o último ponto é o B.
- 3) Fez uma perpendicular a r passando por A.
- 4) Com mesma abertura que fez no segmento AB, fez 10 partes no segmento perpendicular a AB. O último ponto é o D.
- 5) Fez uma perpendicular a AB, passando por B. O ponto C está neste segmento sendo $AD = BC$.
- 6) Fez o segmento DC.

$$\frac{AB}{BC} = 1,62$$

Havíamos considerado em nossa análise *a priori* a possibilidade de os estudantes recorrerem à construção geométrica do número irracional $\sqrt{5}$, por meio do traçado de um triângulo retângulo de catetos com medidas $1u$ e $2u$. Essa abordagem foi utilizada no traçado do retângulo áureo apresentado por G-1 (D), pela construção da conhecida espiral de triângulos retângulos. A partir de um quadrado de lado “x”, o estudante aplicou, sucessivamente, o teorema de Pitágoras, obtendo triângulos retângulos em que um dos catetos mede “x” e o outro cateto é a hipotenusa do triângulo construído anteriormente. O resultado dessa construção pode ser visto na figura 67:

FIGURA 67 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (D) – ATIVIDADE 6



Análise a posteriori

Ao estabelecermos nossos objetivos para esta atividade, mencionamos que nos importava mais a discussão que poderia ocorrer nos grupos a respeito das possibilidades da execução da tarefa e das características da figura solicitada. Interessava-nos, sim, que o estudante realizasse tentativas, buscando conhecimentos já institucionalizados, que pudessem servir como ferramentas de auxílio na elaboração desta construção.

Tanto o traçado feito por transporte de segmentos quanto aquele desenvolvido por meio da construção geométrica de números irracionais, atenderam à solicitação feita no enunciado. O estudante (G-1 (D)) buscou ferramentas do quadro geométrico para a construção de um objeto do quadro numérico – o número $\sqrt{5}$ –, e este número, ao mesmo tempo, serviu como ferramenta para a solução de um problema enunciado no quadro geométrico – a construção do retângulo áureo.

Atividade 7

Primeira parte: Construa um retângulo ABCD, de acordo com as orientações abaixo:

1. Traçamos a reta r , suporte de \overline{AB} .
2. Construimos um arco com centro em B e raio AB , interceptando a reta r , no ponto E .
3. Pelo ponto B , construimos uma reta s , perpendicular a r , interceptando o arco do item anterior, no ponto F .
4. Seja M o ponto médio de \overline{BE} .
5. Construimos um segundo arco, com centro em M , e raio MF , interceptando \overline{AB} no ponto X .
6. Tomamos um ponto C sobre a reta s , tal que $XB=BC$.
7. BC é o lado menor do retângulo $ABCD$ desejado.
8. Por C , traçamos uma paralela a r .
9. Por A , traçamos uma paralela a s .
10. Chamamos de D o ponto de intersecção das retas traçadas nos itens 8 e 9.

Segunda parte: Prove que esse retângulo é áureo.

Material disponível:

Primeira parte: compassos, esquadros sem graduação e régua sem graduação.

Nesse caso, trabalhando no contexto da figura traçada na primeira parte (quadro geométrico), os estudantes poderiam construir seus argumentos no quadro algébrico, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo BMF (ver figura 68) e determinando a medida de sua hipotenusa \overline{FM} .

Era esperado que os participantes percebessem que, por construção, $FB = AB = BE$ (raios da mesma circunferência com centro em B). Assim, como resultado da aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo BMF , seria obtida a igualdade $FM = \frac{AB \cdot \sqrt{5}}{2}$.

Nossa expectativa era de que, em seguida, os estudantes notassem que $\overline{XM} \equiv \overline{FM}$ (raios da mesma circunferência com centro em M) e, finalmente, que utilizassem a relação $XM = XB + BM$ para determinar a medida de \overline{XB} . Poderiam, então, chegar à igualdade: $XB = FM - BM$, com $FM = \frac{AB \cdot \sqrt{5}}{2}$ e $BM = \frac{AB}{2}$.

Dessa forma, o estudante poderia obter a medida do lado menor do retângulo, pois $XB = BC$. Então, $BC = \frac{AB(\sqrt{5}-1)}{2}$.

O problema estaria resolvido quando o estudante determinasse a razão entre as medidas do lado maior e do lado menor do retângulo, obtendo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Assim, em todo esse processo o estudante estaria recorrendo aos “jogos de quadros”, como estratégia de resolução de uma situação proposta no quadro geométrico, cuja solução é um elemento do quadro numérico.

Prováveis estratégias e dificuldades

Primeira parte

Novamente aqui, ao selecionar o material que iríamos disponibilizar, pretendíamos eliminar o risco de algum estudante deixar de realizar a construção, por desconhecimento de técnicas do desenho geométrico (por exemplo, o estudante que não se lembrasse do processo de construção de retas paralelas ou perpendiculares com régua e compasso poderia utilizar os esquadros).

Esta primeira parte da atividade seria a preparação do contexto em que os estudantes iriam trabalhar durante a segunda parte, logo a seguir.

Segunda parte

O estudante teria à sua disposição apenas elementos do quadro geométrico, para provar que na figura construída se encontram as propriedades do retângulo áureo.

Poderia parecer uma boa estratégia subdividir o retângulo construído, formando um quadrado e um retângulo menor.

Nesse caso, poderia também ocorrer ao estudante a idéia de utilizar o mesmo processo, que foi útil, para a prova de que $\frac{AB}{BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ durante o desenvolvimento da atividade 5, considerando a semelhança entre os retângulos formados no interior do retângulo construído.

Entretanto, nesta segunda etapa da atividade 7, o estudante não iria dispor de instrumentos para obter as medidas ou para a construção geométrica.

Talvez o estudante tivesse, nesse caso, a idéia de traçar à mão livre um segmento de reta no interior do retângulo, formando um quadrado e um

retângulo menor, e, em seguida, poderia considerar a semelhança entre os retângulos (o original e o menor, que ele teria construído).

É certo que estamos, desde o princípio, trabalhando com o retângulo áureo. Por isso, o estudante poderia tirar conclusões a respeito de estarmos apresentando etapas para a construção desse retângulo. Entretanto, o enunciado da atividade 7 não deixa isso evidente.

Além disso, não há qualquer menção à formação de quadrados e retângulos menores, no interior da figura, nem sobre a semelhança entre os retângulos que o estudante viesse a construir por esse processo. Nesse caso, o estudante não teria a semelhança dos retângulos, como fato verdadeiro, e, sendo assim, não poderia utilizar esse elemento, como hipótese, em sua demonstração. Ficaria, então, descartada a possibilidade de adotar, novamente, a estratégia que foi útil durante a realização da atividade 5.

Presumíamos que, diante dessa dificuldade, o estudante percebesse a possibilidade de aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo BFM. O cálculo da hipotenusa desse triângulo permitiria o desenvolvimento de uma justificativa, com a obtenção do número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ como razão entre as medidas do lado maior e do lado menor do retângulo construído e a conseqüente conclusão de que esse retângulo é áureo.

Deveria, para isso, recorrer aos seus conhecimentos sobre:

- figuras geométricas (segmento de reta, retângulo, triângulo, circunferência);
- perpendicularismo e paralelismo entre retas;
- teorema de Pitágoras;
- cálculo algébrico;
- resolução de equações.

Relato da experimentação e análise *a posteriori*

Esta atividade foi realizada por 8 estudantes: 4 do grupo G-1, 2 do grupo G-2 e 2 do grupo G-3. Sua aplicação teve a duração de aproximadamente 45 minutos: 10 minutos para a primeira parte e 35 minutos para a segunda.

Não notamos dificuldades durante a construção do retângulo, a não ser por um dos participantes que não se lembrava da noção de reta suporte.

Quanto ao desenvolvimento da segunda parte, percebemos que o grupo G-2 discutia sobre a necessidade de provar que $\frac{AB}{BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, para que pudessem afirmar que o retângulo ABCD é áureo. Esse princípio de discussão era muito importante, pois demonstrava que os conhecimentos construídos durante a atividade 5 estavam sendo utilizados como ferramentas.

Entretanto, em sua estratégia, reproduziram a demonstração feita durante a institucionalização que encerrou a atividade 5. Para tornar possível essa demonstração, traçaram um retângulo auxiliar no interior da figura construída na primeira parte da atividade, reproduzindo a subdivisão do retângulo áureo vista nas atividades anteriores e, em seguida, consideraram como hipótese a semelhança entre os retângulos (o original e o auxiliar).

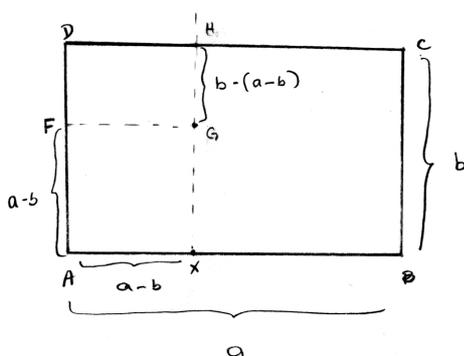
O grupo G-1 também demonstrou dúvidas a respeito de estarmos solicitando a mesma demonstração desenvolvida durante a atividade 5, questionando se antes deveriam provar a semelhança entre os retângulos (o original ABCD e o auxiliar), para, em seguida, provar que o retângulo ABCD é áureo.

Havíamos previsto que ocorreria aos estudantes a idéia de usar a mesma estratégia que foi útil ao longo do desenvolvimento da atividade 5, trabalhada durante a aula anterior, pelo fato de, em ambas as atividades (5 e 7), a resolução exigir a obtenção do mesmo número irracional: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Constatamos que a intervenção era necessária neste momento, e lembramos à classe que na atividade 5 era mencionado no enunciado que o retângulo era áureo e, por isso, estava garantida a semelhança entre os retângulos da figura. Pedimos que refletissem sobre a semelhança dos retângulos na atividade 7 (o retângulo ABCD e o retângulo construído por eles, para auxiliar na demonstração) e verificassem se essa semelhança poderia ser considerada fato verdadeiro no contexto da atividade 7.

Essa observação levou o grupo G-1 a discutir sobre a possibilidade de provar a semelhança dos retângulos (o retângulo ABCD e o retângulo auxiliar), para, logo após, utilizar essa semelhança como hipótese e provar que o retângulo ABCD é áureo. As figuras 69 e 70, a seguir, mostram o desenvolvimento apresentado por G-1 (D):

FIGURA 69 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (D) – ATIVIDADE 7, SEGUNDA PARTE (I)



Por construção temos X e $\overline{BX} \equiv \overline{BC}$

$$\overline{AX} = a - b$$

$$\overline{BC} = b$$

$$\overline{AB} = a$$

$$\overline{DF} = b - (a - b)$$

Construímos $\square AXGH$ para criar o $\square DFGH$
e verificar se $R_{ABCD} \sim R_{DFGH}$.

* Se $R_{ABCD} \sim R_{DFGH}$ e a razão de proporcionalidade for $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ou $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(dependendo se a razão for comp/larg ou larg/comp) provamos que

R_{ABCD} é um retângulo áureo.

FIGURA 70 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (D) – ATIVIDADE 7, SEGUNDA PARTE (ii)

* Então, vamos encontrar a razão de proporcionalidade de ambos retângulos:

$$R_{ABCD} \sim R_{DFGH}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a-b}{b-(a-b)}$$

$$a(b-(a-b)) = b(a-b)$$

$$a(b-a+b) = ab - b^2$$

$$2ab - a^2 = ab - b^2$$

$$a^2 - ab - b^2 = 0$$

$$a = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4(-b^2)}}{2}$$

$$a = \frac{b \pm \sqrt{5b}}{2}$$

$$a = \frac{b \pm b\sqrt{5}}{2}$$

$$a = b \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$$

$$a = L$$

$$b = -b$$

$$c = -4b^2$$

Novamente, como estamos referindo-nos de medidas posi-

$$tivos: a = b \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Logo, podemos ver que \exists uma razão de proporcionalidade entre $\frac{a}{b}$ que é a mesma razão de R_{DFGH} , e esta razão é um número áureo, logo o R_{ABCD} é um retângulo áureo.

Neste caso, quando o estudante diz: “Então, vamos encontrar a razão de proporcionalidade de ambos retângulos: $R_{ABCD} \sim R_{DFGH} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a-b}{b-(a-b)}$ ”, está considerando a semelhança entre os retângulos ABCD e DFGH como hipótese, para provar que o retângulo ABCD é áureo. G-1 (D) não havia percebido que essa semelhança estaria garantida apenas no caso de ABCD ser retângulo áureo – a tese foi usada como hipótese.

Observamos, então, que neste caso, embora o estudante tenha recorrido à mudança de quadros, utilizando ferramentas do quadro algébrico para a resolução de um problema proposto no quadro geométrico, essas ferramentas não eram apropriadas para a situação da atividade 7.

A prova construída por G-2(C) (figura 71) também foi desenvolvida com base nos mesmos argumentos:

As figuras 72 e 73 trazem a prova iniciada por G-1 (A):

FIGURA 72 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (A) – ATIVIDADE 7, PRIMEIRA PARTE

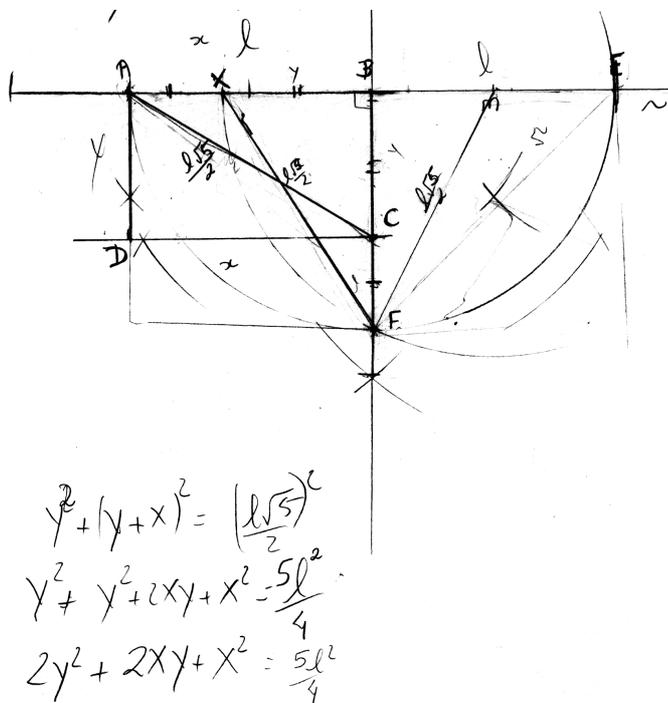
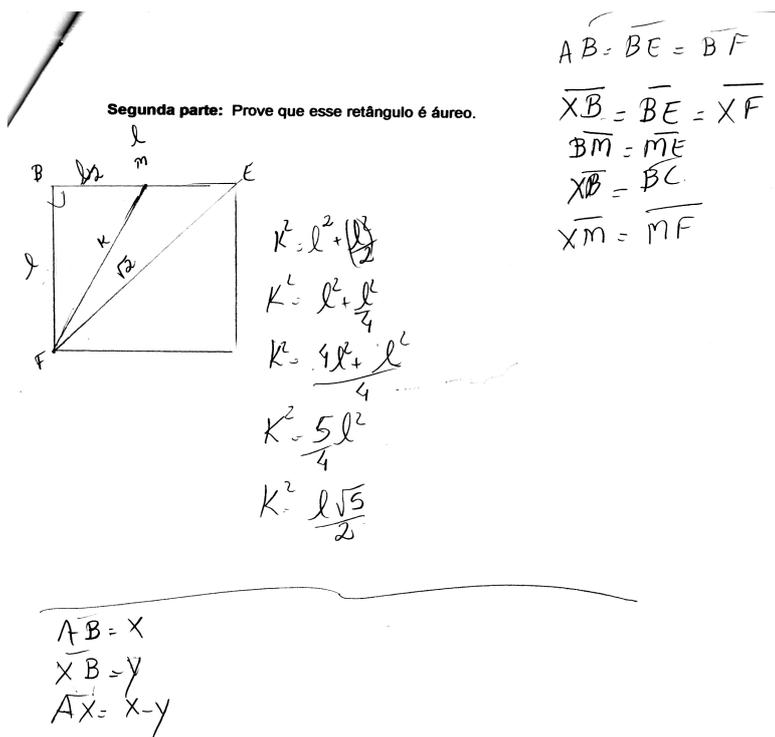


FIGURA 73 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (A) – ATIVIDADE 7, SEGUNDA PARTE



Seu raciocínio estava correto ao iniciar a demonstração, determinando a medida $\frac{l\sqrt{5}}{2}$ da hipotenusa \overline{MF} do triângulo retângulo BMF.

Foram utilizados, aqui, conhecimentos do quadro algébrico, essenciais para a determinação da razão entre \overline{AB} e \overline{BC} . Bastaria para isso considerar que $XM = XB + BM$, tendo $BM = \frac{l}{2}$ e $XM = \frac{l\sqrt{5}}{2}$ (pois XM e MF são raios da mesma circunferência com centro em M).

Há, porém, uma incorreção em sua estratégia, pois, de acordo com a figura 72, o estudante considerou $XF = \frac{l\sqrt{5}}{2}$, ou seja, supôs que a hipotenusa do triângulo XBF é congruente à hipotenusa do triângulo BMF. Nesse caso, teríamos $XB = BM = \frac{l}{2}$, isto é, $XB = \frac{AB}{2}$. Não havia na construção geométrica realizada durante a primeira parte da atividade qualquer elemento que o estudante pudesse tomar como garantia de que $XB = \frac{AB}{2}$.

Embora tenha apresentado essa incorreção e não tenha concluído sua prova, apenas este estudante iniciou um encaminhamento adequado para o desenvolvimento da prova solicitada.

Observando as estratégias adotadas, é possível perceber que os estudantes possuíam os conhecimentos fundamentais para a realização da atividade, recorreram aos “jogos de quadros” como estratégia de resolução, utilizando conhecimentos da álgebra, mas faltou a necessária adequação desses conhecimentos à situação que foi proposta.

Dos demais, um estudante (G-2 (A)) deixou esta parte em branco e dois outros apresentaram um início de conjectura, sem dar continuidade ao processo de demonstração, conforme se observa pelos excertos a seguir.

4.^a sessão

Esta sessão foi dividida em duas partes: a *institucionalização da noção de retângulo áureo* e a aplicação da *atividade 8*.

As atividades 6 e 7 trataram da construção geométrica do retângulo áureo, complementando um conhecimento, cuja construção teve início com a atividade 1.

Para a institucionalização da noção de retângulo áureo, discutimos em primeiro lugar as construções geométricas apresentadas em resposta à atividade 6. Foi feita a socialização da estratégia utilizada pelos integrantes (A), (B) e (C) do grupo G-1, em que foram empregados apenas recursos geométricos (transporte de segmentos).

A estratégia escolhida por G-1 (D) para o traçado do retângulo áureo (atividade 6), a partir da construção geométrica de números irracionais, foi reproduzida na lousa para que os outros estudantes pudessem observar e discutir também a possibilidade de utilização de conhecimentos do quadro numérico, para a solução do problema proposto no quadro geométrico.

Para discutir a prova solicitada na atividade 7, tomamos como ponto de partida a figura e os argumentos apresentados por G-1 (A) (já exibidos nas figuras 72 e 73) e, em seguida, tendo feito as adaptações e correções devidas, concluímos a demonstração.

Desejávamos que os estudantes percebessem a diferença entre os argumentos necessários para as provas solicitadas na atividade 5 e na atividade 7. Lembramos que na atividade 5 era dado um retângulo áureo e, sendo assim, poderíamos considerar, como fato verdadeiro, a semelhança entre os retângulos formados na figura. Observamos, ainda, que na atividade 7 não havia indicação de que o retângulo construído era áureo e por isso os argumentos utilizados para a elaboração da prova da atividade 5 não seriam adequados para esta demonstração.

Com esta atividade, completou-se o contexto que desejávamos construir para o desenvolvimento da noção de incomensurabilidade de segmentos de reta, de acordo com o objetivo estabelecido ao iniciar nossa engenharia didática.

Atividade 8 – m.d.c. de números e segmentos

A) É conhecido o algoritmo de Euclides, que nos permite extrair o máximo divisor comum de números naturais, por meio de divisões sucessivas, como observamos a seguir:

$$\text{m.d.c. } (327, 52) = \dots\dots\dots$$

TABELA 9 – PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS – m.d.c. DE NÚMEROS NATURAIS - ATIVIDADE 8, ITEM A

	6	3			
327	52	15	7		
15	7				

O cálculo estará completo quando obtivermos resto zero e o último divisor será o máximo divisor comum dos números considerados inicialmente.

Procedimento análogo pode ser utilizado para a determinação da “maior medida comum de dois segmentos”.

Abaixo mostramos como você poderia iniciar esse processo:

São dados os segmentos de reta AB e CD. Desejamos determinar a maior medida comum desses segmentos:

FIGURA 76 – SEGMENTOS AB e CD – ATIVIDADE 8 – ITEM A



SOLUÇÃO:

FIGURA 77 - PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS APLICADO AOS SEGMENTOS AB e CD – ATIVIDADE 8 – ITEM A

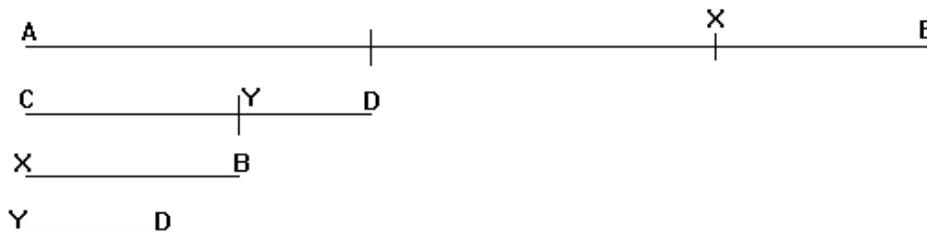


TABELA 10 – PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS APLICADO AOS SEGMENTOS AB e CD – ATIVIDADE 8, ITEM A

	2	1				
AB	CD	XB	YD			
XB	YD					

B) Sejam os segmentos XY e ZW abaixo. Determine um segmento de reta que, de acordo com o algoritmo de Euclides, seja considerado a “maior medida comum” de \overline{XY} e \overline{ZW} .

FIGURA 78 – SEGMENTOS XY e ZW – ATIVIDADE 8, ITEM B

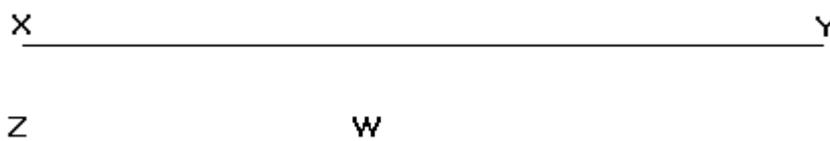


TABELA 11 – PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS APLICADO AOS SEGMENTOS XY e ZW – ATIVIDADE 8, ITEM B

XY	ZW						

C) Determine a “maior medida comum” dos segmentos abaixo:

FIGURA 79 – SEGMENTOS MN e RS – ATIVIDADE 8, ITEM C

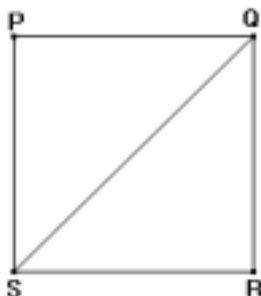


TABELA 12 – PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS APLICADO AOS SEGMENTOS MN e RS – ATIVIDADE 8, ITEM C

MN	RS						

D) Qual é a “maior medida comum” de \overline{SQ} e \overline{QR} , respectivamente diagonal e lado do quadrado PQRS, da figura abaixo?

FIGURA 80 – QUADRADO PQRS – ATIVIDADE 8 – ITEM D



- O que você conclui a respeito dos divisores comuns do lado e da diagonal do quadrado PQRS?
- E sobre os divisores comuns (ou submúltiplos comuns) do lado e da diagonal de um quadrado qualquer?
- Considerando que dois *segmentos* são *comensuráveis*, se possuem um submúltiplo comum, o que você conclui a respeito dos pares de segmentos: AB e CD; XY e ZW; MN e RS; SQ e QR ? O que você conclui a respeito do lado e da diagonal de um quadrado qualquer?

Material disponível: compasso e régua sem graduação.

Análise a priori

Objetivos e características da atividade

Até aqui, os estudantes já teriam construído a noção de retângulo áureo, trabalhando, em princípio, com valores aproximados. Pelo desenvolvimento da atividade 5, utilizando argumentos algébricos, teriam percebido que a razão entre as medidas do lado maior e do lado menor desse retângulo é igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é um número irracional, cuja representação decimal, com aproximação de milésimos, é 1,618...

Deveríamos agora, fazer a ligação entre *retângulo áureo* e *incomensurabilidade de segmentos de reta*, pois o estudo realizado até aqui tinha por finalidade preparar o contexto para a exploração da noção de segmentos incomensuráveis.

Os resultados do pré-teste indicaram a necessidade de fazermos uma abordagem da noção de incomensurabilidade de segmentos para depois estabelecermos a relação entre os dois conteúdos.

Em vista disso, ao aplicar esta atividade, desejávamos apresentar aos estudantes uma situação que fosse ponto de partida para a construção da noção de segmentos incomensuráveis. Escolhemos, então, convidar o estudante a desenvolver, com segmentos, o mesmo raciocínio utilizado para o cálculo do máximo divisor comum de números inteiros, com base no algoritmo de Euclides, determinando, assim, a “maior medida comum” dos segmentos considerados.

Tínhamos a expectativa de que, utilizando o transporte de segmentos, os estudantes percebessem que o processo de divisões sucessivas, quando aplicado a grandezas, pode continuar indefinidamente, sendo, nesse caso, impossível determinar a “maior medida comum” das grandezas consideradas (no

caso, segmentos de reta). Este seria o momento oportuno para a elaboração de uma definição de segmentos incomensuráveis.

Dessa forma, o cálculo do m.d.c. de inteiros, algoritmo conhecido no quadro numérico, seria proposto como ferramenta para a identificação de segmentos comensuráveis e incomensuráveis – o raciocínio é o mesmo, mas o desenvolvimento ocorre no quadro geométrico. Haveria, então, necessidade de domínio do cálculo do m.d.c. de números inteiros, no quadro numérico, para que ocorresse a compreensão inicial da noção de incomensurabilidade de segmentos, nos quadros: geométrico e das grandezas. Assim, a interação entre os quadros numérico, geométrico e das grandezas estaria presente em toda a abordagem que desejávamos fazer sobre segmentos incomensuráveis.

Esperávamos que, usando o processo das divisões sucessivas, os estudantes enxergassem que os pares de segmentos: \overline{AB} e \overline{CD} ; \overline{XY} e \overline{ZW} ; \overline{MN} e \overline{RS} (itens A, B e C, respectivamente) são comensuráveis, pois cada um tem uma “maior medida comum” (em algum ponto do processo de divisões sucessivas, os estudantes deveriam obter resto zero). Não descartávamos a possibilidade de respostas diferentes das esperadas, já que o transporte dos segmentos, feito com o compasso, poderia apresentar imprecisões. Entendíamos que, havendo coerência entre a aplicação do algoritmo e as conclusões do estudante, classificando os pares de segmentos como comensuráveis (quando uma das divisões fosse exata) ou incomensuráveis (quando o processo de divisões sucessivas se prolongasse indefinidamente), poderíamos considerar correta uma resposta diferente daquelas que havíamos previsto.

Para o item D (que trata do quadrado $PQRS$), desejávamos que os estudantes notassem que o transporte de segmentos poderia continuar indefinidamente, e que em virtude disso não é possível determinar um submúltiplo comum ou a “maior medida comum” para os segmentos SQ e QR (respectivamente, diagonal e lado do quadrado $PQRS$). Concluiriam, a partir disso, que \overline{SQ} e \overline{QR} são segmentos incomensuráveis.

Supúnhamos, ainda, que a discussão em grupo levasse os participantes à conclusão de que o lado e a diagonal de um quadrado qualquer são segmentos incomensuráveis.

Posteriormente, o momento da institucionalização deveria incluir uma discussão a respeito da demonstração da incomensurabilidade do lado e da diagonal de qualquer quadrado, com o que os estudantes estariam se preparando para o desenvolvimento da atividade final (atividade 9).

Prováveis estratégias e dificuldades

Para o desenvolvimento desta atividade, o estudante não teria necessidade de elaborar estratégias, ou recorrer a outras ferramentas, a não ser o algoritmo de Euclides, agora aplicado a grandezas.

Por outro lado, tomamos em conta a possibilidade de algum dos participantes não perceber que o processo pode continuar indefinidamente, em virtude de imprecisões que poderiam ocorrer no transporte de segmentos.

Relato da experimentação e análise *a posteriori*

Esta atividade foi desenvolvida em aproximadamente 55 minutos, por 9 estudantes: 5 do grupo G-1, 2 do grupo G-2 e 2 do grupo G-3.

Pareceu-nos que o fato de havermos proposto, inicialmente, o cálculo do m.d.c. de dois números inteiros deixou claro o procedimento que os participantes deveriam utilizar para determinar a “maior medida comum” dos pares de segmentos apresentados na atividade 8.

Já havíamos previsto a possibilidade de imprecisões devido ao uso do compasso, levando os estudantes a resultados diferentes do que esperávamos. Entendemos, então, que G-1 (B) e G-1 (D), que apresentaram as respostas destacadas a seguir, compreenderam a noção de segmentos comensuráveis e segmentos incomensuráveis, embora tenham classificado o par de segmentos AB

e CD como incomensuráveis (na análise *a priori*, antevimos que \overline{AB} e \overline{CD} seriam classificados como segmentos comensuráveis) :

XY e ZW ; MN e RS são segmentos comensuráveis pois possuem um submúltiplo comum; AB e CD ; SQ e QR são segmentos incomensuráveis, pois não têm um segmento menor que caiba nos dois um número x e y de vezes, de forma que o resultado dê exato. Isto é não existe um segmento que seja submúltiplo dos dois (G-1 (B)).

Faltou apenas que G-1 (B) observasse que os números “ x ” e “ y ” devem ser inteiros.

A conclusão de G-1 (D) é exposta no protocolo a seguir:

FIGURA 81 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (D) – ATIVIDADE 8, ITEM D

- a). O que você conclui a respeito dos divisores comuns do lado e da diagonal do quadrado PQRS? *Não haverá medidas inteiras, não há divisor comum entre o lado e a diagonal.*
- b). E sobre os divisores comuns (ou submúltiplos comuns) do lado e da diagonal de um quadrado qualquer? *Não haverá um divisor comum entre a diagonal e o lado do quadrado.*
- c). Considerando que dois segmentos são comensuráveis, se possuem um submúltiplo comum, o que você conclui a respeito dos pares de segmentos: AB e CD ; XY e ZW ; MN e RS ; SQ e QR ? O que você conclui a respeito do lado e da diagonal de um quadrado qualquer?
- XY e ZW
 MN e RS } são segmentos comensuráveis.*
- AB e CD
 SQ e QR } são segmentos incomensuráveis.*
- * Para a diagonal de qualquer quadrado não vamos obter um divisor comum entre o lado e sua diagonal.*

Os integrantes dos grupos G-2 e G-3 concluíram que, dos segmentos indicados, apenas \overline{SQ} e \overline{QR} são segmentos incomensuráveis, classificando os demais pares de segmentos como comensuráveis, conforme havíamos antecipado.

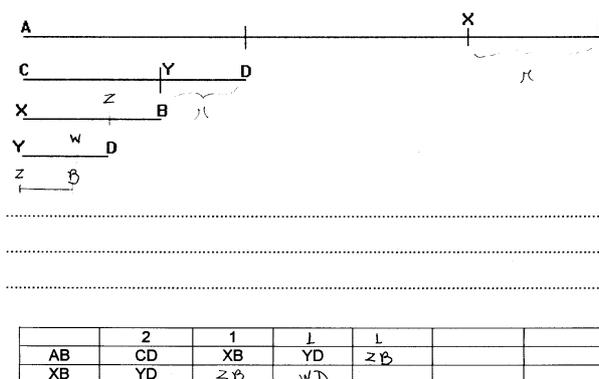
O protocolo a seguir (figura 82) mostra as respostas de G-1(E), a respeito das quais achamos interessante observar que, em vez de concluir que os segmentos SQ e QR são incomensuráveis porque não têm divisores comuns, o estudante usa a recíproca, ou seja, tem certeza de que o lado e a diagonal do quadrado são segmentos incomensuráveis, e, a partir disso, conclui que SQ e QR não têm submúltiplos comuns.

FIGURA 82 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (E) – ATIVIDADE 8, ITEM D

- c) Semelhante MN e RS são comensuráveis.
O lado e a diagonal de um quadrado qualquer são segmentos incomensuráveis.
- b) Não existem divisores comuns do lado e da diagonal de um quadrado qualquer pois são segmentos incomensuráveis.
- a) \overline{SQ} e \overline{QR} são segmentos incomensuráveis, logo, não existem divisores comuns.

Além disso, como pode ser visto no excerto anterior (figura 82), o estudante não classificou os segmentos AB e CD nem os segmentos XY e ZW , para os quais não obteve resto zero, no processo de divisões sucessivas, conforme observamos nos seguintes protocolos (figuras 83 e 84):

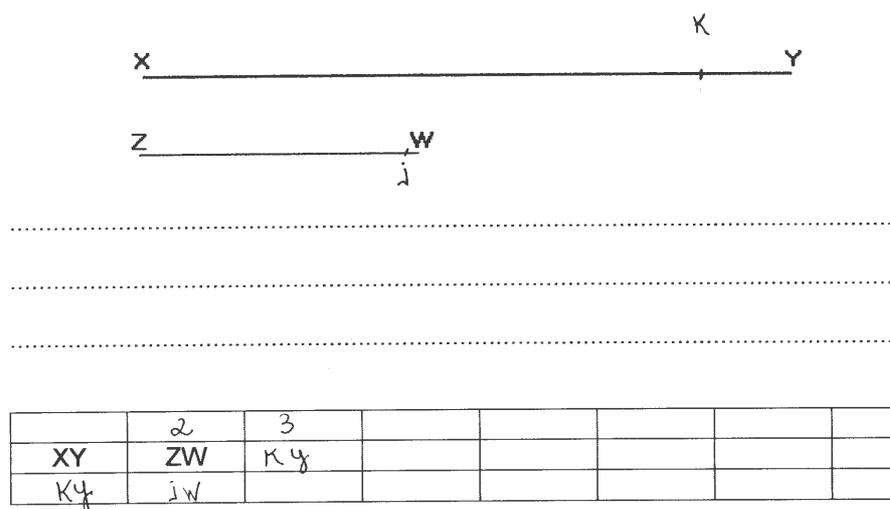
FIGURA 83 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (E) – ATIVIDADE 8, ITEM A



$$\frac{AB}{CD} = 2, r = XB \qquad \frac{XB}{YD} = r$$

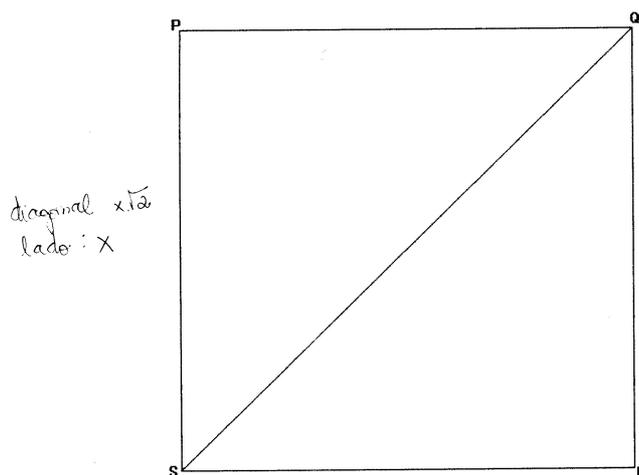
$$\frac{CD}{XB} = 1, r = YD$$

FIGURA 84 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (E) – ATIVIDADE 8, ITEM B



Notamos ainda que esse mesmo estudante (G-1 (E)) não utilizou transporte de segmentos para determinar a “maior medida comum” do lado e da diagonal do quadrado $PQRS$. Apenas registrou o comprimento desses segmentos, conforme é visto na figura 85:

FIGURA 85 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (E) – ATIVIDADE 8, ITEM D



Esse conjunto de respostas pode significar que esse estudante já teve contato com este conteúdo anteriormente, a partir de uma abordagem restrita a poucos exemplos, ou apenas a um exemplo (o par: lado e diagonal de um quadrado qualquer). Essa nossa suposição é baseada no fato de que o estudante

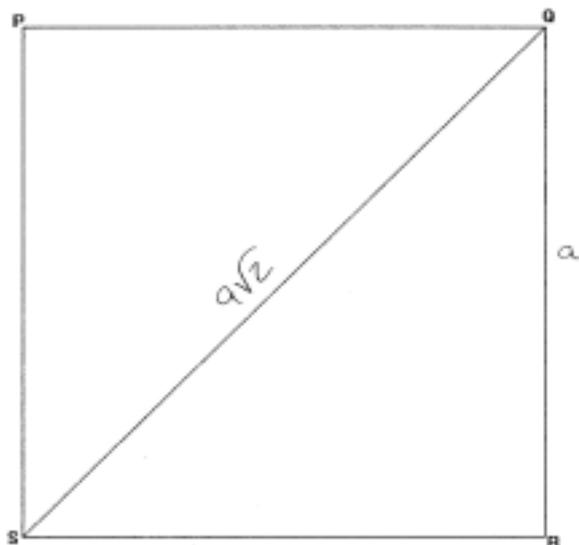
demonstra que não tem dúvidas a respeito da incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado qualquer (não foi necessário utilizar o transporte de segmentos para essa conclusão), mas, mesmo não obtendo resto zero, nas divisões sucessivas realizadas para os itens A e B (mesmo não conseguindo determinar a “maior medida comum” dos segmentos considerados), o estudante não classificou os pares de segmentos como incomensuráveis.

Isso nos leva a crer que, para este estudante, a abordagem adotada nesta atividade talvez não tenha sido adequada ou suficiente para a construção da noção de segmentos incomensuráveis ou para a ampliação da idéia que já havia sido construída sobre esse assunto. Ou seja, não havia dúvidas a respeito de classificar como incomensuráveis o lado e a diagonal do quadrado. Por sua vez, tendo determinado a “maior medida comum” do par de segmentos MN e RS, classificou-os como comensuráveis. Finalmente, quanto aos dois pares de segmentos (que não eram lado e diagonal de quadrados), cuja “maior medida comum” não foi possível determinar (pois o estudante não obteve resto zero, no processo de divisões sucessivas), não foram classificados como comensuráveis, nem como incomensuráveis.

O estudante G-1 (A) considerou \overline{MN} e \overline{RS} segmentos incomensuráveis e G-1 (C) considerou \overline{XY} e \overline{ZW} também segmentos incomensuráveis, conquanto tenham obtido resto zero no processo de divisões sucessivas.

Observamos que, para responder ao item D, G-2 (A) não realizou o transporte de segmentos para determinar a “maior medida comum” do lado e da diagonal do quadrado PQRS. Sem utilizar qualquer recurso, o estudante concluiu que esses segmentos não possuem submúltiplo comum.

FIGURA 86 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-2 (A) – ATIVIDADE 8, ITEM D



- a). O que você conclui a respeito dos divisores comuns do lado e da diagonal do quadrado PQRS? NÃO EXISTE DIVISOR COMUM ENTRE O LADO E A DIAGONAL, POIS DA DIAGONAL DO QUADRADO SE PODE TER UM NÚMERO IRRACIONAL.
- b). E sobre os divisores comuns (ou submúltiplos comuns) do lado e da diagonal de um quadrado qualquer? TAMBÉM NÃO EXISTE (LADO E A DIAGONAL DE QUALQUER QUADRADO SÃO MEDIDAS INCOMENSURÁVEIS).
- c). Considerando que dois segmentos são comensuráveis, se possuem um submúltiplo comum, o que você conclui a respeito dos pares de segmentos: AB e CD; XY e ZW; MN e RS; SQ e QR? O que você conclui a respeito do lado e da diagonal de um quadrado qualquer?

AB e CD, XY e ZW; MN e RS SÃO SEGMENTOS COMENSURÁVEIS.
 SQ e QR SÃO SEGMENTOS INCOMENSURÁVEIS.
 SÃO SEGMENTOS INCOMENSURÁVEIS.

Em resumo, poderíamos afirmar que os estudantes já possuíam a idéia de que o lado e a diagonal de um quadrado qualquer são segmentos incomensuráveis, fato que foi relacionado à medida " $x \cdot \sqrt{2}$ " para a diagonal de um quadrado, cujo lado mede " x ".

A figura do quadrado é bastante utilizada para a abordagem dos temas incomensurabilidade de segmentos de reta e números irracionais, e é possível que alguns estudantes tenham recorrido a esses conhecimentos construídos anteriormente para responder à questão D, não vendo necessidade de aplicar o processo de divisões sucessivas ao lado e à diagonal do quadrado PQRS. Exemplos já citados são as respostas de G-1 (E) e G-2 (A) (figuras 85 e 86, respectivamente).

Constatamos, por meio desses resultados, que para alguns estudantes talvez uma parte desse conhecimento já houvesse sido construída anteriormente, a partir do caso particular: lado e diagonal de um quadrado qualquer, mas a idéia de comensurabilidade e incomensurabilidade de dois segmentos quaisquer ainda estivesse incompleta.

Assim, não obstante o fato de termos empregado uma abordagem cujos resultados são passíveis de erros, tendo em vista a limitação dos instrumentos utilizados, concluímos que o desenvolvimento da atividade e a discussão feita a seguir, quando formalizamos a noção de incomensurabilidade de segmentos de reta e desenvolvemos uma prova da incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado qualquer, permitiram a ampliação dessa idéia para dois segmentos quaisquer.

5.^a sessão

Institucionalização da noção de incomensurabilidade de segmentos de reta

Esta sessão, dedicada à institucionalização da noção de comensurabilidade e incomensurabilidade de segmentos de reta, foi dividida em duas partes: na primeira delas, desenvolvemos a atividade 8, esclarecendo nossos objetivos e nossas expectativas para a aplicação dessa atividade.

Para concluir essa parte, fizemos a discussão da prova geométrica da incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado qualquer. Trata-se de prova por absurdo, desenvolvida pela construção de novos quadrados cada vez menores, num processo que pode continuar indefinidamente. A possibilidade de provar que o segmento XY é submúltiplo comum do lado e da diagonal de todos esses quadrados nos leva a um absurdo.

Durante essa discussão, foram feitas na lousa anotações de elementos que nos serviram para desenvolver a demonstração: a figura, a hipótese, a tese, o traçado de elementos auxiliares (arcos, segmentos de reta), as conclusões a respeito da congruência de figuras e as conseqüências de havermos considerado

a existência de um submúltiplo comum do lado e da diagonal do quadrado tomado inicialmente.

Na segunda parte da sessão convidamos os participantes a reorganizar a demonstração que havia sido discutida com a classe, observando os pontos destacados na lousa durante a discussão e acrescentando as justificativas necessárias. Essa formalização nos interessava, pois nos permitiria perceber se os argumentos que utilizamos nesta prova haviam sido suficientemente convincentes para que os estudantes fizessem a transferência deste conhecimento para uma nova situação que seria apresentada durante a atividade 9.

O exemplo que exibimos a seguir (figura 87) é a formalização apresentada por G-2 (A):

FIGURA 87 - REGISTRO - INSTITUCIONALIZAÇÃO
INCOMENSURABILIDADE DE SEGMENTOS - G-2 (A)

G-2(A)

$H \{ ABCD \}$ é um quadrado
 $T \{ BD, BC \}$ são incomensuráveis

- Vamos provar por absurdo, adotando BD e BC como segmentos comuns, ou seja, $\exists xy$ como submúltiplo comum de $BD, BC \Rightarrow \exists m, m \in \mathbb{Z} / BE = m(xy)$ e $BC = m(xy)$ comum
- Trazendo-se o arco de circunferência de centro B , e raio AB até interceptar a diagonal BD num ponto E , temos que BE também é raio desse arco e sendo assim, $AB = BE$
- Trazendo-se uma tangente a diagonal BD , partindo-se do ponto E até interceptar o lado AD no ponto F , concluímos que $FE \perp BD$
- Pelo caso especial de congruência de triângulos retângulos, temos que $\triangle ABF \cong \triangle BEF$, pois a hipotenusa BF é comum aos dois triângulos, os catetos AB e BE são congruentes e temos os ângulos retos $\hat{B}AF$ e $\hat{B}EF$.
Se $\triangle ABF \cong \triangle BEF \Rightarrow AF = FE$
- O ângulo $\hat{A}DB = 45^\circ$ (diagonal), $\hat{D}EF = 90^\circ$ (tangente), portanto $\hat{D}FE = 45^\circ$, pois $\hat{A}DB = \hat{F}DE$ e $\hat{F}DE + \hat{D}EF + \hat{D}FE = 180^\circ$
Como $\hat{F}DE = \hat{D}FE$, o $\triangle DEF$ é isósceles, portanto $FE = DE$
- $GD = DE + EB \Rightarrow BD = DE + BC \Rightarrow DE = BD - BC \Rightarrow DE = m(xy) - m(xy) \Rightarrow DE = (xy)(m-m) \Rightarrow xy$ é submúltiplo de DE *
- $AD = DF + AF \Rightarrow BC = DF + DE$
 $DF = BC - DE$
 $DF = m(xy) - (m-m)(xy) \Rightarrow xy$ é submúltiplo de DF *

* Isto prova o absurdo, pois se os segmentos fossem comensuráveis, teríamos um fim, mas sempre encontraremos xy submúltiplo de segmentos.

Tendo examinado a justificativa elaborada pelos estudantes, percebemos que compreenderam os argumentos utilizados para a prova de que o segmento XY (suposto submúltiplo comum do lado e da diagonal do quadrado original $ABCD$) também é submúltiplo comum do lado e da diagonal do quadrado $DEFG$ (auxiliar no desenvolvimento da prova).

Notamos ainda, que alguns dos estudantes mencionaram a necessidade de haver um processo infinito de construção de quadrados auxiliares, para classificarmos o lado e a diagonal do quadrado, como segmentos

incomensuráveis. Essa idéia está ligada à atividade 8, em que foi utilizado o processo de divisões sucessivas para identificar segmentos comensuráveis e incomensuráveis. Entretanto, examinando algumas das respostas apresentadas, não foi possível avaliar se perceberam o absurdo de havermos suposto a existência de XY , submúltiplo comum do lado e da diagonal do quadrado $ABCD$. Para ilustrar essa nossa observação, destacamos a seguir, a conclusão de alguns dos participantes, após haverem provado que o segmento XY é submúltiplo comum do lado e da diagonal do quadrado auxiliar $DEFG$.

O absurdo está que segmentos comensuráveis tem fim, e aqui não terá fim, pois posso demonstrar tudo de novo no quadrado $FEDG$ e assim infinitamente. (G-1 (E)).

O absurdo está no fato de que xy é submúltiplo do lado DE e da diagonal DF do quadrado. Logo, xy tem que caber um $n.^{\circ}$ finito de vezes em DE e DF . Mas se continuarmos o processo, teremos um **$n.^{\circ}$ infinito** de quadrados (G-1 (B)).

[...] isso mostra que XY é submúltiplo comum de \overline{DE} e \overline{FD} , respectivamente lado e diagonal do quadrado $GFED$. Podemos construir tantos quadrados quantos quisermos, onde XY será submúltiplo do lado e da diagonal dos quadrados. Assim, concluímos que isso é absurdo, pois para que os segmentos sejam comensuráveis, esse processo teria de ser finito. Concluímos assim, que a nossa suposição está inválida, e o lado e a diagonal de qualquer quadrado são grandezas incomensuráveis (G-3 (A)).

FIGURA 88 – PROTOCOLO – G-2 (A)
PARTE DA JUSTIFICATIVA – INCOMENSURABILIDADE DE SEGMENTOS

** Isto prova o absurdo, pois se os segmentos fossem comensuráveis, teríamos um fim, mas sempre encontraremos xy submúltiplo de segmentos.*

Percebemos, na conclusão de G-2 (A), (figura 88), uma forma ambígua de expressar a justificativa – o estudante nega que os segmentos são comensuráveis, dizendo “se os segmentos fossem comensuráveis...” e logo em seguida, afirma que dois segmentos são sempre comensuráveis: “sempre encontraremos xy submúltiplo de segmentos”.

O mesmo equívoco pode ser constatado na conclusão de G-1 (A), exposta na figura 89, que poderia ser traduzida por “o lado e a diagonal de todos os quadrados construídos pelo mesmo processo são segmentos comensuráveis”.

FIGURA 89 – PROTOCOLO – G-1 (A)
 PARTE DA JUSTIFICATIVA – INCOMENSURABILIDADE DE SEGMENTOS

$\Rightarrow xy$ é submúltiplo de DF

Logo, sempre será possível obter um submúltiplo utilizando a mesma construção. Como admitimos que os segmentos \overline{BD} e \overline{BC} são comensuráveis deve \exists um número o qual seja possível realizar uma divisão exata \Rightarrow é absurdo a hipótese de \overline{BD} e \overline{BC} serem comensuráveis

G-2 (B), cujo protocolo exibimos na figura 90, ao concluir que o lado e a diagonal do quadrado ABCD são segmentos incomensuráveis, apresentou, como argumento, o fato de XY ser submúltiplo do lado e da diagonal de um outro quadrado (DEFG):

FIGURA 90 – PROTOCOLO – G-2 (B)
 PARTE DA JUSTIFICATIVA – INCOMENSURABILIDADE DE SEGMENTOS

$\{xy \text{ é subsb. de } DF\}$

Portanto \overline{BD} e \overline{BC} não são comensuráveis uma vez que xy é submúltiplo de DF e DE que são lado e diagonal de um quadrado.

Este participante, (G-2 (B)), não fez o pré-teste. Assim, não temos informações a respeito de seus conhecimentos prévios sobre incomensurabilidade de segmentos de reta e números irracionais. Talvez pudéssemos interpretar sua resposta dizendo que justificou a incomensurabilidade da diagonal \overline{BD} e do lado \overline{BC} do quadrado ABCD, usando como argumento a incomensurabilidade dos segmentos DF e DE (diagonal e lado de um quadrado): em princípio, supôs que XY é submúltiplo comum de BD e BC (diagonal e lado do quadrado original ABCD) e demonstrou que XY é submúltiplo comum de DF e DE (diagonal e lado do quadrado auxiliar DEFG). É possível que

já soubesse que o lado e a diagonal de qualquer quadrado são segmentos incomensuráveis (como demonstraram alguns sujeitos de nossa pesquisa, por exemplo: G-1 (E) e G-2 (A), figuras 85 e 86, respectivamente). Nesse caso, a conclusão de que XY é submúltiplo comum de DF e DE é absurda. Como esse absurdo é resultado de haver suposto que XY é submúltiplo comum de BD e BC , concluiu que BD e BC são segmentos incomensuráveis.

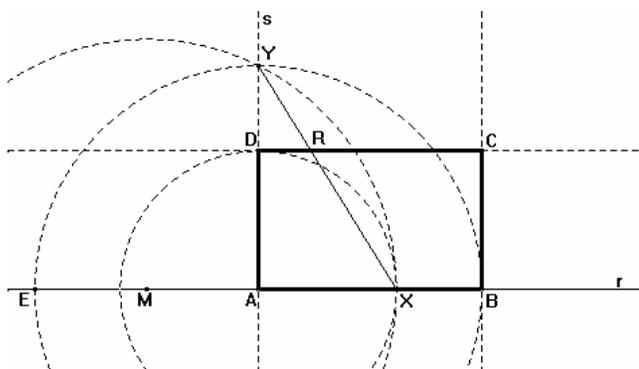
Em resumo, as justificativas apresentadas indicam que os estudantes associaram a noção de incomensurabilidade de segmentos aos processos infinitos de divisões sucessivas aplicado a grandezas e de construção de quadrados cada vez menores. No entanto, não perceberam o absurdo a que chegamos como resultado de havermos suposto que o lado e a diagonal do primeiro quadrado ($ABCD$) são segmentos comensuráveis, revelando, assim, a necessidade de aprofundar mais a discussão sobre a demonstração da incomensurabilidade de segmentos de reta.

6.^a sessão

Atividade 9

Levando em conta a construção do retângulo áureo, vista na atividade 7, conforme a figura a seguir:

FIGURA 91 – CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO ÁUREO
APRESENTADA NO ENUNCIADO DA ATIVIDADE 9



Suponha que PQ seja submúltiplo comum da base e da altura do triângulo AXY e:

- A) Procure argumentos que justifiquem que PQ é submúltiplo comum da base e da altura do triângulo DRY .
- B) Que argumentos você utilizaria para justificar que PQ é submúltiplo comum da altura e da base de qualquer triângulo semelhante ao triângulo AXY ?
- C) Procure argumentos que mostrem que os lados do retângulo áureo são segmentos incomensuráveis.

Material disponível

O estudante deverá ter em mãos apenas a folha da atividade.

Análise a priori

Objetivos

Tendo tomado como objeto de estudo de nossa engenharia a incomensurabilidade de segmentos de reta no contexto da seção áurea, planejamos finalizar a seqüência com uma atividade que permitisse aos estudantes a construção de argumentos que pudessem compor uma prova da incomensurabilidade dos lados do retângulo áureo.

A figura apresentada no enunciado é um retângulo áureo construído a partir das mesmas orientações vistas pelo estudante na atividade 7. Tínhamos a intenção de que fossem utilizadas as conclusões levantadas durante a realização da atividade 8 (sobre segmentos comensuráveis e incomensuráveis) para a elaboração das justificativas solicitadas em cada item desta atividade.

Desejávamos criar um ambiente de discussão, em que os estudantes fossem incentivados a expor os argumentos que julgassem necessários para justificar suas conclusões.

Para o *item A*, esperávamos que o estudante percebesse que, supondo a existência de um segmento PQ , submúltiplo comum de AX e AY , poderia empregar, aqui, uma estratégia semelhante àquela utilizada na aula anterior, quando discutimos uma prova da incomensurabilidade do lado e da diagonal do quadrado. Além disso, como o enunciado fala sobre a base e a altura do triângulo AXY e pede que o estudante justifique o fato de PQ ser submúltiplo comum também da base e da altura do triângulo DRY , acreditávamos que iria ocorrer ao estudante a idéia de usar a semelhança de triângulos para desenvolver a justificativa solicitada.

Quanto ao *item B*, supúnhamos que o estudante observasse o traçado geométrico do retângulo áureo e notasse a possibilidade de construção de um arco com centro em D e raio DR , que interceptasse DY , num outro ponto (S , por exemplo). Assim, traçando por S uma nova paralela a \overline{AB} , seria obtido um terceiro triângulo semelhante a AXY e a DRY . Entendíamos que, se o estudante concebesse essa idéia, iria enxergar a possibilidade de construir infinitos triângulos semelhantes a AXY . Nesse caso, se houvesse provado, no item *A*, que PQ é submúltiplo comum de DY e DR , provaria também que PQ é submúltiplo comum da altura e da base de qualquer um desses infinitos triângulos.

Para o *item C* desejávamos que constatassem o absurdo de havermos suposto que PQ é submúltiplo comum da base e da altura do triângulo AXY , pela observação de que, sendo construídos infinitos triângulos semelhantes a AXY , e sendo possível provar que PQ é submúltiplo comum da base e da altura de todos eles, poderíamos também provar que PQ é submúltiplo comum da base e da altura de um triângulo com dimensões menores do que PQ . Acreditávamos que, percebendo esse absurdo, seriam capazes de concluir que a base e a altura do triângulo AXY são segmentos incomensuráveis.

Finalmente, desejávamos que observassem que $AB = AY$ e que $AD = AX$ e concluíssem que AB e AD são segmentos incomensuráveis. Com esses argumentos teriam provado a incomensurabilidade dos lados do retângulo áureo.

Características da atividade e prováveis estratégias

Esta atividade, proposta no quadro geométrico, iria requerer do estudante, algumas ferramentas empregadas anteriormente, tanto do próprio quadro geométrico quanto do quadro algébrico. A semelhança de polígonos, por exemplo, foi um conhecimento usado durante todo o desenvolvimento da seqüência, e deveria ser útil, finalmente, para a elaboração de alguma estratégia que justificasse o fato de PQ ser submúltiplo comum da base e da altura do triângulo DRY (item A), e de todos os outros triângulos semelhantes a AXY (item B).

A discussão que encerrou a atividade 8, realizada em torno do tema incomensurabilidade de segmentos de reta, com a demonstração de que o lado e a diagonal de um quadrado qualquer são segmentos incomensuráveis, também poderia fornecer elementos que iriam auxiliar o estudante durante esta atividade. Um deles seria a idéia de abordar a situação, supondo que os segmentos considerados são comensuráveis. O recurso da construção de infinitos quadrados, cada vez menores, também poderia servir como auxílio para a justificativa solicitada na atividade 9, podendo o estudante fazer conjecturas a respeito da construção de infinitos triângulos, semelhantes a AXY .

Ainda poderiam ser utilizados todos os conhecimentos já mencionados como ferramentas necessárias, para a realização das atividades anteriores, aos quais o estudante deveria acrescentar a congruência de ângulos (para justificar a semelhança de triângulos), a congruência de segmentos de reta (para justificar a incomensurabilidade dos lados do retângulo áureo) e a propriedade transitiva da semelhança de triângulos.

Em todo o desenvolvimento da atividade, a interação entre os quadros geométrico e algébrico serviria de auxílio para que o estudante pudesse elaborar as justificativas solicitadas. Novamente, o problema é proposto no quadro geométrico, o conhecimento de que o estudante precisa para iniciar sua resolução também é geométrico – a semelhança de triângulos –, mas a prova de que PQ é também submúltiplo comum da base e da altura do triângulo DRY (item A), e de todos os possíveis triângulos semelhantes a AXY (item B), exige que o estudante utilize seus

conhecimentos sobre proporcionalidade e resolução de equações, cuja representação é feita algebricamente.

Mais uma vez, as conjecturas e a discussão em grupo poderiam ajudar o estudante a perceber a conveniência de construir infinitos triângulos semelhantes, para a elaboração da justificativa solicitada no item B, e a possibilidade de demonstrar que PQ é submúltiplo comum da base e da altura de todos eles.

Se o estudante verificasse o absurdo de supormos que a base e a altura do triângulo AXY são segmentos comensuráveis e observasse a congruência dos segmentos AX e AD , e dos segmentos AY e AB (pela construção da figura), poderia finalmente concluir que os lados do retângulo áureo são segmentos incomensuráveis, atendendo à solicitação feita no item C.

Relato da experimentação e análise *a posteriori*

Considerando os resultados da atividade 8, pareceu-nos oportuno iniciar esta sessão retomando alguns pontos das atividades anteriores, que seriam levados em conta para o desenvolvimento da atividade 9.

Revimos as características do retângulo áureo e construímos uma definição da “seção áurea de um segmento”.

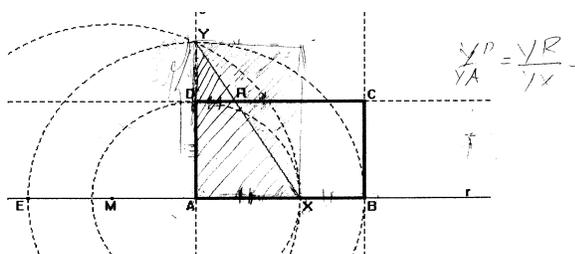
Comentamos que durante a sessão anterior havíamos suposto a existência de um segmento XY , submúltiplo comum do lado e da diagonal de um quadrado, para provar a incomensurabilidade desses dois segmentos, e que durante a atividade 9 iríamos supor a existência de um segmento PQ , submúltiplo comum da base e da altura do triângulo AXY , conforme enuncia o item A da atividade.

A atividade 9 foi desenvolvida por 10 estudantes e teve a duração de aproximadamente 90 minutos. Suas respostas são comentadas a seguir:

A) Procure argumentos que justifiquem que PQ é submúltiplo comum da base e da altura do triângulo DRY .

A justificativa apresentada por G-1 (C), reproduzida a seguir, mostra que o estudante foi capaz de fazer a transferência para este contexto do conhecimento construído durante o desenvolvimento das atividades anteriores e ao longo da discussão sobre a prova da incomensurabilidade do lado e da diagonal do quadrado.

FIGURA 92 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (C) – ATIVIDADE 9, ITEM A



Suponha que PQ seja submúltiplo comum da base e da altura do triângulo AXY e:

A). Procure argumentos que justifiquem que PQ é submúltiplo comum da base e da altura do triângulo DRY .

Suponha que PQ é submúltiplo comum da base e da altura do $\triangle AXY$, isto significa que PQ é submúltiplo de AX e AY .

$$\text{Como } \overline{AY} = \overline{AD} + \overline{DY}$$

Como PQ é submúltiplo de AY e como $\overline{AX} = \overline{AD}$, então PQ é submúltiplo de \overline{AD} . Consequentemente: PQ é submúltiplo de \overline{DY} .

Como $\triangle DRY \sim \triangle AXY$, pelo cas. AAA
 $\angle DR = \angle AX = 90^\circ$
 $\angle R$ é comum aos \triangle s

Como $\triangle DRY \sim \triangle AXY$, então $\frac{DR}{AX} = \frac{DY}{AY}$, como PQ é submúltiplo de AX e YA (por hipótese), como PQ é submúltiplo de DY . Consequentemente PQ é submúltiplo de DR .

O estudante G-2 (C), cuja prova reproduzimos a seguir (figuras 93 e 94), também apresentou argumentos adequados, para concluir, ao final, que PQ é submúltiplo comum de DR e DY . A partir da semelhança dos triângulos AXY e DRY , verificou a igualdade $DR = \frac{x \cdot y}{y + x}$. O estudante não expressa essa intenção, mas poderíamos interpretar sua justificativa da seguinte forma: sendo PQ

Observando o registro feito por G-1(D):

FIGURA 95 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (D) – ATIVIDADE 9 – ITEM A

PQ submúltiplo comum de AX e AY

$$H: \begin{cases} \frac{AY}{AX} = m(PQ) \end{cases}$$

$$T: \begin{cases} \frac{DY}{DR} = n(PQ) \end{cases}$$

Demonstração:

Por semelhança de triângulos temos que: $\frac{AY}{DY} = \frac{XY}{RY} = \frac{AX}{DR}$

$$\frac{AY}{DY} = \frac{AX}{DR}$$

$$\frac{AY}{AX} = \frac{DY}{DR} = m(PQ)$$

Portanto, podemos dizer que $\frac{DY}{DR}$ também possui um submúltiplo PQ, comum da base e da altura do $\triangle DRY$.

notamos que o estudante interpretou o fato de PQ ser submúltiplo comum da base (AX) e da altura (AY) do triângulo AXY, como submúltiplo da razão $\frac{AY}{AX}$. A hipótese e a tese escritas pelo estudante confirmam essa idéia.

É possível que essa conclusão seja decorrente de interpretação incorreta do processo de divisões sucessivas, com base no algoritmo de Euclides. Por exemplo, se considerarmos AY e AX (comensuráveis), temos:

TABELA 13 – PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS APLICADO A GRANDEZAS NA ANÁLISE DAS ATIVIDADES

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>n</i>
<i>AY</i>	<i>AX</i>	<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>PQ</i>
<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>AD</i>		<i>0</i>	

Neste caso, em vez de considerar $AY = r \cdot PQ$, com r inteiro, pois PQ é divisor de AY , o aluno considerou $\frac{AY}{AX} = n \cdot PQ$ (com n inteiro), que não é verdade.

Bastaria tomar os números 128 e 20, e teríamos:

TABELA 14 – PROCESSO DE DIVISÕES SUCESSIVAS APLICADO AOS NÚMEROS 128 e 20

	6	2	2
128	20	8	4
8	4	0	

Se escrevêssemos $\frac{128}{20} = n \cdot 4$, teríamos: $\frac{128}{80} = n$ (com n inteiro), que é falso.

Esse mesmo raciocínio pode ser observado no registro feito por G-1 (A):

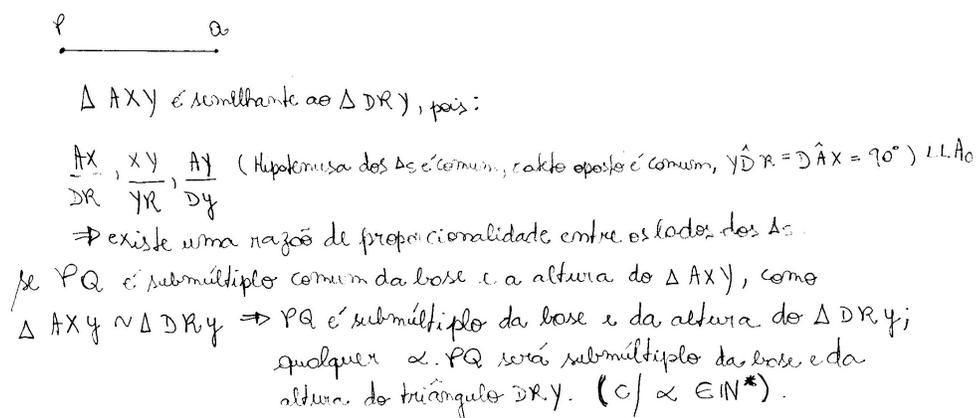
FIGURA 96 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (A) – ATIVIDADE 9, ITEM A

$$\begin{aligned}
 & \# \left\{ \begin{array}{l} \frac{AY}{AX} = x \cdot (PQ) \\ \frac{DY}{DR} = x \cdot (PQ) \end{array} \right. \quad \tau \left\{ \begin{array}{l} \frac{AY}{AX} = x \cdot (PQ) \\ \frac{DY}{DR} = x \cdot (PQ) \end{array} \right. \\
 & \frac{AX}{DR} = \frac{AY}{DY} = \frac{XY}{YR} \quad AY = AD + DY \\
 & \frac{AY}{DY} = \frac{AX}{DR} \\
 & \frac{AY}{AX} = \frac{DY}{DR} = x \cdot (PQ) \\
 & \text{Logo } \left\{ \frac{DY}{DR} \right\} + \text{bim possui submúltiplo } PQ \\
 & \text{comum à base e altura } \frac{DY}{DR} \cdot x \cdot (PQ)
 \end{aligned}$$

notamos que, afora essas observações, utilizou os mesmos argumentos de G-2 (C), comentados anteriormente (figuras 93 e 94).

O estudante G-1 (B) (protocolo exposto na figura 99), considerando a existência de PQ , submúltiplo comum de AX e AY , em vez de concluir que “existem” números inteiros (m e n , por exemplo), tais que $AX = m.PQ$ e $AY = n.PQ$, afirmou que “qualquer $\alpha .PQ$ será submúltiplo da base e da altura do triângulo DRY ”.

FIGURA 99 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (B) – ATIVIDADE 9, ITEM A



Notamos que, para alguns participantes, a semelhança entre os triângulos AXY e DRY foi considerada argumento suficiente para provar que se PQ é submúltiplo comum da base e da altura do triângulo AXY , então, será submúltiplo comum também da base e da altura do triângulo DRY . O aluno G-1 (E), por exemplo, em sua conclusão, diz: “Se os Δs DRY e AXY são semelhantes, então a razão entre os lados homólogos é a mesma. Por isso, \overline{PQ} é submúltiplo de DY e DR ”.

Seria necessário que o estudante observasse que, se PQ é submúltiplo comum de AX e AY , existem m e n inteiros positivos, tais que $AX = m.PQ$ e

$AY = n.PQ$ e assim, teríamos: $\frac{AY}{AX} = \frac{n}{m}$. Nesse caso, se tomarmos como

argumento apenas a semelhança entre os triângulos AXY e DRY , temos:

$$\frac{AY}{AX} = \frac{DY}{DR} = \frac{n}{m}. \text{ Isso significa que existe um outro segmento (RS, por exemplo), tal}$$

que $DY = n.RS$ e $DR = m.RS$, que é diferente de dizer que PQ é submúltiplo comum de DY e DR . Assim, o fato de terem a mesma razão de semelhança não basta para justificar o fato de PQ ser submúltiplo comum também de DR e DY . Além da semelhança dos triângulos, seria essencial que o estudante observasse a congruência de segmentos ($\overline{AX} \equiv \overline{AD}$), como dado auxiliar na prova de que PQ é submúltiplo comum de também de DY e DR .

O argumento utilizado por G-2 (A) é baseado na mesma idéia e foi registrado da forma:

FIGURA 100 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – ALUNO G-2 (A) – ATIVIDADE 9, ITEM A (i)

$$\left. \begin{array}{l} \hat{Y}DR = \hat{Y}AX \text{ (reto)} \\ \hat{D}YR = \hat{A}YX \text{ (comum)} \\ \hat{Y}RD = \hat{Y}XA \text{ (correspondentes)} \end{array} \right\} \text{ Pelo caso AAA, } \Delta AXY \sim \Delta DRY$$

Como PQ é submúltiplo comum de AX e AY e

$$\frac{AX}{AY} = \frac{DR}{DY}, \text{ } PQ \text{ também é submúltiplo de } DR \text{ e } DY \text{ se a medida de}$$

PQ for menor que DR e DY .

Nesse caso, entendemos que está implícita a idéia de que, se PQ fosse maior do que DR e DY , a afirmação de que PQ é submúltiplo comum de DR e DY seria absurda.

Há, porém, um engano na conclusão expressa por G-2 (A), pois podemos ter $PQ < DR$, $PQ < DY$ e PQ submúltiplo comum de AX e AY , sem que PQ seja submúltiplo comum de DR e DY . Por exemplo, 12 é submúltiplo comum de 120 e 108; $\frac{120}{108} = \frac{30}{27}$; $12 < 27$ e $12 < 30$. No entanto, 12 não é submúltiplo comum de 30 e 27.

Os dois integrantes do grupo G-3 apresentaram um argumento semelhante, conforme observamos no protocolo a seguir (figura 101):

FIGURA 101 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO - G-3 (A) – ATIVIDADE 9 – ITEM A

PQ é submúltiplo de AX e AY
 $\exists m, n \in \mathbb{Z} / m \cdot PQ = AX$ e $n \cdot PQ = AY, n > m$ e $n \neq 0, m \neq 0$

$\Delta AX \approx \Delta DR$ pelo caso AA , pois:

$$\hat{Y}DR = \hat{Y}AX$$

$$\hat{Y}RD = \hat{Y}XA$$

$$\frac{AY}{DY} = \frac{AX}{DR}$$

$$AY \cdot DR = AX \cdot DY$$

$$(n \cdot PQ)DR = (m \cdot PQ)DY$$

Logo DR e DY são submúltiplos de PQ

Handwritten notes on the right side of the page:

$$\frac{AD+YD}{DY} = \frac{AX}{DR}$$

$$\frac{m \cdot YD}{DY} = \frac{AX}{DR}$$

$$DR(AX+YD) = AX \cdot DY$$

$$DR[n \cdot AY + (AY - AY)] = AX \cdot DY$$

$$DR[m \cdot PQ + (n \cdot PQ - m \cdot PQ)] = m \cdot PQ \cdot \left[\frac{n \cdot PQ}{m \cdot PQ} - m \cdot PQ \right]$$

$$DR[m \cdot PQ + PQ(n-m)] = m \cdot PQ \cdot \left[\frac{n \cdot PQ}{m \cdot PQ} - m \cdot PQ \right]$$

$$DR[PQ(m+n-m)] = m \cdot PQ \cdot \left[\frac{n \cdot PQ}{m \cdot PQ} - m \cdot PQ \right]$$

Nesse caso, ao provar que $(n \cdot PQ) \cdot DR = (m \cdot PQ) \cdot DY$, o estudante provou que DR e DY são segmentos comensuráveis, pois podemos escrever: $\frac{DR}{DY} = \frac{m}{n}$ (com m e n inteiros), ou seja, existe um segmento (\overline{ZW}) , por exemplo) que é submúltiplo comum de \overline{DR} e \overline{DY} , tal que $DR = m \cdot ZW$ e $DY = n \cdot ZW$. No entanto, essa conclusão não garante que PQ seja submúltiplo comum de DR e DY .

7.ª sessão

Nesta sessão pretendíamos encerrar a discussão concernente à incomensurabilidade dos lados do retângulo áureo.

Retomamos o item A da atividade 9, desenvolvido na sessão anterior, para que os estudantes tivessem oportunidade de expor seus argumentos e esclarecer as dúvidas que fossem levantadas.

A partir das sugestões apresentadas pelos estudantes, formalizamos, em conjunto, as conclusões a que chegamos pelo desenvolvimento do item A, que serviriam como ponto de partida para a discussão sobre os itens B e C, em cada grupo. Essa formalização pode ser vista nos apontamentos feitos por G-1 (A):

FIGURA 102 – PROTOCOLOS DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (A) – ATIVIDADE 9, ITEM A

triângulo AXY .

Se P_0 é submúltiplo de AX e $AY \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} \ n > m, AX = m(P_0)$ e $AY = n(P_0)$

Triângulo AXY *ângulo constante*
 Triângulo DRY *obtido*

$\Delta AXY \sim \Delta DRY \Rightarrow \hat{D}YR \equiv \hat{A}YX$ (âng. reto)
 $\hat{X}DR \equiv \hat{Y}AX$ (âng. comum)

$$\frac{AY}{DY} = \frac{AX}{DR} \Rightarrow \frac{AY^2}{AY \cdot DY} = \frac{AX}{DR} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n(P_0)}{n(P_0) - m(P_0)} = \frac{m(P_0)}{DR} \Rightarrow DR = \frac{m(P_0)(n(P_0) - m(P_0))}{n(P_0)}$$

$\Rightarrow P_0$ é submúltiplo de \overline{DR} .

Como:

$$\overline{AY} = \overline{AD} + \overline{DY} \quad \text{e} \quad \overline{AD} = \overline{AX}$$

$$\overline{AY} = \overline{AX} + \overline{DY}$$

Se, por hipótese, $\overline{P_0}$ é submúltiplo de \overline{AY} e \overline{AX} , então:

$$n(P_0) = m(P_0) + \overline{DY} \Rightarrow \overline{DY} = n(P_0) - m(P_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{D_0} \text{ é submúltiplo de } \overline{DY}$$

O que segue é o relato do desenvolvimento dos itens B e C, da atividade 9, após a discussão sobre o item A.

B) Que argumentos você utilizaria para justificar que PQ é submúltiplo comum da altura e da base de qualquer triângulo semelhante ao triângulo AXY ?

Observando os protocolos a seguir (figuras 103 e 104), notamos que em seu desenvolvimento o estudante G-1 (A) demonstra ter percebido que o traçado de novos triângulos seria uma boa estratégia para desenvolver a prova solicitada:

FIGURA 103 – PROTOCOLO - G-1 (A) - ATIVIDADE 9

(FIGURA AUXILIAR NO DESENVOLVIMENTO DO ITEM B)

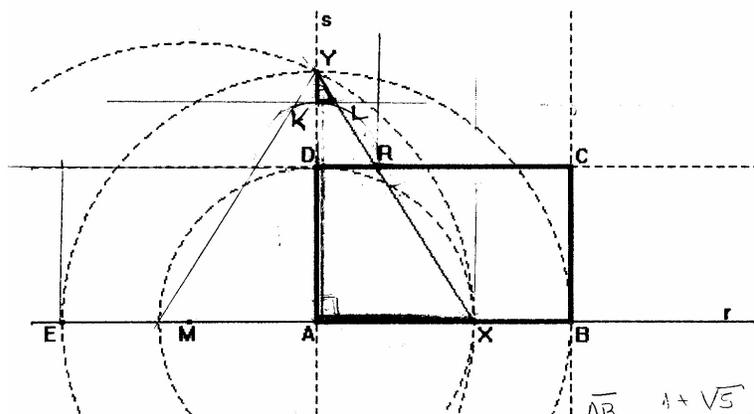


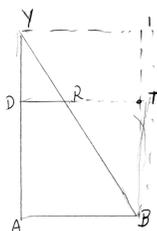
FIGURA 104 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (A) – ATIVIDADE 9, ITEM B (i)

PQ é submúltiplo da base e da altura de
 qualquer triângulo ΔAXY
 $AX = m(PQ)$ e $AY = n(PQ)$
 $AX = AD \Rightarrow AD = m(PQ)$
 $DR = DK$, como PQ é submúltiplo de DR , como
 demonstrado anteriormente $\Rightarrow \exists p \in \mathbb{N} / DK = p(PQ)$,
 onde DK é obtido a partir de uma
 circunferência com centro em D e raio DR ,
 obtém-se K na intersecção das circunferências
 com o lado DY .
 Logo, \exists os triângulos construídos a
 partir do lado obtido

No entanto, em sua conclusão, o estudante afirma apenas que existem infinitos triângulos, sem mencionar a semelhança entre eles e o fato de que o segmento PQ também seria submúltiplo comum da base e da altura de todos esses triângulos.

Notamos pela resposta de G-1 (C) (ver figura 105, a seguir) que tomou como base o item A para concluir que, num triângulo semelhante a AXY , a base e a altura também teriam PQ como submúltiplo comum. Entretanto, a construção auxiliar que resultou nessa conclusão não ajudou o estudante no desenvolvimento da justificativa solicitada, que se refere a “qualquer triângulo semelhante ao triângulo AXY ”.

FIGURA 105 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (C) – ATIVIDADE 9, ITEM B (i)



Como em A) provamos que PQ é submúltiplo de \overline{YD} e \overline{DR} , Analogamente PQ é submúltiplo de \overline{TB} e \overline{RT}

A figura desenhada por G-1 (C) (protocolo anterior) mostra o traçado de um terceiro triângulo semelhante a AXY (que o estudante indicou por BTR), mas construído aleatoriamente, o que pode significar que a expressão usada no enunciado “qualquer triângulo semelhante ao triângulo AXY ” pode gerar a idéia de arbitrariedade na construção de outros triângulos, não auxiliando o estudante na elaboração de uma estratégia adequada que permita chegar à conclusão que desejamos.

Achamos importante ressaltar aqui que o enunciado se refere a “qualquer triângulo semelhante ao triângulo AXY ”, mas nossa intenção era que o estudante percebesse a necessidade de considerar triângulos convenientes, que

permitissem o desenvolvimento de uma justificativa. Nossa expectativa era de que a demonstração da incomensurabilidade do lado e da diagonal do quadrado servisse como pista para que o estudante buscasse alguma forma de construir infinitos triângulos que o auxiliassem em sua argumentação. Não bastaria traçar infinitas paralelas ao lado \overline{AX} – os triângulos construídos dessa forma seriam todos semelhantes ao triângulo AXY , mas essa estratégia não facilitaria a realização da prova que foi solicitada.

Seria fundamental, então, que o estudante percebesse, pelo próprio traçado do retângulo áureo, que a construção de um novo arco, com centro em D e raio DR , resultaria em um novo triângulo semelhante aos anteriores. Sendo capaz de notar essa possibilidade, o estudante teria condições de constatar também a possibilidade de construção de infinitos triângulos semelhantes ao original AXY , com características que iriam favorecer o desenvolvimento da justificativa solicitada. Essa estratégia iria favorecer a demonstração de que PQ é submúltiplo comum da base e da altura de qualquer um desses triângulos, pois a construção dos arcos iria produzir segmentos congruentes e não quaisquer segmentos, como seria o caso de o estudante construir aleatoriamente infinitas paralelas ao segmento AX .

Verificamos que havia necessidade de intervir e esclarecer que, para o desenvolvimento da prova solicitada, embora o enunciado dissesse “(...) qualquer triângulo semelhante ao triângulo AXY ”, seria essencial construir triângulos convenientes, que permitissem a elaboração da justificativa. Sugerimos que examinassem com cuidado a construção do retângulo áureo e os elementos que essa construção poderia fornecer para auxiliar na justificativa. A discussão entre os estudantes do grupo $G-1$ levou-os a experimentar a formação de novos triângulos semelhantes ao triângulo AXY , demonstrando que haviam percebido a necessidade de uma “lei de formação” na construção da seqüência de triângulos, para tornar possível a prova solicitada. Os argumentos utilizados por $G-1(D)$ mostram que identificou na construção de triângulos semelhantes a AXY , por meio de novos arcos, uma estratégia apropriada para a resposta ao item B , conforme havíamos antecipado.

FIGURA 106 - PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (D) – ATIVIDADE 9, ITEM B

Semelhança de triângulos:

- * Para construir todos os triângulos semelhantes a AXY :
- * No triângulo AXY , construir um quadrado de lado AX , tendo como base AX e altura, cortando em algum lugar do segmento AY .
- * Esta interseção chamaremos de D .
- * Traçando uma perpendicular a AY passando por D , obtemos outro ponto de interseção que cortará o segmento XY . Chamaremos este ponto de R .
- * Assim, obtemos o triângulo DRY que será semelhante a AXY . (conforme demonstrado anteriormente)
- * Repetindo o processo anterior, construindo um quadrado de lado DR , obtemos outro triângulo que será semelhante a DRY e por sua vez a AXY .
- * Assim, repetindo o processo infinitamente, obtemos todos os triângulos semelhantes a AXY conforme desenho abaixo:

$\Delta AXY \sim \Delta DRY$
 $\Delta AXY \sim \Delta YZW$
 \vdots
 Infinitos triângulos semelhantes.

Notamos que, embora G-1 (D) tenha demonstrado a possibilidade de construir infinitos triângulos semelhantes a AXY , não provou que PQ é submúltiplo comum da base e da altura de cada um desses triângulos.

Da mesma forma, o estudante G-1 (A), em sua resposta (figura 109), conclui que há possibilidade de construir infinitos triângulos, porém sem apresentar argumentos que justifiquem o fato de PQ ser submúltiplo comum da base e da altura de qualquer um desses triângulos:

FIGURA 109 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (A) – ATIVIDADE 9, ITEM B

PQ é submúltiplo da base e da altura de
 qq triângulo ΔAXY
 $AX = m \cdot (PQ)$ e $AY = n \cdot (PQ)$
 $AX = AD \Rightarrow AD = m \cdot (PQ)$
 $DR = DK$, como PQ é submúltiplo de DR , como
 demonstrado anteriormente $\Rightarrow \exists p \in \mathbb{N} / DK = p \cdot (PQ)$,
 onde DK é obtido a partir de uma
 circunferência com centro em D e raio DR ,
 obtém-se K na intersecção da circunferência
 com o lado DY .
 Logo, \exists os triângulos construídos a
 partir do lado obtido

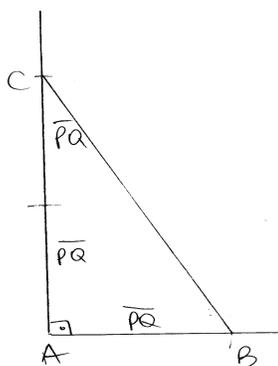
A resposta apresentada por G-1 (E) ao item B demonstra, igualmente, que ele constatou a possibilidade de construir infinitos triângulos, atendendo a determinadas condições, porém não desenvolveu uma prova a respeito de PQ ser submúltiplo comum do lado e da diagonal de cada um desses triângulos. Após descrever o processo do traçado dos triângulos, sua resposta é concluída da seguinte forma:

E assim por diante poderemos construir infinitos triângulos semelhantes ao triângulo AXY . Se todos esses infinitos triângulos são semelhantes ao triângulo $AXY \Rightarrow PQ$ será submúltiplo comum da altura e da base de qualquer triângulo semelhante ao ΔAXY , pois vimos no exercício anterior que PQ é submúltiplo comum da altura e da base do ΔAXY (G-1 (E), Atividade 9, item B).

A idéia expressa por G-1 (E) (citação anterior), de que sendo PQ submúltiplo comum da base e da altura do triângulo AXY , será também submúltiplo comum da base e da altura de qualquer triângulo semelhante a AXY , foi apresentada como argumento também por G-1 (B) e pelos alunos do grupo G-3.

Por sua vez, o estudante G-2 (B), em sua tentativa de provar que o segmento PQ é submúltiplo comum da altura e da base de qualquer triângulo semelhante a AXY , conforme solicita o item B, expôs a seguinte figura:

FIGURA 110 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-2 (B), ATIVIDADE 9, ITEM B



Há, nesse caso, uma busca de argumentos concretos para verificar que um segmento \overline{PQ} (escolhido aleatoriamente) cabe um número inteiro de vezes na base e na altura do triângulo ABC (construído pelo estudante). Dessa forma, a figura apresentada na atividade não auxiliou o participante na construção dos argumentos necessários para a justificativa solicitada no enunciado.

Quanto ao estudante G-2 (A), embora não tenha justificado o fato de PQ ser submúltiplo comum da base e da altura de qualquer triângulo semelhante a AXY , conforme pede o enunciado do item B, demonstra ter compreendido o absurdo de havermos suposto que a altura e a base do triângulo AXY são segmentos comensuráveis. De fato, ao dizer “ PQ não será submúltiplo comum da altura e da base de qualquer triângulo, pois podemos construir um triângulo semelhante a AXY onde o lado e a altura desse triângulo semelhante sejam menores que a medida PQ ”, o estudante apresentou um argumento importante, que é a possibilidade de construirmos um triângulo semelhante a AXY , com

dimensões menores do que PQ , tendo ainda PQ como submúltiplo comum da base e da altura – elemento que, na verdade, caracteriza o absurdo.

Finalmente, a resposta a este item, apresentada por G-2 (C), indica que não encontrou argumentos para justificar que PQ é submúltiplo comum da base e da altura de qualquer triângulo semelhante a AXY . Escreveu apenas:

FIGURA 111 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-2 (C) – ATIVIDADE 9, ITEM B

$$\frac{x+y}{x} = \infty PQ$$

C) Procure argumentos que mostrem que os lados do retângulo áureo são segmentos incomensuráveis.

Apresentamos, a seguir, as respostas dos estudantes, ao item C, acompanhadas das observações que consideramos relevantes para nosso estudo.

Do grupo G-2 apenas G-2 (A) elaborou uma conclusão sobre a incomensurabilidade dos lados do retângulo áureo (item C), embora não tenha exposto uma justificativa:

FIGURA 112 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-2 (A) – ATIVIDADE 9, ITEM C

- Não existe um $\lambda \in \mathbb{Z}$ que seja submúltiplo dos dois lados do retângulo ao mesmo tempo.

O protocolo a seguir (figura 113) mostra a resposta de G-1 (C):

FIGURA 113 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (C) – ATIVIDADE 9, ITEM C

Como fazíamos o item B) infinitas vezes,
 como PQ é número fixo, então chegaríamos
 em uma altura e base do triângulo menor.
 Então, chegamos ao absurdo.
 Como a altura e a base do triângulo é
 igual os lados do retângulo.
 ∴ lados do retângulo são incomensuráveis.

Faltou que o estudante mencionasse que a altura e a base dos triângulos obtidos por esse processo podem ser menores do que o segmento PQ . Não sabemos se quando diz “(...) uma altura e base do triângulo menor (...)”, o estudante está se referindo a um triângulo que é menor do que os anteriores. A observação do estudante “como \overline{PQ} é número fixo, então chegaríamos em uma altura e base do triângulo menor” pode indicar que está se referindo ao fato de a altura e a base serem menores do que \overline{PQ} , concluindo, a partir daí, que se trata de um absurdo.

Como pode ser visto no protocolo a seguir (figura 114), o estudante G-1 (D) respondeu ao item C, considerando como fato verdadeiro, a comensurabilidade dos lados do retângulo áureo e concluiu que, por isso, têm um submúltiplo comum:

FIGURA 114 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-1 (D) – ATIVIDADE 9, ITEM C

Podemos assumir que a altura e a base do retângulo áureo
 sejam segmentos comensuráveis.
 Logo, existe um submúltiplo comum entre os segmentos.

Entendemos, então, que para este estudante o trabalho realizado a respeito da noção de segmentos comensuráveis e incomensuráveis não foi suficiente.

É interessante ressaltar que, embora tenhamos elaborado esta atividade, apresentando “sugestões” ou “pistas” para que os participantes aos poucos pudessem construir uma justificativa da incomensurabilidade dos lados do retângulo áureo, utilizando a semelhança de triângulos, os integrantes do grupo G-3 nos apresentaram argumento diferente. O protocolo da figura 115 mostra a resposta de G-3 (A):

FIGURA 115 – PROTOCOLO DE EXPERIMENTAÇÃO – G-3 (A) – ATIVIDADE 9, ITEM C

Decidimos repetir o processo de encontrar retângulos áureos ^{menores} infinitas vezes, e sempre acharemos um XY que será submúltiplo da largura e do comprimento do retângulo, logo são incomensuráveis.

Constatamos que este estudante recorreu à mesma idéia utilizada para a demonstração da incomensurabilidade do lado e da diagonal do quadrado (discussão feita após a realização da atividade 8), ou seja, considerou a construção de infinitos retângulos semelhantes. É possível que estivesse se referindo aos retângulos resultantes da subdivisão do retângulo áureo (vista nas atividades 3 e 4). Não há indicação em sua escrita, mas é provável que o estudante conjecturasse a respeito de provar que, se XY for submúltiplo comum dos lados do retângulo áureo original, então será submúltiplo comum dos lados de todos os retângulos que podemos construir a partir dessa subdivisão. Chegaria, então, ao absurdo de provar que XY é submúltiplo comum dos lados de um retângulo, cujas dimensões podem ser menores do que XY.

Há, porém, uma contradição em seus argumentos, pois afirma que “sempre acharemos um XY que será submúltiplo da largura e do comprimento do retângulo” (no caso, está afirmando que a largura e o comprimento desse

retângulo são segmentos comensuráveis), e, em seguida, conclui: “logo são incomensuráveis”.

Os demais participantes não apresentaram respostas ao item C da atividade 9.

De forma geral, notamos que os estudantes mencionam o fato de “chegar a um absurdo”, mas não fazem referência ao fato de que esse absurdo foi gerado por nossa suposição inicial de que existe um segmento que é submúltiplo comum dos segmentos considerados (a base e a altura do triângulo AXY).

Levando em conta os resultados obtidos, é possível concluir que esta atividade auxiliou os estudantes a perceber em alguns processos que podem continuar indefinidamente³² uma relação com a idéia de incomensurabilidade de segmentos. Mas esses mesmos resultados indicam que houve dificuldade na compreensão do absurdo gerado pela suposição de que a diagonal e o lado do quadrado (atividade 8) ou a base e a altura do triângulo AXY (atividade 9) são segmentos comensuráveis.

Institucionalização

Para a institucionalização desta última parte – a prova da incomensurabilidade dos lados do retângulo áureo –, procuramos tomar como ponto de partida as justificativas e os argumentos produzidos pelos estudantes, tendo o propósito de complementar e ajustar o que pudesse ter apresentado alguma inconsistência durante o desenvolvimento da seqüência.

³² Por exemplo, o processo de divisões sucessivas, aplicado a grandezas, o processo de construção de infinitos quadrados, cada vez menores, utilizado para a demonstração da incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado qualquer, ou o processo interativo da subdivisão do retângulo áureo, com a obtenção de um quadrado e um retângulo menor, semelhante ao anterior.

8.^a sessão – O questionário de avaliação da engenharia didática

Conforme havíamos planejado, neste encontro solicitamos que os estudantes respondessem a um questionário que, em conjunto com as produções escritas, as gravações em fita cassete e os registros feitos pelos observadores, deveria compor o material que nos permitiria avaliar os resultados de nosso experimento.

Desejávamos que os estudantes, ao responder às questões propostas, avaliassem seus avanços nos conhecimentos de seção áurea de segmentos, incomensurabilidade de segmentos e da relação entre esses dois conteúdos, proporcionados pelo desenvolvimento deste trabalho.

Além disso, este questionário nos possibilitaria conhecer a opinião dos futuros professores a respeito da suficiência desta engenharia para o desenvolvimento dos conteúdos abordados, sendo uma oportunidade para a reflexão sobre os pontos falhos e sobre as adequações consideradas necessárias para que os objetivos fossem atingidos.

As questões constantes do questionário são apresentadas no Apêndice.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo contém uma síntese das conclusões resultantes do confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori*. Apontamos aqui os aspectos positivos de nossa engenharia, destacando fatos que, a nosso ver, são sinais de avanço em relação aos resultados observados no pré-teste e que nos permitiram concluir que, em parte, nossa hipótese foi validada. Fazemos também uma reflexão a respeito das limitações que se apresentaram durante a realização da engenharia e levantamos alguns pontos que poderiam ser objetos de uma atenção mais específica em novas discussões ou investigações sobre a noção de “incomensurabilidade de segmentos de reta”.

Norteados pelas seguintes *questões de pesquisa*:

- O estudo da seção áurea é um contexto favorável para o desenvolvimento da noção de incomensurabilidade de segmentos de reta?
- Por meio de uma seqüência didática pode-se estabelecer um elo de ligação entre uma construção geométrica e o conjunto dos números irracionais, embora sejam conteúdos aparentemente dissociados?

desenvolvemos nosso estudo, com base na hipótese de que:

- Uma seqüência didática sobre a seção áurea, cuja realização favoreça a articulação entre quadros distintos de conhecimentos, pode propiciar a compreensão/desenvolvimento da noção de “incomensurabilidade de segmentos de reta”.

Análise dos resultados

Conforme foi observado anteriormente, as respostas dos nove estudantes de Licenciatura em Matemática, submetidos ao pré-teste, revelaram que apenas dois haviam tido algum contato com o assunto “seção áurea de um segmento”, provavelmente de forma superficial. Percebemos também que sete estudantes ainda não haviam construído a noção de “incomensurabilidade de segmentos”, havendo, por parte de alguns, a associação entre a expressão “segmentos incomensuráveis” e a idéia de “segmentos que não podem ser medidos”.

Esses resultados nos mostraram que, para atingir nossos objetivos, seria necessário elaborar uma seqüência didática que propiciasse, em primeiro lugar, a construção da noção de “seção áurea”. Essa abordagem foi feita por meio do estudo das características do retângulo áureo (atividades 1 a 7), compondo o contexto para a exploração da noção de “incomensurabilidade de segmentos de reta” (atividades 8 e 9).

Com a aplicação das quatro primeiras atividades, desejávamos despertar o interesse dos estudantes para algumas situações retiradas de ambientes aparentemente alheios à matemática, para que a observação de algumas regularidades produzisse a generalização e a elaboração de conclusões a respeito das características do retângulo áureo. Notamos que a percepção da freqüência na obtenção do resultado aproximado de 1,6, como razão entre as medidas dos segmentos destacados nos enunciados, e a observação do processo iterativo de subdivisões do retângulo, tendo como resultado um quadrado e um retângulo menor semelhante ao original, propiciaram a generalização que esperávamos, permitindo aos participantes iniciar a construção

da noção de retângulo áureo e elaborar uma definição de retângulo áureo (ainda incompleta, pois até esta fase a razão entre as medidas dos lados do retângulo áureo foi tratada com aproximação de uma casa decimal).

O desenvolvimento das quatro primeiras atividades envolve medição de segmentos de reta, cálculo da razão entre essas medidas e levantamento de conclusões que exigem a mobilização de alguns conhecimentos prévios: figuras geométricas planas, proporcionalidade e semelhança de figuras planas. É possível que essa abordagem inicial tenha criado uma expectativa de que as demais atividades iriam requerer as mesmas estratégias, os mesmos procedimentos e apresentariam o mesmo grau de dificuldade. Essa suposição é baseada no fato de os estudantes terem encontrado dificuldade em determinar a razão entre as medidas dos lados do retângulo áureo, sem utilizar instrumentos que permitissem efetuar a medição de segmentos, conforme foi solicitado na atividade 5.

Ao solicitar a razão entre as medidas dos lados do retângulo áureo, sem disponibilizar instrumentos de medida (atividade 5) tínhamos a intenção de que os estudantes chegassem a um impasse, tornando obrigatória a estratégia da mudança de quadros. Ou seja, não tendo disponíveis os instrumentos de medir e a calculadora, desejávamos que os estudantes discutissem, conjecturassem, buscassem conhecimentos já institucionalizados em quadro distinto daquele em que a atividade havia sido proposta. Assim, utilizando noções de proporcionalidade e de equações do segundo grau (conhecimentos do quadro algébrico), o estudante ampliaria seus conhecimentos a respeito do retângulo áureo, e a partir desta atividade, saberia que a razão entre as medidas do lado maior e do lado menor é o número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, cuja representação decimal com aproximação de milésimos é 1,618....

Não ocorreu, de imediato, a elaboração de uma estratégia para a determinação da razão solicitada. A retomada das características do retângulo áureo serviu como ponto de partida para a discussão nos grupos a respeito de considerar a semelhança dos retângulos como estratégia de solução. Dessa

forma, foram feitas tentativas de solucionar o problema, pela utilização de ferramentas do quadro algébrico (construção de proporções formadas pelas medidas dos lados correspondentes dos retângulos semelhantes), para a solução do problema enunciado no quadro geométrico. Entretanto, apenas dois estudantes apresentaram uma abordagem que produziria o resultado solicitado, se houvessem completado a atividade. Empregando propriedades das proporções, esses dois estudantes obtiveram equações do segundo grau, que foram entregues sem solução. Neste caso, é possível que esses estudantes tenham encontrado dificuldades na resolução de equações literais do segundo grau.

A dificuldade demonstrada pelos estudantes para a realização desta atividade nos fez refletir sobre o desnível entre as quatro primeiras atividades e a quinta, provocando uma ruptura no processo de medição, cálculo de razões entre as medidas, observação da regularidade na ocorrência da razão de aproximadamente 1,6 e generalização. Poderíamos, assim, considerar que a estrutura das quatro atividades iniciais e as estratégias necessárias para sua resolução podem ter influenciado o comportamento dos estudantes, durante o desenvolvimento da atividade 5, em que a solicitação é a mesma (determinação da razão entre as medidas dos lados de um retângulo), mas são diferentes os instrumentos disponíveis para a execução da tarefa.

Observamos na análise *a posteriori* da atividade 5 que, se a figura apresentada no enunciado fosse acrescida de outros dados (a medida dos lados representada por letras “a” e “b”, por exemplo), talvez fosse melhor a compreensão e maior o desembaraço dos estudantes diante do impasse provocado pela aparente ausência de dados ou de estratégias viáveis. É possível, então, que houvessem verificado a possibilidade de utilizar seus conhecimentos sobre proporções e equações (quadro da álgebra), para buscar a solução do problema enunciado no quadro geométrico.

É provável também que essas quatro primeiras atividades não tenham sido suficientes como preparação para o desenvolvimento da atividade 5, pois, apesar da interação entre os sujeitos, das conjecturas e da discussão em grupo,

não ocorreu aos estudantes a idéia de que, buscando conhecimentos do quadro algébrico (proporções e equações do segundo grau), poderiam obter como resultado um elemento do quadro numérico.

Talvez não fosse o caso de acrescentar uma ou mais atividades, numa ampliação quantitativa da seqüência, mas de apresentar situações que permitissem uma transição entre o caráter “empírico” das quatro primeiras atividades (em que os resultados são sempre números racionais) e a exigência de um trabalho mais formal, para o desenvolvimento da quinta atividade (em que o resultado é um número irracional).

Mariotti (1998), refletindo sobre o artigo *Intuition and proof*, escrito por Fischbein (1982), se refere a essa “transição”, afirmando que “a discrepância entre a verificação empírica – típica do procedimento comum – e o raciocínio dedutivo – típico do procedimento teórico – é uma fonte de dificuldades, um obstáculo para uma apreciação do sentido da prova”.

Um outro ponto da seqüência que deve merecer atenção especial é a atividade 7. Novamente neste caso, desejávamos que o estudante enfrentasse o embaraço de, tendo em mãos a construção geométrica de uma figura isenta de dados numéricos, provar que se trata de um retângulo áureo, ou seja, provar que a razão entre o lado maior e o lado menor do retângulo apresentado é igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. A prova solicitada exigiria do estudante a mobilização de recursos do quadro algébrico para obter o resultado no quadro numérico. Observamos que à dificuldade própria da situação proposta (são dados apenas elementos geométricos e o resultado que se espera pertence ao quadro numérico) foi acrescentada uma outra dificuldade decorrente da realização da atividade 5.

Na atividade 5, o estudante sabe que o retângulo é áureo e deve determinar a razão entre o lado maior e o menor. Nesse caso, todas as características do retângulo áureo, que já são conhecidas, podem ser utilizadas em seus argumentos, para a determinação da razão $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ entre os dois segmentos. Na atividade 7, o estudante tem a construção de um retângulo e deve

provar que esse retângulo é áureo, ou seja, deve também chegar à razão $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ entre o lado maior e o menor, mas a estratégia é necessariamente diferente, pois aqui não pode usar a semelhança de retângulos como hipótese.

Notamos, durante a aplicação, que os participantes sabiam que deveriam obter $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ como razão entre o lado maior e o lado menor do retângulo construído, isto é, perceberam que a mudança de quadros poderia levá-los à solução desejada. No entanto, tiveram dificuldade em identificar os conhecimentos do quadro algébrico adequados à situação proposta.

Apenas um estudante iniciou uma abordagem que, com as devidas correções, levaria à prova solicitada.

As dúvidas manifestadas pelos estudantes a respeito dos elementos que poderiam ser considerados verdadeiros para a construção da justificativa solicitada na atividade 7 poderiam ser atribuídas ao fato de termos o retângulo áureo como objeto de estudo, durante todas as atividades anteriores – fato que pode ter gerado nos estudantes a idéia de que a figura construída durante a primeira parte desta mesma atividade era um retângulo áureo, independentemente de qualquer menção a esse respeito, no enunciado. Essa idéia pode ser percebida no comentário feito por um dos integrantes do grupo G-1, durante a realização da atividade: “pelo contrato didático,³⁴ este retângulo é áureo”.

Quanto à atividade que trata da identificação de segmentos comensuráveis e incomensuráveis, observamos que, mesmo tendo demonstrado ausência de conhecimentos sobre a noção de incomensurabilidade de segmentos, em suas respostas ao pré-teste, alguns estudantes classificaram o lado e a diagonal do quadrado como segmentos incomensuráveis sem utilizar o processo de divisões sucessivas. Suas respostas demonstram que têm conhecimento de que num quadrado, cujo lado mede “x”, a diagonal mede “x. $\sqrt{2}$ ”,

³⁴ Nome dado por Guy Brousseau (1986) ao conjunto de cláusulas e regras que se estabelecem implícita ou explicitamente e que regem a conduta das partes envolvidas no processo de ensino e aprendizagem.

e que, em virtude disso, o lado e a diagonal de qualquer quadrado são segmentos incomensuráveis.

Tais respostas podem ser resultado de estudo anterior sobre “irracionalidade” e/ou “incomensurabilidade de segmentos” restrito a apenas alguns exemplos, sendo um deles o par de segmentos: lado e diagonal de um quadrado qualquer.

Isso nos levou a questionar se não teria sido mais conveniente apresentar, dentre os segmentos a serem classificados pelos estudantes, um outro par de segmentos incomensuráveis (que não fossem lado e diagonal de um quadrado), evitando, assim, que a idéia de segmentos incomensuráveis se desenvolvesse estritamente vinculada a esse exemplo.

Constatamos, pelas respostas dos estudantes, que o processo de divisões sucessivas aplicado a grandezas pode auxiliar na abordagem inicial da noção de incomensurabilidade de segmentos e na compreensão da prova da incomensurabilidade do lado e da diagonal do quadrado. No entanto, considerando as conclusões dos participantes sobre a incomensurabilidade do lado e da diagonal do quadrado, após a institucionalização desse conhecimento, percebemos que a aplicação do processo de divisões sucessivas para a identificação de segmentos incomensuráveis deu origem à suposição de que a possibilidade de construir infinitos quadrados seria suficiente para a conclusão de que o lado e a diagonal do primeiro quadrado são segmentos incomensuráveis.

Nesse caso, é provável que a noção de incomensurabilidade de segmentos tenha ficado vinculada unicamente à idéia de infinitas divisões, e, de certa forma, o processo de divisões sucessivas parece não ajudar na percepção e compreensão do absurdo a que chegamos, quando provamos que um segmento XY é submúltiplo comum do lado e da diagonal dos infinitos quadrados, inclusive daqueles, cujas dimensões podem ser menores do que o próprio segmento XY .

É possível que a fase de institucionalização da noção de incomensurabilidade de segmentos, em que foi discutida a prova da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado qualquer, não

tenha atingido satisfatoriamente o objetivo de auxiliar os estudantes a perceber o absurdo de supor que o lado e a diagonal do quadrado são segmentos comensuráveis.

Ficou evidenciada, novamente, a dificuldade na passagem de uma abordagem empírica (identificação de segmentos incomensuráveis, pelo processo das divisões sucessivas) para uma formal (prova da incomensurabilidade de segmentos de reta), reiterando as palavras de Mariotti (1998), quando diz: “(...) uma diferença crucial ocorre entre a verificação empírica e a dedução lógica e o resultado disso é que essa relação se torna problemática”.

Alguns dos sujeitos de nossa pesquisa se manifestaram a esse respeito em suas respostas ao questionário final, dizendo que o desenvolvimento das provas solicitadas foi considerado ponto de maior dificuldade durante a realização da seqüência didática.

Embora não fosse nosso objetivo principal a elaboração de uma demonstração da incomensurabilidade dos lados do retângulo áureo, consideramos que seria incompleto o nosso trabalho se em seu desenvolvimento não fosse contemplada uma prova formal da incomensurabilidade de dois segmentos de reta.

Levando em conta os resultados das atividades que tratam da identificação de segmentos comensuráveis e incomensuráveis e da prova da incomensurabilidade de segmentos de reta, no contexto da seção áurea, julgamos que novos experimentos sobre o mesmo assunto, poderiam investigar os conhecimentos prévios dos sujeitos concernentes ao desenvolvimento de uma demonstração, incluindo a prova por absurdo, uma vez que a ausência de um trabalho anterior a esse respeito pode se tornar fator complicador para a realização desta seqüência.

Não obstante o fato de termos detectado as limitações apontadas acima, consideramos que a atividade sobre a identificação de segmentos incomensuráveis, baseada no algoritmo de Euclides, permitiu que os futuros professores experimentassem situações que podem favorecer a construção de

uma idéia inicial a respeito da existência de segmentos incomensuráveis, ou segmentos que não admitem uma “maior medida comum”. Além disso, os participantes tiveram oportunidade de refletir sobre a ausência de situações concretas, que permitam a obtenção de um número irracional como resultado da medição de segmentos.

Quanto à segunda questão de nossa pesquisa, as soluções expostas por alguns estudantes indicam que esta engenharia permitiu que estabelecessem um elo de ligação entre determinadas construções geométricas e o conjunto dos números irracionais. Como exemplo, tomamos os procedimentos utilizados para obter o número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, por meio da construção geométrica, e em seguida para construir o retângulo áureo. A estratégia utilizada para provar que o retângulo é áureo também indica que foi estabelecida a ligação entre a figura construída com régua e compasso e o número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

A nosso ver, o caminho foi delineado, houve pontos de avanço na construção da noção de segmentos incomensuráveis, na articulação entre conhecimentos de quadros diferentes para a resolução das situações propostas, nas discussões em que o objetivo era buscar argumentos para a elaboração das justificativas. Afigura-se-nos, porém, que o alvo que desejávamos atingir ao desenvolver a engenharia, qual seja explorar a noção de incomensurabilidade de segmentos de reta, no contexto da seção áurea, requer mais tempo para as discussões e para uma avaliação contínua que poderia ser realizada em conjunto com os sujeitos da pesquisa, futuros professores, que provavelmente irão desenvolver este conteúdo com seus alunos.

Consideramos, finalmente, que as “limitações” aqui apontadas constituem pontos que merecem um estudo mais aprofundado e uma atenção particular, tanto na elaboração das atividades que compõem a seqüência quanto na condução do trabalho, e os resultados obtidos podem

- servir como pontos de partida para novas investigações;
- auxiliar os futuros professores a avaliar e compreender as dificuldades de seus alunos, quando iniciam o difícil trabalho de construção da noção de incomensurabilidade de segmentos;
- permitir a reflexão a respeito de uma organização diferenciada de conhecimentos prévios, para a elaboração de um novo conhecimento.

BIBLIOGRAFIA

AABOE, A. *Episódios da história antiga da matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

ÁVILA, G. História e histórias..., retângulo áureo, divisão áurea e seqüência de Fibonacci. *RPM*, São Paulo, n. 6, p. 9-14, 1.º sem. 1985.

———. Olhando mais de cima. Grandezas incomensuráveis e números irracionais. *RPM*, São Paulo, n. 5, p. 6-11, 2.º sem. 1984.

———. *Análise matemática para licenciatura*. São Paulo: Edgard Blücher, 2001.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. *Um estudo da noção de grandeza e implicações no Ensino Fundamental*. Natal: SBHMat, 2002. v. 8. (Série Textos de história da matemática.)

BÉRENCE, F. *Leonardo da Vinci*. Lisboa: Verbo, 1974. (Série Grandes artistas.)

BIEMBENGUT, M. S. *Número de ouro e secção áurea: considerações e sugestões para a sala de aula*. Blumenau: Ed. da FURB, 1996.

BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Gradiva, 2000.

CARVALHO, J. B. P. Olhando mais de cima. Euclides, Fibonacci e Lamé. *RPM*, São Paulo, n. 24, p. 32-40, 2.º sem. 1993.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é matemática?* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000.

DOCZI, G. *O poder dos limites: harmonias e proporções na natureza, arte e arquitetura*. São Paulo: Mercuryo, 1990.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar*. São Paulo: Atual, v. 9, 1985.

DOUADY, R. A universidade e a didática da matemática: os IREM na França. *RPM*, São Paulo, v. 1, n. 1, 1990.

———. Jeux des cadres et dialectique outil-object. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 5-31, 1986.

———. Didactic Engineering, in: T. Nunes & Bryant, *Learning and teaching mathematics, an international prospective*, IREM, Université Paris 7, Paris, p. 373-401, 1997.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FISCHBEIN, E. et al. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, Boston, n. 29, p. 29-44, 1995.

FISCHBEIN, E. *Intuition in science and Mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Reidel, 1987.

GASPAR, M. T. J. *Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores*. 2003. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Unesp, Rio Claro (SP).

GHYKA, M. C. *El numero de oro: ritos y ritmos pitagóricos en el desarrollo de la civilización occidental. I-Los ritmos*. Barcelona: Poseidon, 1978.

HEATH, T. L. *The thirteen books of Euclid's elements*. Translated from the text of Heiberg. New York: Dover Publications, 1956.

HUNTLEY, H. E. *The divine proportion: a study in mathematical beauty*. New York: Dover Publications, 1970.

_____. *A divina proporção: um ensaio sobre a beleza na matemática*. Brasília: Editora da UnB, 1970.

IEZZI, G. et al. *Fundamentos de matemática elementar*. São Paulo: Atual, 1985, v. 4.

IGLIORI, S. B. C.; SILVA, B. A. *Concepções dos alunos sobre os números reais. A prática educativa sob o olhar de professores de cálculo*. Belo Horizonte: Fumarc, 2001. p. 39-66.

KATZ, V. J. *A history of mathematics an introduction*. New York: Harper Collins College Publishes, 1993.

LIMA, E. L. *Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança*. Rio de Janeiro: Graftex, 1991. (Coleção do Professor de matemática.)

MACHADO, S. D. A. et al. *Educação matemática: uma introdução*. São Paulo: Educ, 1999.

- MARIOTTI, M. A. *Intuition and proof: reflecting on Fischbein's paper*. Itália: Università di Pisa, 1998.
- MARMO, C. *Curso de desenho: construções fundamentais*. São Paulo: Moderna, 1964. v. 1.
- NIVEN, I. *Números: racionais e irracionais*. Coleção fundamentos da matemática elementar. Rio de Janeiro: SBM, 1984.
- PIETROPAOLO, R. C. *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática: um estudo dos pareceres*. 1999. Tese (Mestrado em Educação: Supervisão e Currículo) – PUC, São Paulo.
- ROGALSKY, M. et al. Les grandeurs géométriques, physiques... et leur formalisation et calcul par les procédures "intégrale" et "dérivée-primitive". *Carrefours entre Analyse Algèbre Géométrie*. França: Ellipses Édition, 2001. p.197-199. (Collection Capes.)
- ROSSMEISSL, J. W.; WEBBER, F. A. Incomensuráveis e números irracionais. *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: números e numerais*. São Paulo: Atual, 1992. p. 54-56.
- SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta curricular para o ensino de matemática: Ensino Fundamental*. 5. ed. 1997.
- SCHENCK, C.; SELBY, S. A seção áurea. *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: geometria*. São Paulo: Atual, 1992. p. 42-45.
- SIROTIC, N. *Prospective secondary mathematics teachers' understanding of irrationality*. 2004. Dissertação (Mestrado) – Simon Fraser University, Canada.
- STRICKLAND, C. (Ph.D.). *Arquitetura comentada: uma breve viagem pela história da arquitetura*. Rio de Janeiro: Ediouro, 2003.

TAHAN, M. *As maravilhas da matemática*. 6. ed. Rio de Janeiro: Bloch, 1987.

VIANNA, H. M. *Pesquisa em educação – a observação*. Brasília: Plano Editora, 2003.

MATERIAIS ESPECIAIS

BROUSSEAU, G. *Les grandeurs dans la scolarite obligatoire*. Actes de la 11.^a École d'Été des mathematiques. La Pensee Sauvage. France: Version Electronique du Cederom.

GARDES, M. *La divine proportion de Luca Pacioli*. Disponível em: <http://www.ac-poitiers.fr/arts_p/b@lise14/pageshtm/page_4.htm>. Acesso em: 2 dez. 2003.

LUCHETTA, V. O. J. *Secção áurea*. Disponível em: <<http://www.matematica.br/historia/saurea>>. Acesso em: 29 jun.2003.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *The golden ratio*. Disponível em: <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Golden_ratio.html>. Acesso em: 2 dez. 2003.

RESOLVIENDO una ecuación :: ¿Cuánto vale Phi? :: El hermano de Phi :: Ecuaciones de 2º. grado. Disponível em: <<http://eos.cnice.mecd.es/secundaria/matematicas/phi/paginaspresentacion/hermanophi2.htm>>. Acesso em: 23 jun. 2003.

APÊNDICE

PRÉ-TESTE

1. Você sabe o que é seção áurea de um segmento de reta?

Em caso afirmativo, que condições devem ser satisfeitas, para que um ponto P seja considerado seção áurea de um segmento AB qualquer? Dê um exemplo.

2. Defina segmentos comensuráveis e segmentos incomensuráveis. Dê exemplos.

3. Qual é a relação entre seção áurea e incomensurabilidade de segmentos de reta?

ATIVIDADE 1 – MATEMÁTICA NA ARTE

A). O PARTENON

A foto abaixo nos mostra o **Partenon** – templo construído no século V a.C., para acolher a estátua da deusa Atena, com quase 15 m de altura. Nessa época, eram estabelecidas as proporções ideais para os elementos que compunham os templos, com o objetivo de que fossem admirados como esculturas.

O Partenon é uma das obras mais importantes da arquitetura grega e considera-se que, mesmo estando em ruínas, projeta uma imagem de lógica e precisão.

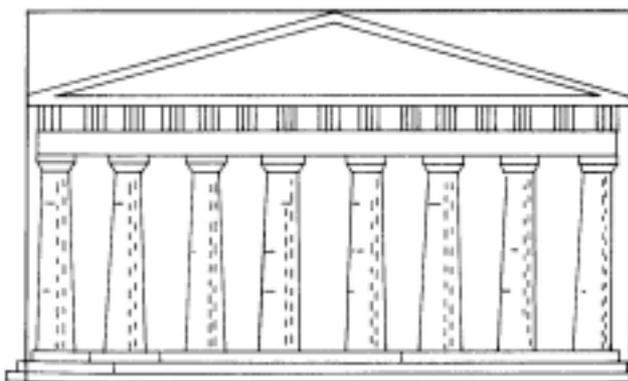
FIGURA 23 – O PARTENON



Fonte: Strickland, 2003, p. 13.

O contorno de sua fachada, quando ainda estava intacta, poderia ser “encaixado” em um retângulo, como podemos observar na figura abaixo:

FIGURA 24 – O PARTENON



Fonte: Huntley, 1970, p.63

Meça os lados do retângulo que “contorna” o Partenon na figura acima e depois, complete:

$$\frac{\textit{comprimento}}{\textit{largura}} =$$

B). ISABEL D'ESTE

FIGURA 34 - ISABEL D'ESTE, por Leonardo da Vinci



Fonte: Tahan, 1987, p. 235.

FIGURA 35 – ISABEL D'ESTE, por Leonardo da Vinci



Fonte: Bérence, 1974, p. 142.

Este é o retrato de Isabel d'Este, obra famosa de Leonardo da Vinci, datada de 1500.

Um esboço da mesma obra, à esquerda, apresenta traços que indicam as proporções observadas pelo artista.

Com o auxílio desse esboço, complete a tabela abaixo:

Q (queixo)	T (testa)	R (rosto)	$\frac{R}{Q}$	$\frac{Q}{T}$

C). MARIA MÜLLER

FIGURA 27 - MARIA MÜLLER



Fonte: Jornal do MEC, out.2001 (capa).

Aqui temos **Maria Müller**, professora, 103 anos, memória do magistério do início do século passado (Jornal do MEC, de outubro de 2001).

Pensamos que se Leonardo da Vinci houvesse pintado esse retrato, talvez pudesse ter utilizado as mesmas proporções observadas no retrato de Isabel d'Este.

Obtenha as medidas do rosto (R), da testa (T) e do queixo (Q), e complete a tabela:

	Rosto (R)	Queixo (Q)	Testa (T)	$\frac{R}{Q}$	$\frac{Q}{T}$
Maria Müller					

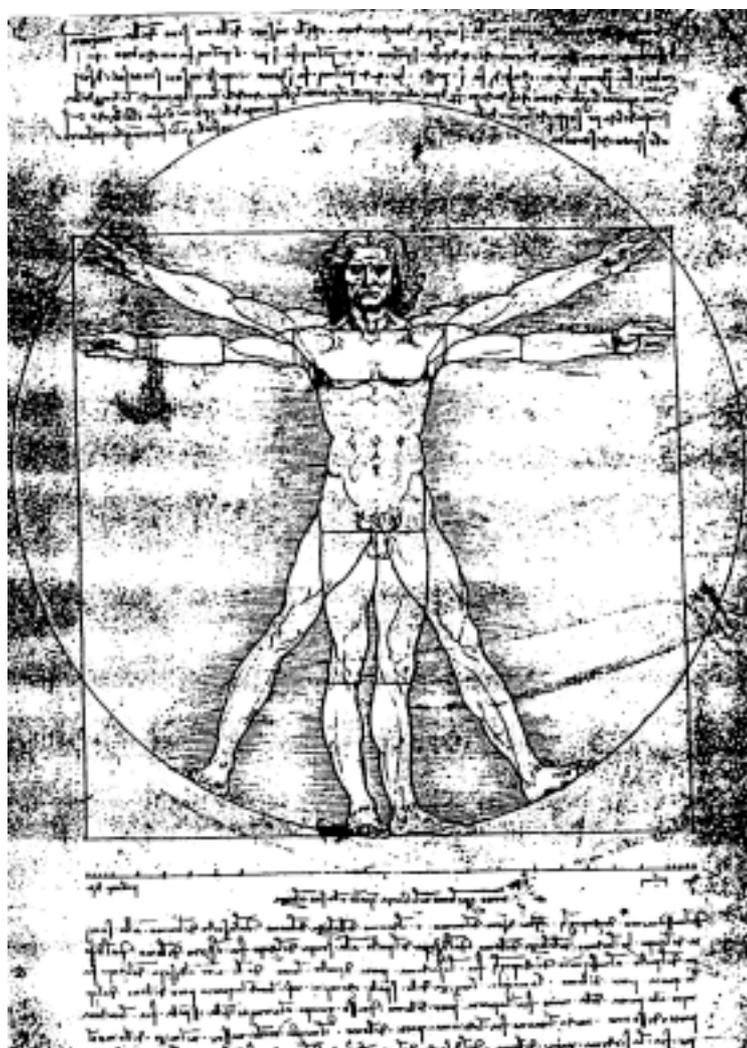
Compare os resultados obtidos para os itens A), B) e C) desta atividade. O que você observou?

D). O IDEAL DE BELEZA – O CORPO INTEIRO

Por meio dos itens anteriores, somos levados a observar a importância atribuída aos padrões de beleza preestabelecidos e a fidelidade mantida por alguns artistas, no sentido de observar determinadas proporções, buscando imprimir em suas obras, características de harmonia e perfeição.

Os gregos estabeleceram as medidas ideais para o corpo humano, que serviram como parâmetros para a produção de esculturas que se tornaram modelos de beleza ideal. O quadro abaixo ilustra a idéia de padrão de beleza idealizado por Vitruvius:

FIGURA 28 - O HOMEM SEGUNDO AS PROPORÇÕES DE VITRÚVIO



Fonte: Bérence, 1974, p. 227.

Determine o quociente entre o lado do quadrado e o raio da circunferência.

Que relação existe entre este item da atividade, e os itens anteriores?

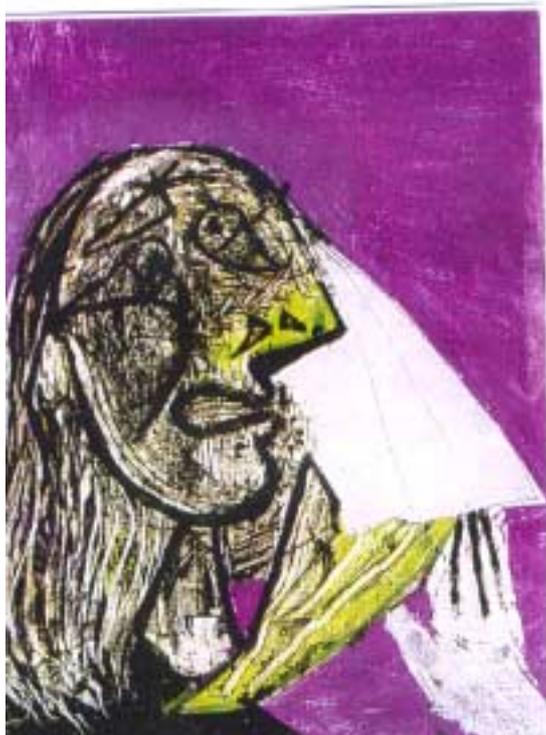
E). ARTE *in* PERFEIÇÃO MATEMÁTICA

Há séculos, vem sendo observada essa busca de harmonia e perfeição, talvez atendendo a uma necessidade característica do homem, no sentido de completar, com sua contribuição, a arte já começada, exposta no universo.

Não há dúvida a respeito do bem estar que a harmonia proporciona, mas, a ausência da harmonia e da obediência a padrões estabelecidos não implica ausência da arte.

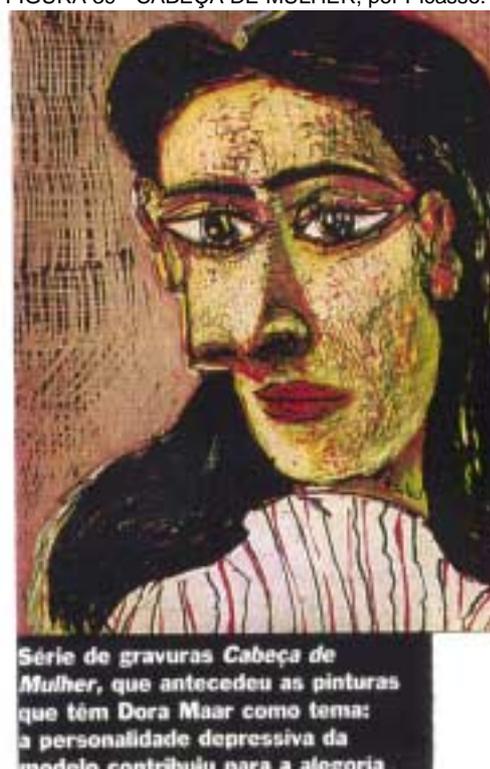
Dora Maar – musa – é a prova do que acabamos de dizer.

FIGURA 38 - A MULHER QUE CHORA, por Picasso.



Fonte: *Veja*, jul. 1999, p. 150.

FIGURA 39 - CABEÇA DE MULHER, por Picasso.



Fonte: *Veja*, jul. 1999, p. 149.

Nas gravuras acima: *A Mulher que Chora* e *Cabeça de Mulher*, dedicadas a ela, Pablo Picasso (1881-1973) transportou para a tela, em “formas torturadas”, como ele mesmo expressou, uma personalidade triste, depressiva, representando Dora, de acordo com sua interpretação.

Não há necessidade de simetria, padrões ou proporções perfeitas, para que essa obra (quase violenta!) seja apreciada e, seu autor, lembrado como um gênio...

Assim sendo, nosso propósito para esta atividade, é o de identificar na arte (ou em parte dela) elementos que possam constituir ponto de partida para o desenvolvimento de um conteúdo matemático.

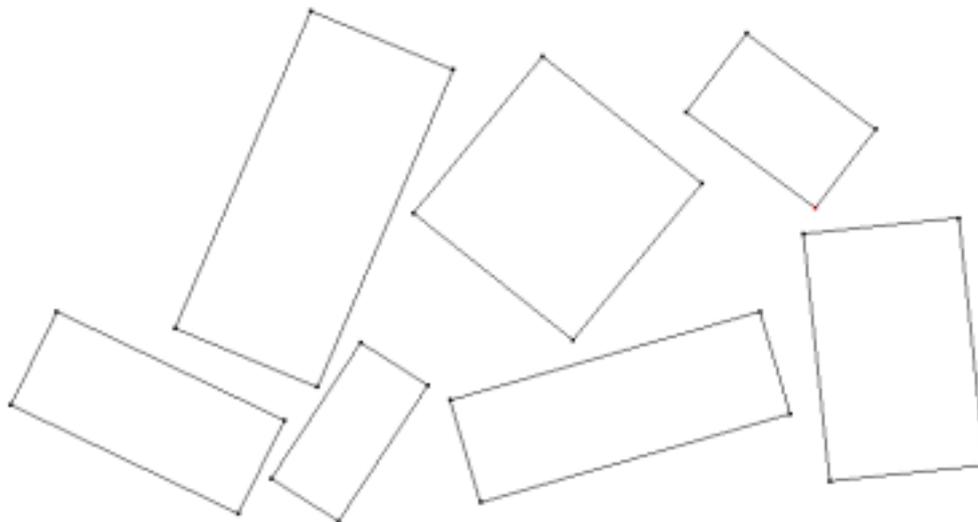
Levando em consideração os destaques feitos nesta atividade, a respeito da arquitetura (o Partenon), da obra de Leonardo da Vinci (o retrato de Isabel d'Este), de Vitruvius – (os padrões ideais de beleza) e de Pablo Picasso (Dora Maar), conclui-se que, embora o conceito de beleza sofra variações com o passar do tempo, a matemática pode oferecer recursos que nos auxiliem a verificar se uma obra apresenta as proporções consideradas perfeitas, de acordo com os padrões gregos de beleza.

Que conteúdos da matemática você pode usar para realizar essa verificação?

ATIVIDADE 2

Considere os retângulos abaixo.

Em qual deles, tendo sido ampliado proporcionalmente, poderia ser “encaixada” a fachada do Partenon? (Você pode assinalar um ou mais) Justifique sua resposta.



ATIVIDADE 3

Na seqüência abaixo, a figura II foi obtida a partir da divisão do retângulo da figura anterior, em um quadrado e um retângulo menor.

Observe a construção das figuras III e IV e em seguida, complete as figuras V e VI.

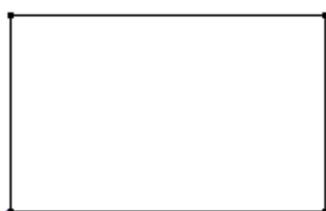


Figura I

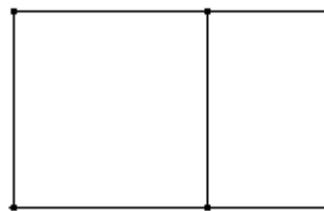


Figura II

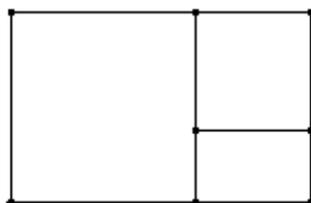


Figura III

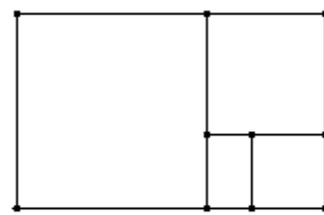


Figura IV

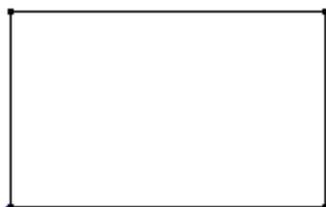


Figura V

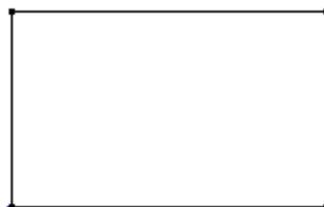


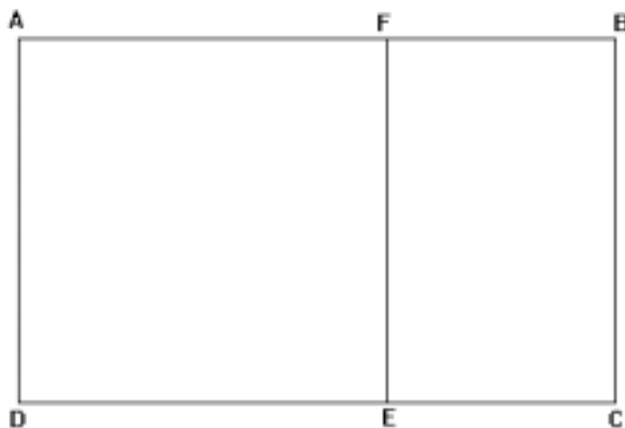
Figura VI

Justifique sua construção, por escrito, apontando as características das figuras anteriores, que serviram como base para o seu procedimento.

Desejando ampliar a seqüência, quantas figuras ainda poderíamos obter, usando o mesmo processo?

ATIVIDADE 4

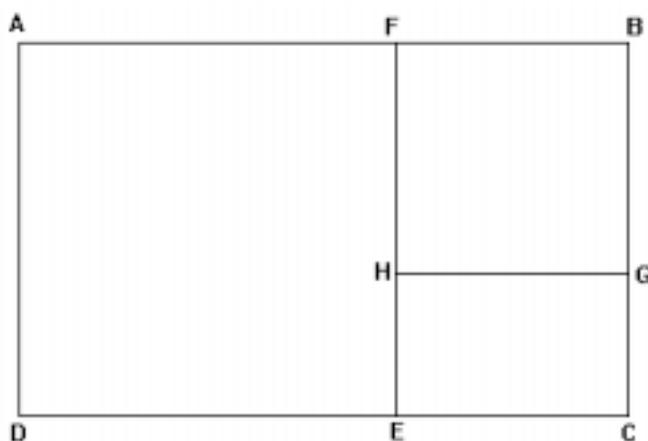
- A). Na figura abaixo, do retângulo ABCD, “retiramos” o quadrado ADEF, obtendo o retângulo BCEF.



Complete a seguinte tabela:

	comprimento	largura	$\frac{\text{comprimento}}{\text{largura}}$
Retângulo ABCD			
Retângulo BCEF			

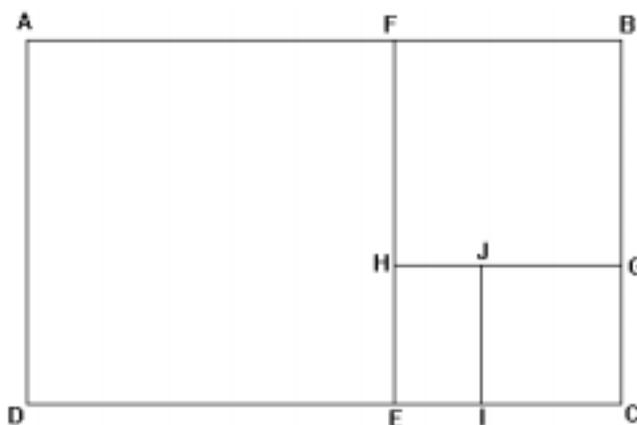
- B). Considerando ainda a mesma figura, do retângulo BCEF, “retiramos” o quadrado BGHF, obtendo um outro retângulo menor, que é CEHG.



Complete a tabela:

	<i>comprimento</i>	<i>largura</i>	$\frac{\textit{comprimento}}{\textit{largura}}$
Retângulo ABCD			
Retângulo BCEF			
Retângulo CEHG			

- C). Se ainda, na mesma figura, “retirarmos” do retângulo CEHG, um quadrado CIJG, obteremos o retângulo menor EHJI.



Complete a tabela:

	comprimento	largura	$\frac{\text{comprimento}}{\text{largura}}$
Retângulo ABCD			
Retângulo BCFG			
Retângulo CEHG			
Retângulo EHJI			

1). Considerando as construções desta atividade, responda:

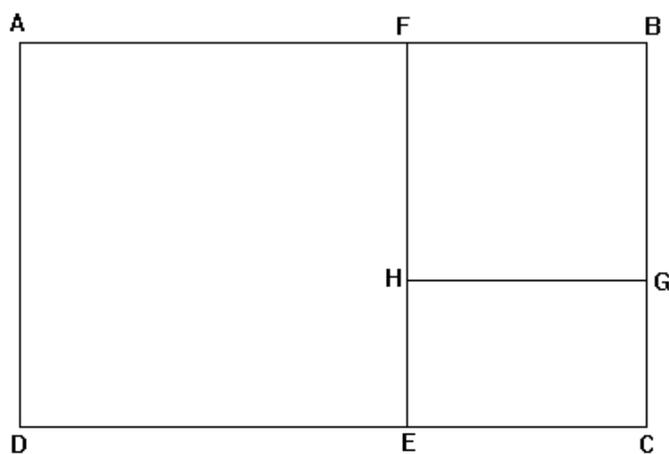
- Os retângulos ABCD, BCFG, CEHG e EHJI são semelhantes? Justifique sua resposta.
- Desejando continuar a subdivisão, quantos retângulos mais, você considera possíveis?
- Que relação existe entre o retângulo inicial ABCD e todos os possíveis retângulos, dessa subdivisão? Explique.

2). O retângulo imaginário, no qual seria possível “encaixar” a fachada do Partenon é denominado **retângulo áureo**, em virtude das características especiais, que lhe dão um aspecto de mais precisão, lógica e harmonia.

- Sabendo que o retângulo ABCD desta atividade é semelhante àquele retângulo imaginário, o que você conclui a respeito de cada um dos retângulos obtidos pelo processo de subdivisão, realizado nesta atividade?
- Considerando as atividades já desenvolvidas, quais são as características de um retângulo áureo?

ATIVIDADE 5

É dado o retângulo áureo ABCD.



Durante o desenvolvimento das atividades anteriores, trabalhamos com valores aproximados.

Considere todas as características do retângulo áureo e determine a razão $\frac{AB}{BC}$, sem aproximação.

ATIVIDADE 6 – A CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO ÁUREO

Primeira Parte

1. Construa um retângulo áureo, sem trabalhar com medidas.
2. Faça um registro escrito de sua construção, justificando cada passo.

Segunda Parte

Use a régua graduada e a calculadora, para verificar se as medidas do retângulo construído também garantem que seja um retângulo áureo.

ATIVIDADE 7

Primeira parte: Construa um retângulo ABCD, de acordo com as orientações abaixo:

1. Traçamos a reta r , suporte de \overline{AB}
2. Construimos um arco com centro em B e raio AB , interceptando a reta r , no ponto E .
3. Pelo ponto B , construímos uma reta s , perpendicular a r , interceptando o arco do item anterior, no ponto F .
4. Seja M , o ponto médio de \overline{BE} .
5. Construimos um segundo arco, com centro em M , e raio MF , interceptando \overline{AB} , no ponto X .
6. Tomamos um ponto C sobre a reta s , tal que $XB=BC$.
7. BC é o lado menor do retângulo $ABCD$ desejado.
8. Por C , traçamos uma paralela a r .
9. Por A , traçamos uma paralela a s .
10. Chamamos de D , o ponto de intersecção das retas traçadas nos itens 8 e 9.

Segunda parte: Prove que esse retângulo é áureo.

ATIVIDADE 8 – M.D.C. DE NÚMEROS E SEGMENTOS

A). É conhecido o algoritmo de Euclides, que nos permite extrair o máximo divisor comum de números naturais, por meio de divisões sucessivas, como observamos a seguir:

m.d.c. (327, 52)

	6	3			
327	52	15	7		
15	7				

O cálculo estará completo, quando obtivermos resto zero e o último divisor será o máximo divisor comum dos números considerados inicialmente.

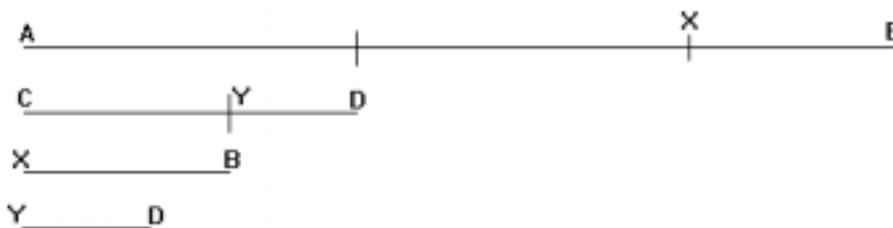
Procedimento análogo pode ser utilizado para a determinação da “maior medida comum de dois segmentos”.

Abaixo mostramos como você poderia iniciar esse processo:

São dados os segmentos de reta AB e CD. Desejamos determinar a maior medida comum desses segmentos:



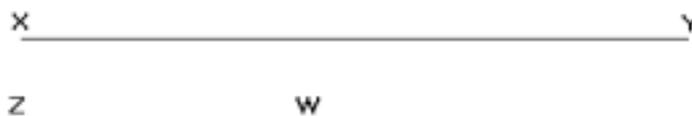
SOLUÇÃO:



.....

	2	1			
AB	CD	XB	YD		
XB	YD				

B). Sejam os segmentos XY e ZW abaixo. Determine um segmento de reta que, de acordo com o algoritmo de Euclides, seja considerado a “maior medida comum” de \overline{XY} e \overline{ZW} .



.....

XY	ZW						

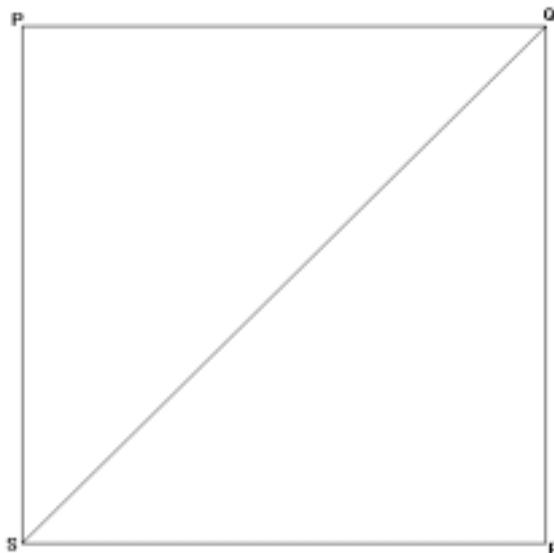
C). Determine a “maior medida comum” dos segmentos abaixo:



.....

MN	RS						

- D). Qual é a “maior medida comum” de \overline{SQ} e \overline{QR} , respectivamente diagonal e lado do quadrado PQRS, da figura abaixo?



- a). O que você conclui a respeito dos divisores comuns do lado e da diagonal do quadrado PQRS?
- b). E sobre os divisores comuns (ou submúltiplos comuns) do lado e da diagonal de um quadrado qualquer?
- c). Considerando que dois **segmentos** são **comensuráveis**, se possuem um submúltiplo comum, o que você conclui a respeito dos pares de segmentos: AB e CD; XY e ZW; MN e RS; SQ e QR? O que você conclui a respeito do lado e da diagonal de um quadrado qualquer?

- B).** Que argumentos você utilizaria para justificar que PQ é submúltiplo comum da altura e da base de qualquer triângulo semelhante ao triângulo AXY .

- C).** Procure argumentos que mostrem que os lados do retângulo áureo são segmentos incomensuráveis.

QUESTIONÁRIO

Considerando a seqüência didática desenvolvida, responda as questões abaixo:

1. As atividades realizadas foram suficientes para o desenvolvimento do conceito de retângulo áureo e de seção áurea de um segmento de reta?

.....
.....
.....

2. Houve algum avanço em seus conhecimentos sobre a seção áurea? E sobre o retângulo áureo?

.....
.....
.....

3. Esta seqüência desenvolveu seus conhecimentos sobre o conceito de incomensurabilidade de segmentos de reta? Especifique os elementos ou as características que foram acrescentadas ao que você já conhecia.

.....
.....
.....

4. Escreva, em linhas gerais, o que você aprendeu?

.....
.....
.....

5. O que poderia ser modificado para que a seqüência pudesse favorecer ainda mais, a compreensão dos conceitos envolvidos?

O que poderia ser acrescentado?

.....
.....
.....

6. A seqüência didática ajudou você a perceber a relação que existe entre a seção áurea e a incomensurabilidade de segmentos de reta? Que relação você percebeu?

.....
.....
.....