UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT 01353 Cálculo e Geometria Analítica IA

GEOMETRIA ANALÍTICA

CÔNICAS

Janice Nery
Liana Costi Nácul
Luisa Rodríguez Doering
Maria Fernanda Recena Menezes

PORTO ALEGRE
Julho/2002

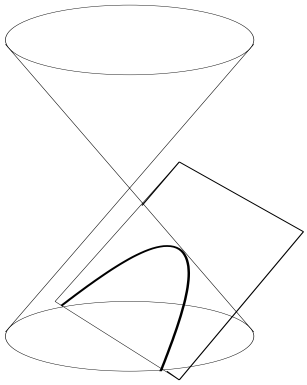
Conteúdo

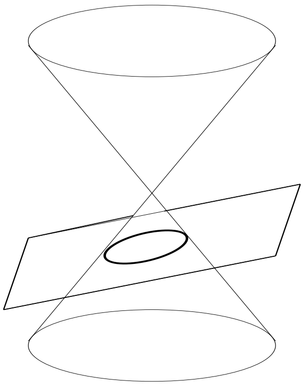
Seções Cônicas

1 Introdução

Uma *seção cônica* ou, simplesmente, uma *cônica* é uma curva obtida cortando-se qualquer cone de duas folhas por um plano que **não** passa pelo vértice, chamado de *plano secante*.

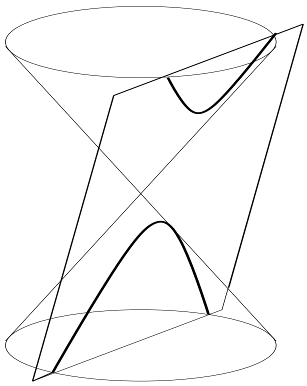
- Se o plano secante é paralelo a uma geratriz do cone, a cônica é uma *parábola*.





- Se o plano secante não é paralelo a uma geratriz e corta só uma das duas folhas do cone, a cônica é uma *elipse*.

- Se o plano secante não é paralelo a uma geratriz e corta ambas folhas do cone, a cônica é uma *hipérbole*.



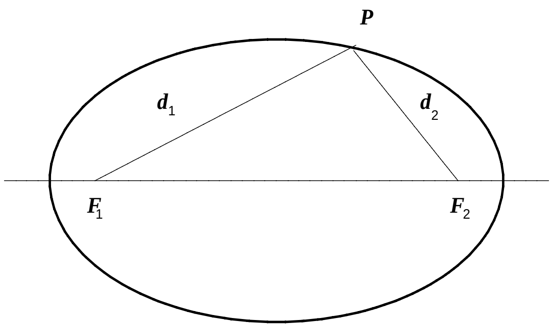
No caso de um plano que passa pelo vértice do cone obtemos, como é fácil visualizar, um ponto, uma reta ou um par de retas concorrentes. Estas são chamadas *cônicas degeneradas*, que não serão estudadas neste curso.

Na página `http://www.mat.ufrgs.br/~calculo/calculo1.html` do Cálculo I A, há um *link* chamado `Um Estudo de Cônicas`, onde pode ser encontrada esta apostila, bem como definições, exemplos, construções e animações que ajudam o aluno a ter uma melhor compreensão e visualização deste assunto. Sempre que um assunto aqui abordado tiver algo relacionado naquela página, isto será explicitado. Por exemplo, para ter uma idéia dos planos secantes cortando o cone em ângulos variados, veja `Introdução`.

2 Definição das Cônicas como Lugar Geométrico

Estudaremos as seções cônicas como curvas planas. Para isso, utilizaremos definições equivalentes às anteriores — mas que se referem somente ao plano no qual está a curva — e que dependem de pontos especiais desse plano, chamados *focos* da curva.

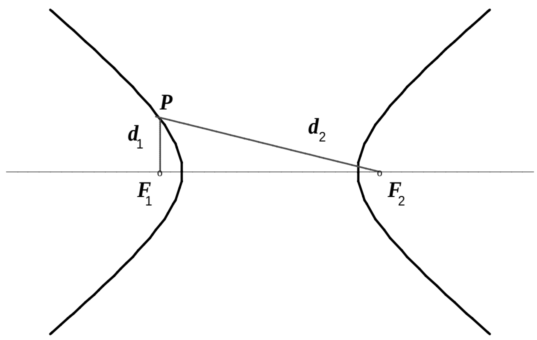
• **Elipse:** conjunto de todos os pontos P do plano tais que é constante a soma $d_1 + d_2$ das distâncias d_1 e d_2, respectivamente, de P a dois pontos fixos F_1 e F_2, chamados *focos* da elipse.



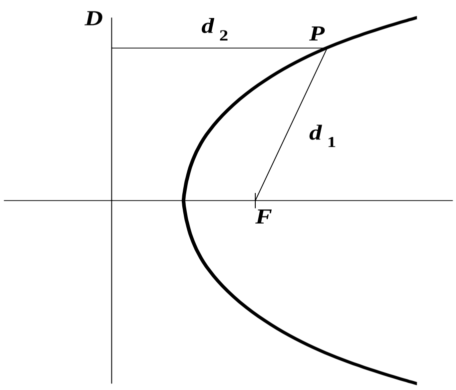
$d_1 + d_2 =$ constante

• **Hipérbole:** conjunto de todos os pontos P do plano tais que é constante o módulo da diferença $|d_1 - d_2|$ das distâncias d_1 e d_2, respectivamente, de P a dois pontos fixos F_1 e F_2, chamados *focos* da hipérbole.

$|d_1 - d_2| =$ constante



• **Parábola:** conjunto de todos os pontos P do plano tais que a distância d_1 de P a um ponto fixo F, chamado *foco* da parábola, é igual à distância d_2 de P a uma reta fixa D, chamada *diretriz* da parábola.



$d_1 = d_2$

Note que as duas primeiras cônicas são simétricas em relação à reta que passa pelos focos e a parábola é simétrica em relação à reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz.

Em Animações/Construções podem ser encontradas construções animadas das cônicas.

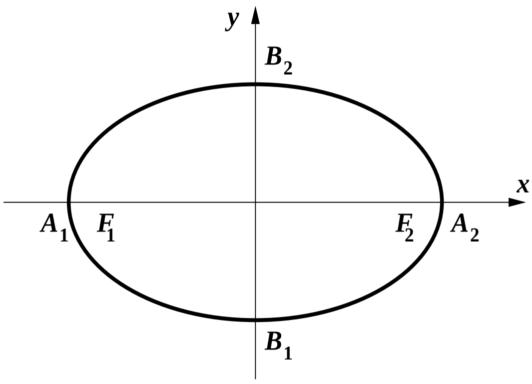
3 Equação Canônica das Cônicas

A fim de determinar mais facilmente as equações das cônicas, escolhemos, para a elipse e a hipérbole, um sistema de coordenadas tal que os focos estejam no eixo x e equidistantes da origem. Para a parábola escolhemos um sistema tal que o foco esteja no eixo x e a origem equidistante do foco e da diretriz. Assim obtemos as equações a seguir, chamadas *equações canônicas* ou *reduzidas* das cônicas.

a) **Elipse $\mathcal{E}$:** determinada por seus focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, onde $c \geq 0$ e pela constante $2a > 2c$, tem a equação reduzida $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, com $a^2 = b^2 + c^2$.

Elementos:

Centro: $C = (0, 0)$
Vértices: $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$
$B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$
Focos: $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$
Eixo maior: $\overline{A_1A_2}$
Eixo menor: $\overline{B_1B_2}$
Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a}$



Observe que $0 \leq e < 1$. Note também que se e é aproximadamente 0, então c é muito menor do que a e portanto b^2 é aproximadamente igual a a^2. Isto significa que, neste caso, a elipse $\mathcal{E}$ é mais redonda. (Se $e = 0$, é um círculo!)

Analogamente, se e é aproximadamente 1, então a é aproximadamente igual a c e portanto b^2 é aproximadamente 0. Isto significa que, neste caso, a elipse $\mathcal{E}$ é mais alongada.

Passamos a deduzir a equação reduzida. São equivalentes:

$$P = (x, y) \in \mathcal{E}$$

$$d((x, y), F_1) + d((x, y), F_2) = 2a$$

$$d((x, y), (-c, 0)) + d((x, y), (c, 0)) = 2a$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$
$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 = a^2(c^2 - a^2)$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

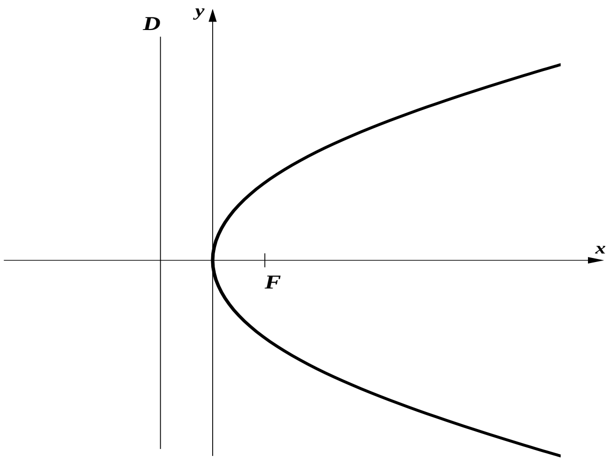
como $a^2 - c^2 > 0$, tomamos $b^2 = a^2 - c^2$ e obtemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Em dois dos passos acima, é importante ter o radicando positivo, para ter o mesmo conjunto-solução da equação e de seu quadrado.

b) **Parábola $\mathcal{P}$:** determinada por seu foco $F = (p, 0)$ e por sua diretriz $D : x = -p$, tem a equação reduzida $y^2 = 4px$.



Elementos:

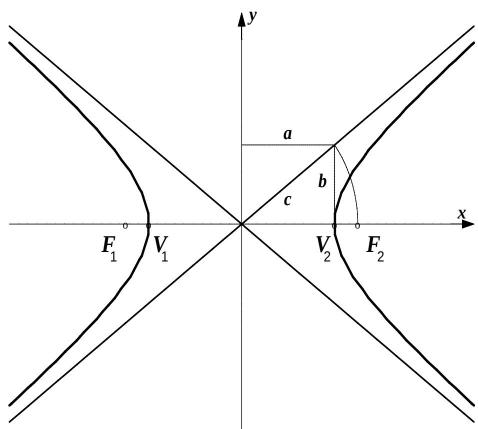
Diretriz: $D : x = -p$
Vértice: $V = (0, 0)$
Foco: $F = (p, 0)$

A dedução da equação reduzida é semelhante à do item a).

c) **Hipérbole $\mathcal{H}$:** determinada por seus focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, e pela constante $2a < 2c$, tem a equação reduzida $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, com $b^2 = c^2 - a^2$.

Elementos:

Centro: $C = (0, 0)$
Vértices: $V_1 = (-a, 0)$ e $V_2 = (a, 0)$
Focos: $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$
Assíntotas: $y = -\dfrac{b}{a}x$ e $y = \dfrac{b}{a}x$
Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a}$



Observe que $e > 1$. Note também que se e é aproximadamente 1, então c é aproximadamente a e portanto b^2 é aproximadamente igual a 0. Isto significa que, neste caso, a hipérbole $\mathcal{H}$ é muito fechada.

Analogamente, se e é muito maior do que 1, então c é muito maior do que a e portanto b^2 é muito maior do que 0; isto significa que, neste caso, a hipérbole $\mathcal{H}$ é muito aberta.

A dedução da equação reduzida é semelhante à do item a).

Em Animações/Variações/Parâmetros podem ser encontradas animações refletindo variações dos parâmetros das cônicas.

4 Equação Canônica das Cônicas com Centro Genérico (h, k)

As equações canônicas das cônicas descritas anteriormente têm todas focos no eixo x e, centro ou vértice em $(0,0)$. Analisamos agora o caso em que o centro ou o vértice é um ponto (h,k) qualquer do plano e os focos estão na reta $y=k$ paralela ao eixo x, ou na reta $x=h$ paralela ao eixo y.

As equações com um centro genérico em (h,k) e focos na reta $y=k$ são:

Elipse: $$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad \text{com} \qquad a^2=b^2+c^2;$$

Parábola: $$(y-k)^2=4p\,(x-h);$$

Hipérbole: $$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad \text{com} \qquad b^2=c^2-a^2.$$

As equações respectivas com centro ou vértice genérico em (h,k) mas focos na reta $x=h$ são obtidas trocando $x-h$ por $y-k$ nas equações acima.

Em Animações/Variações/Translações podem ser encontradas animações apresentando translações das cônicas.

5 Identificação das Cônicas e de seus Elementos

A equação geral do segundo grau nas duas variáveis x e y é

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+Exy+F=0 \qquad (\diamondsuit)$$

e representa uma cônica, uma cônica degenerada ou o conjunto vazio. Quando $(\diamondsuit)$ representa uma cônica e o coeficiente do termo em xy é não-nulo $(E \neq 0)$, esta tem os focos em uma reta não-paralela aos eixos coordenados. Este caso não será estudado nesta disciplina, mas sim na de Álgebra Linear. Se você deseja ter uma idéia do que acontece neste caso $E \neq 0$, consulte Animações/Variações/Rotações.

Quando $E=0$, os focos estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados, que é o caso aqui estudado. Para identificarmos essa cônica, completamos quadrados e reescrevemos $(\diamondsuit)$ como uma das equações da Seção 4.

O análogo de $(\diamondsuit)$ no caso tridimensional (a equação geral do segundo grau em três variáveis) pode ser encontrado no *link* Quádricas da página de Cálculo IIA.

6 Exercícios Resolvidos

Exercício 1. Identifique a cônica de equação $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$, seus elementos e faça um esboço de seu gráfico.
Solução: Dada a equação $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$, primeiro agrupamos os termos em x e os termos em y:

$$4(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 2y) - 11 = 0,$$

completamos o quadrado:

$$4\big[(x-2)^2 - 4\big] + 9\big[(y+1)^2 - 1\big] - 11 = 0,$$

e reescrevemos:

$$4(x-2)^2 - 16 + 9(y+1)^2 - 9 - 11 = 0 \quad \therefore \quad 4(x-2)^2 + 9(y+1)^2 - 36 = 0;$$

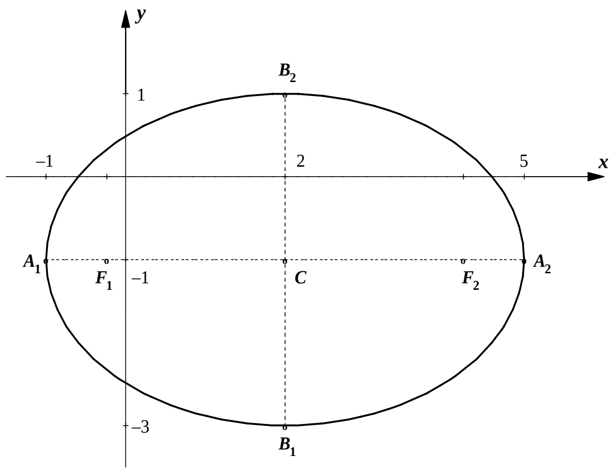
finalizamos colocando no formato canônico:

$$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1.$$

Vemos, portanto (observe o sinal +), que se trata de uma **elipse** com $a = 3$, $b = 2$ e $c = \sqrt{5}$, pois $c^2 = 9 - 4 = 5$. Além disto, temos:

$\boxed{\textbf{Elementos:}}$

Centro: $C = (2, -1)$
Vértices:
$A_1 = (-1, -1),\ A_2 = (5, -1)$
$B_1 = (2, -3),\ B_2 = (2, 1)$
Focos: $F_1 = (2 - \sqrt{5}, -1)$
e $F_2 = (2 + \sqrt{5}, -1)$
Excentricidade: $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$



Exercício 2. Identifique a cônica de equação $25x^2 - 36y^2 - 100x - 72y - 836 = 0$, seus elementos e faça um esboço de seu gráfico.
Solução: Dada a equação $25x^2 - 36y^2 - 100x - 72y - 836 = 0$, primeiro agrupamos os termos em x e os termos em y:

$$25(x^2 - 4x) - 36(y^2 + 2y) - 836 = 0,$$

completamos o quadrado:

$$25[(x-2)^2 - 4] - 36[(y+1)^2 - 1] - 836 = 0,$$

e reescrevemos:

$$25(x-2)^2 - 100 - 36(y+1)^2 + 36 - 836 = 0 \quad \therefore \quad 25(x-2)^2 - 36(y+1)^2 - 900 = 0,$$

finalizamos colocando no formato canônico:

$$\frac{(x-2)^2}{6^2} - \frac{(y+1)^2}{5^2} = 1.$$

Vemos, portanto (observe o sinal $-$), que se trata de uma **hipérbole** com $a = 6$, $b = 5$ e $c = \sqrt{61}$, pois $c^2 = 36 + 25 = 61$. Além disto, temos:

Elementos:

Centro: $C = (2, -1)$

Vértices:

$V_1 = (-4, -1)$ e $V_2 = (8, -1)$

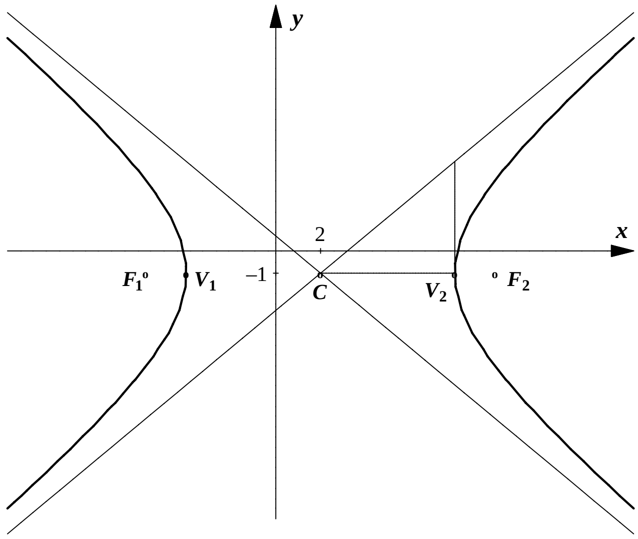
Focos: $F_1 = (2 - \sqrt{61}, -1)$

e $F_2 = (2 + \sqrt{61}, -1)$

Assíntotas:

$y = \frac{5}{6}(x-2) - 1$ e $y = -\frac{5}{6}(x-2) - 1$

Excentricidade: $e = \frac{\sqrt{61}}{6}$



Exercício 3. Identifique a cônica de equação $y^2 - 4y - 12x - 8 = 0$, seus elementos e faça um esboço de seu gráfico.

Solução: Dada a equação $y^2 - 4y - 12x - 8 = 0$, primeiro agrupamos os termos em x e os termos em y:

$$y^2 - 4y = 12x + 8,$$

completamos o quadrado:

$$(y-2)^2 - 4 = 12x + 8 \quad \therefore \quad (y-2)^2 = 12x + 12 = 12(x+1),$$

finalizamos colocando no formato canônico:

$$(y-2)^2 = 4 \cdot 3(x+1).$$

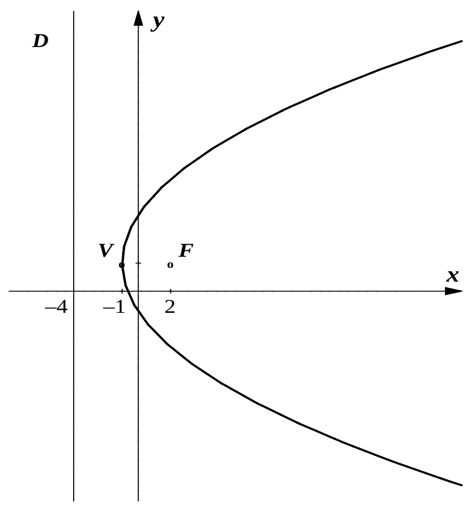
Vemos, portanto (observe que só há *um* quadrado), que se trata de uma **parábola** com $p = 3$. Além disto, temos:

Elementos:

Vértice: $V = (-1, 2)$

Diretriz: $D : x = -4$

Foco: $F = (-1 + 3, 2) = (2, 2)$



Exercício 4. Identifique a cônica de equação $9x^2 + 4y^2 - 72x + 24y - 144 = 0$, seus elementos e faça um esboço de seu gráfico.
Solução: Dada a equação $9x^2 + 4y^2 - 72x + 24y - 144 = 0$, primeiro agrupamos os termos em x e os termos em y:

$$9(x^2 - 8x) + 4(y^2 + 6y) - 144 = 0,$$

completamos o quadrado:

$$9\big[(x-4)^2 - 16\big] + 4\big[(y+3)^2 - 9\big] - 164 = 0,$$

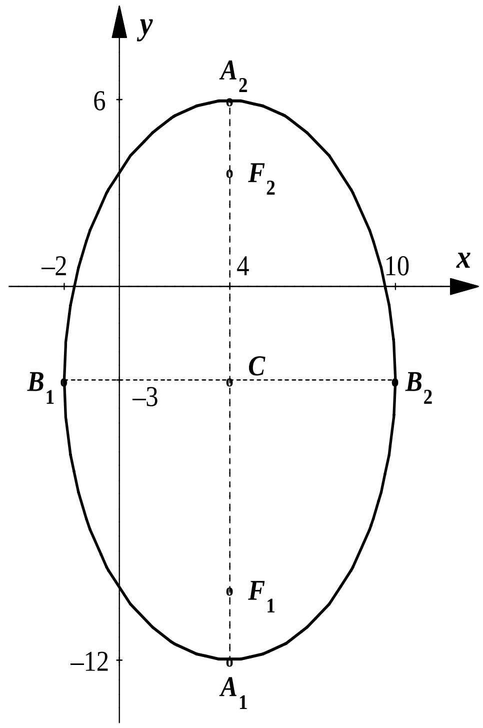
e reescrevemos:

$$9(x-4)^2 - 144 + 4(y+3)^2 - 36 - 144 = 0 \quad \therefore \quad 9(x-4)^2 + 4(y+3)^2 - 324 = 0;$$

finalizamos colocando no formato canônico:

$$\frac{(x-4)^2}{6^2} + \frac{(y+3)^2}{9^2} = 1.$$

Vemos, portanto (observe o sinal +), que se trata de uma **elipse** com $a = 9$, $b = 6$ e $c = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, pois $c^2 = 81 - 36 = 45$. Além disto, temos:



Elementos:

Centro: $C = (4, -3)$
Vértices:
$A_1 = (4, -12)$, $A_2 = (4, 6)$
$B_1 = (-2, -3)$, $B_2 = (10, -3)$
Focos: $F_1 = (4, -3 - 3\sqrt{5}\,)$
e $F_2 = (4, -3 + 3\sqrt{5}\,)$
Excentricidade: $e = \dfrac{\sqrt{45}}{6} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Exercício 5. Identifique a cônica de equação $-16x^2 + 9y^2 - 160x - 54y - 885 = 0$, seus elementos e faça um esboço de seu gráfico.
Solução: Dada a equação $-16x^2 + 9y^2 - 160x - 54y - 885 = 0$, primeiro agrupamos os termos em x e os termos em y:

$$-16(x^2 + 10x) + 9(y^2 - 6y) - 885 = 0,$$

completamos o quadrado:

$$-16[(x+5)^2 - 25] + 9[(y-3)^2 - 9] - 885 = 0,$$

e reescrevemos:

$$-16(x+5)^2 + 390 + 9(y-3)^2 - 81 - 885 = 0 \quad \therefore \quad -16(x+5)^2 + 9(y-3)^2 - 576 = 0,$$

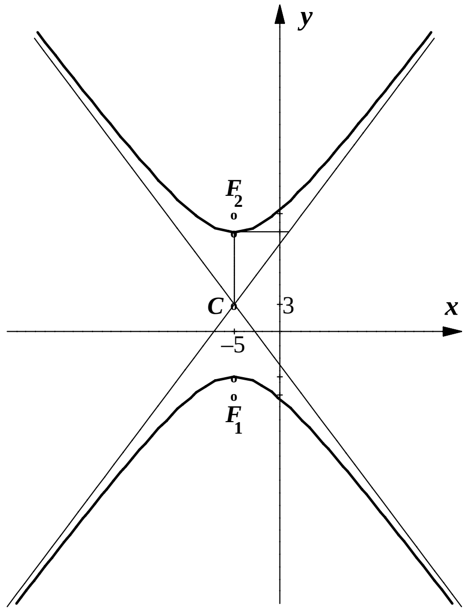
finalizamos colocando no formato canônico: $\dfrac{(y-3)^2}{8^2} - \dfrac{(x+5)^2}{6^2} = 1.$

Vemos, portanto (observe o sinal $-$), que se trata de uma **hipérbole** com $a = 8$, $b = 6$ e $c = 10$, pois $c^2 = 64 + 36 = 100$. Além disto, temos:

Elementos:

Centro: $C = (-5, 3)$
Vértices:
$V_1 = (-5, -5)$ e $V_2 = (-5, 11)$
Focos: $F_1 = (-5, -7)$
e $F_2 = (-5, 13)$
Assíntotas:
$y = \dfrac{4}{3}(x+5)+3$ e $y = -\dfrac{4}{3}(x+5)+3$

Excentricidade: $e = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$



Exercício 6. Identifique a cônica de equação $x^2 - 6x + 4y - 11 = 0$, seus elementos e faça um esboço de seu gráfico.
Solução: Dada a equação $x^2 - 6x + 4y - 11 = 0$, primeiro agrupamos os termos em x e os termos em y:

$$x^2 - 6x = -4y + 11,$$

completamos o quadrado:

$$(x-3)^2 - 9 = -4y + 11 \quad \therefore \quad (x-3)^2 = -4y + 20 = -4(y-5),$$

finalizamos colocando no formato canônico:

$$(x-3)^2 = -4(y-5).$$

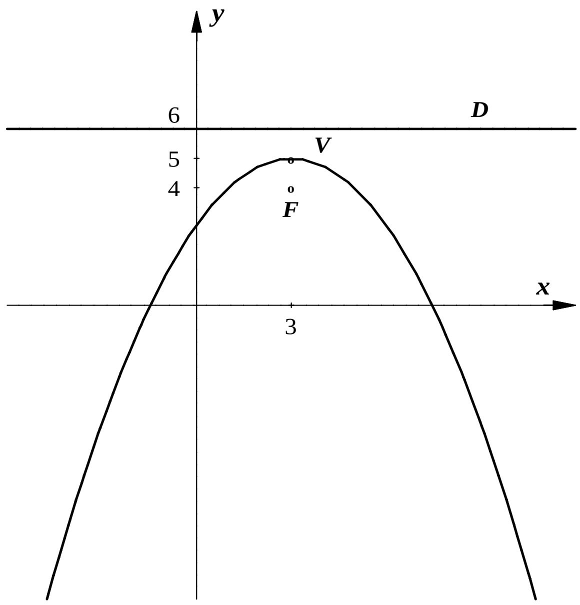
Vemos, portanto (observe que só há *um* quadrado), que se trata de uma **parábola** com $p = -1$. Além disto, temos:

Elementos:

Vértice: $V = (3, 5)$

Diretriz: $D : y = 6$

Foco: $F = (3, 5-1) = (3, 4)$



7 Parábola × Ensino Médio

A parábola é, certamente, a cônica mais trabalhada no Ensino Médio e, muitas vezes, também a única. Ocorre que, nesse nível, a maioria dos livros didáticos apresenta a equação $y = ax^2 + bx + c$, do 2º grau em x e simplesmente afirma que o gráfico da mesma é uma curva denominada parábola e não a caracteriza como lugar geométrico.

Faremos isto agora, ou seja, partindo da equação $y = ax^2 + bx + c$, vamos obter sua forma canônica e assim caracterizá-la como parábola; também reconheceremos seus elementos, bem como suas eventuais intersecções com o eixo x (raízes).

Completando o quadrado no lado direito da equação $y = ax^2 + bx + c$, obtemos

$$y = a\Big(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\Big) + c - \frac{b^2}{4a},$$

que é equivalente à equação

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2, \tag{†}$$

e esta, por sua vez, reconhecemos como sendo a equação canônica de uma parábola, com vértice no ponto $\Big(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\Big) = \Big(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\Big)$ e com $p = \dfrac{1}{4a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante de $y = ax^2 + bx + c$.

Agora, é fácil obter as raízes da equação $y = ax^2 + bx + c$, ou seja, deduzir a fórmula de Bhaskara: queremos encontrar todos os possíveis valores de x para os quais $y = 0$. Por (†), as equações a seguir são equivalentes:

$$y = 0,$$

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{e}$$

$$-\frac{4ac - b^2}{4a} = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2.$$

Dividindo esta última equação por a e reescrevendo o termo da esquerda, obtemos:

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2. \tag{††}$$

Na última equação o lado direito da igualdade é sempre positivo ou nulo e, portanto, o mesmo deve ocorrer com o lado esquerdo. Como $4a^2 > 0$, estabelecemos que $y = 0$ se, e somente se, $b^2 - 4ac \geq 0$ e (††) Assim, se $b^2 - 4ac \geq 0$, nossa equação tem solução e, para obtê-la, extraímos a raiz quadrada dos dois lados de (††):

$$\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \Big|x + \frac{b}{2a}\Big|,$$

e portanto,

$$x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

$$x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que é a conhecida fórmula de Bhaskara.

8 Exercícios

Exercício 1. Estabeleça a equação de cada uma das parábolas a seguir, sabendo que:

a) é simétrica em relação ao eixo y, tem vértice em $V = (0, 0)$ e contém o ponto $P = (2, -3)$;

b) tem vértice em $V = (-2, 3)$ e foco em $F = (-2, 1)$;

c) tem foco em $F = (3, -1)$ e diretriz $x = \frac{1}{2}$.

Exercício 2. Determine o vértice, o foco, a equação da diretriz e esboce o gráfico de cada uma das parábolas a seguir:

a) $y^2 - x = 0$;

b) $x^2 - 2x - 20y - 39 = 0$;

c) $8x = 10 - 6y + y^2$.

Exercício 3. Determine os centros, os vértices, os focos, a excentricidade e esboce o gráfico de cada uma das elipses a seguir:

a) $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$;

b) $25x^2 + 16y^2 + 50x + 64y - 311 = 0$;

c) $4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y + 9 = 0$.

Exercício 4. Estabeleça a equação de cada uma das elipses a seguir, sabendo que:

a) seu eixo maior mede 10 um(unidades de medida) e os focos são $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$.

b) tem centro em $C = (2, 4)$, um foco em $F = (5, 4)$ e tem excentricidade $e = \frac{3}{4}$.

Exercício 5. Estabeleça a equação de cada uma das hipérboles a seguir, sabendo que:

a) tem assíntotas de equações $y = 2x$ e $y = -2x$ e vértices em $V_1 = (-3, 0)$ e $V_2 = (3, 0)$;

b) tem focos em $F_1 = (3, -2)$ e $F_2 = (3, 4)$ e excentricidade $e = 2$.

Exercício 6. Determine os centros, os vértices, os focos, a excentricidade e esboce o gráfico de cada uma das hipérboles a seguir:

a) $3x^2 - y^2 + 3 = 0$;

b) $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$;

c) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

Exercício 7. Classifique, dê todos os elementos e esboce o gráfico de cada uma das curvas com equações dadas a seguir:

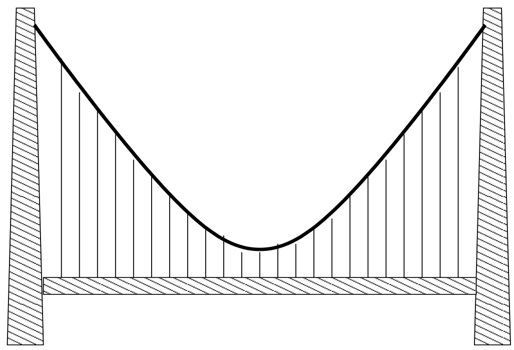
a) $16x^2 + 9y^2 - 96x + 72y + 144 = 0$;

b) $y^2 - 16x^2 + 2y + 49 = 0$;

c) $4x^2 - y^2 - 32x + 4y + 24 = 0$.

Exercício 8. A água que esguicha de um bocal, mantido horizontalmente a 4 m acima do solo, descreve uma curva parabólica com vértice no bocal e, medida na vertical, desce 1 m nos primeiros 10 m de movimento horizontal. Calcule a distância horizontal do bocal em que a água atinge o solo.

Exercício 9. Uma ponte suspensa de 400 m de comprimento é sustentada por um cabo principal parabólico (veja a figura). O cabo principal está 100 m acima da ponte nos extremos e 4 m acima da ponte em seu centro. Calcule o comprimento dos cabos de sustentação que são colocados a intervalos de 50 m ao longo da ponte. (*Sugestão*: Utilize o sistema de coordenadas retangulares em que a ponte é o eixo x e a origem está no meio da ponte.)



Exercício 10. O segmento de reta que passa pelo foco de uma parábola, é paralelo à sua diretriz e tem as suas extremidades na própria parábola é chamado o *lactus rectum* da parábola. Mostre que a medida do *lactus rectum* é o dobro da distância entre o foco e a diretriz.

Exercício 11. Qual é o comprimento de um fio usado para delimitar um jardim elíptico com 20 m de largura e 60 m de comprimento? qual é a área deste jardim?

Exercício 12. Exceto por pequenas perturbações, um satélite se move ao redor da Terra em uma órbita elíptica, com um dos focos no centro da Terra. Suponha que no perigeu (o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra) o satélite está a 400 km da superfície da Terra e que no apogeu (o ponto da órbita mais afastado do centro da Terra) o satélite está a 600 km da superfície da Terra. Calcule o eixo maior e o eixo menor da órbita elíptica deste satélite, supondo que a Terra é um esfera de 6371 km de raio.

Exercício 13. Dados os pontos $A = (-2, -2)$ e $B = (6, 6)$ do plano cartesiano, determine o lugar geométrico de um ponto P que se move neste plano de tal modo que o coeficiente angular da reta que passa por A e P, acrescido de duas unidades, é igual ao coeficiente angular da reta que passa por B e P.

Exercício 14. Determine o lugar geométrico de um ponto P que se move no plano cartesiano de tal modo que o quadrado de sua distância à origem é igual ao dobro de sua distância ao eixo das ordenadas.

Exercício 15. Escreva a integral que calcula a área da região do plano cartesiano de equação geral $x^2 + 4y^2 - 2x - 3 = 0$.

Exercício 16. Represente graficamente o lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano cartesiano que satisfazem as condições:

a) $y^2 + 4y + 16x - 44 = 0$; b) $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$; c) $y = \dfrac{\sqrt{36-4x^2}}{3}$.

Exercício 17. Indique a integral que calcula o volume do sólido, respectivamente, obtido pela rotação da região limitada pelas curvas:

a) $x^2 - y^2 = 1$ e $x = 3$ ao redor da reta $x = -2$;

b) $y = -x^2 + 1$, $y = x + 1$ e o eixo $0x$ ao redor do eixo x.

Exercício 18. Escreva a integral que calcula:

a) a área da região do primeiro quadrante que está limitada pelo círculo de equação $x^2 + y^2 = a^2$;

b) a área da região do primeiro quadrante que está limitada pela elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

c) Mostre que a integral do item b) é igual a b/a multiplicado pela integral do item a) e, dessa forma, obtenha a área da elipse a partir da conhecida área do círculo.

Exercício 19. Calcule o volume do *elipsóide* que é o sólido de revolução obtido girando a elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, em torno do eixo x.

Exercício 20. Determine as equações da reta tangente e da reta normal a cada elipse a seguir no ponto indicado.

a) $x^2 + 9y^2 = 255$ em $(9, 4)$; b) $x^2 + 4y^2 - 2x + 8y = 35$ em $(3, 2)$.

Exercício 21. Um ponto se move sobre a elipse $x^2 + 4y^2 = 25$ de tal modo que sua abscissa cresce numa razão constante de 8 unidades por segundo. Com que rapidez varia a ordenada no instante em que ela é igual a -2 unidades e a sua abscissa é positiva?

Exercício 22. Determine as equações da reta tangente e da reta normal a cada hipérbole a seguir, no ponto indicado.

a) $x^2 - y^2 = 9$ em $(-5, 4)$; b) $x^2 - 4x - y^2 - 2y = 0$ em $(0, 0)$.

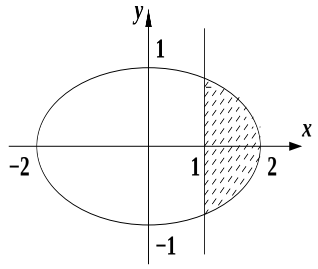
Exercício 23. Um ponto se move sobre a hipérbole $4x^2 - 9y^2 = 27$ de tal modo que sua abscissa cresce numa razão constante de 8 unidades por segundo. Com que rapidez varia a sua ordenada no ponto $(3, 1)$?

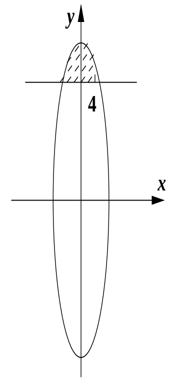
Exercício 24. Determine a menor (mínima) distância do ponto $(3, 0)$ à hipérbole $y^2 - x^2 = 18$.

Exercício 25. Calcule a área da região sombreada delimitada, respectivamente:

a) pela reta $x = 1$ e a elipse
$$x^2 + 4y^2 = 4;$$

b) pela reta $y = 4$ e a elipse
$$9x^2 + y^2 = 25.$$
(*Sugestão*: Substituição trigonométrica.)





Exercício 26. Seja R a região plana delimitada pelas curvas $y^2 - x^2 = 16$ e $y = 5$.

a) Esboce a região R.

b) Apresente uma integral que expressa esta área.-

c) Qual é a técnica de integração que você usaria para resolver esta integral?

9 Respostas

Exercício 1.

a) $y = -\frac{3}{4}x^2$ ou, equivalentemente, $4y + 3x^2 = 0$.

b) $y = 3 - \frac{1}{8}(x+2)^2$ ou, equivalentemente, $x^2 + 4x + 8y - 20 = 0$.

c) $(y+1)^2 = 5\left(x - \frac{7}{4}\right)$.

Exercício 2.

a) $V = (0,0)$, $F = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $x = -\frac{1}{4}$.

b) $V = (1,-2)$, $F = (1,3)$, $y = -7$.

c) $V = \left(\frac{1}{8}, 3\right)$, $F = \left(\frac{17}{8}, 3\right)$, $x = -\frac{15}{8}$.

Exercício 3.

a) $C = (0,0)$, $V_1 = (0,-3)$, $V_2 = (0,3)$, $F_1 = (0,-2)$, $F_2 = (0,2)$, $e = \frac{2}{3}$.

b) $C = (-1,-2), V_1 = (-1,-7), V_2 = (-1,3), F_1 = (-1,1), F_2 = (-1,-5), e = \frac{3}{5}$.

c) $C = (3,-1)$, $V_1 = (0,-1)$, $V_2 = (6,-1)$,
$F_1 = (3+\sqrt{5},-1)$, $F_2 = (3-\sqrt{5},-1)$, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Exercício 4.

a) $9x^2 + 25y^2 = 225.$ b) $7x^2 + 16y^2 - 28x - 128y + 172 = 0.$

Exercício 5.

a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = 1.$ b) $12y^2 - 4x^2 + 24x - 24y - 51 = 0.$

Exercício 6.

a) $C = (0, 0),\ V_1 = (0, -\sqrt{3}),\ V_2 = (0, \sqrt{3}),\ F_1 = (0, -2),\ F_2 = (0, 2),\ e = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

b) $C = (3, 1),\ V_1 = (3, 4),\ V_2 = (3, -2),$
$F_1 = (3, 1 - \sqrt{13}),\ F_2 = (3, 1 + \sqrt{13}),\ e = \frac{\sqrt{13}}{3}.$

c) $C = (2, -1),\ V_1 = (2, -5),\ V_2 = (2, 3),\ F_1 = (2, -6),\ F_2 = (2, 4),\ e = \frac{5}{4}.$

Exercício 7.

a) Elipse: $C = (3, -4),\ V_1 = (3, -8),\ V_2 = (3, 0),$
$F_1 = (3, -4 - \sqrt{7}),\ F_2 = (3, -4 + \sqrt{7}),\ e = \frac{\sqrt{7}}{4}.$

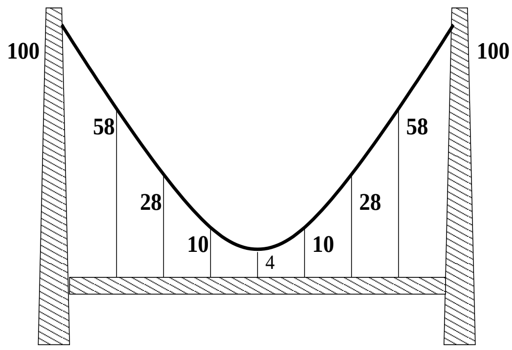
b) Parábola: $V = (3, -1),\ F = (7, -1),\ x = -1.$

c) Hipérbole: $C = (4, 2),\ V_1 = (1, 2),\ V_2 = (7, 2),$
$F_1 = (4 - 3\sqrt{5}, 2),\ F_2 = (4 + 3\sqrt{5}, 2),\ e = \sqrt{5}.$

Exercício 8. Distância horizontal = 160 m.

Exercício 9. Função altura:

$$y = \frac{3}{1250}x^2 + 4.$$



Exercício 10. Aula.

Exercício 11. Área do jardim = 1200π e comprimento do fio = $40\pi\sqrt{5}$.

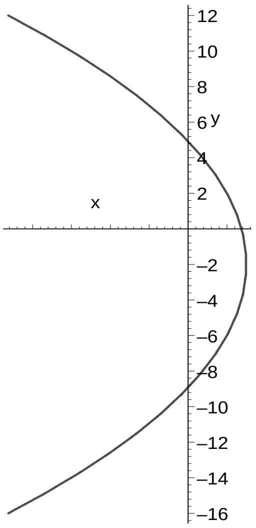
Exercício 12. Eixo menor da órbita elíptica do satélite = 13.740,54 km e eixo maior = 13.742,00 km.

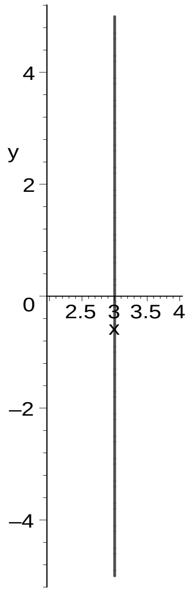
Exercício 13. O lugar geométrico é a parábola de equação $y = -\frac{1}{2}x^2$.

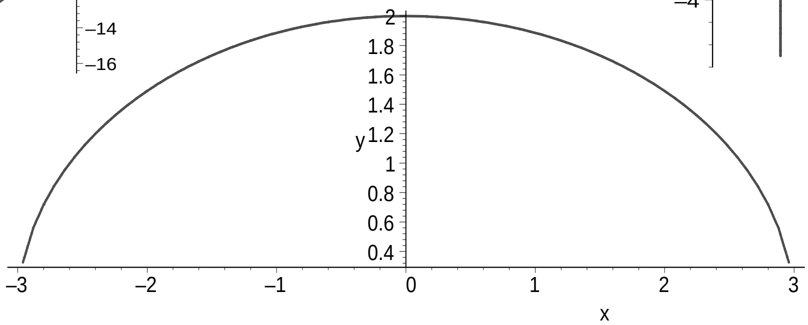
Exercício 14. O lugar geométrico é a circunferência de centro $C = (0, 0)$ e raio 1 dada por $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Exercício 15. $A = 2\displaystyle\int_{-3}^{1} \sqrt{1 - \frac{(x+1)^2}{4}}\, dx.$

Exercício 16.

a) 

b) 

c) 

Exercício 17.

a) $V = 2\pi \displaystyle\int_0^{2\sqrt{2}} \left[25 - (2 + \sqrt{1+y^2})^2\right] \, dy.$

b) $V = \pi \displaystyle\int_{-1}^{0} \left[(1-x^2)^2 - (x+1)^2\right] \, dx.$

Exercício 18.

a) $A = \displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx.$

b) $A = \dfrac{b}{a} \displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx.$

c) Área da elipse $= \pi ab$.

Exercício 19. $V = 60\pi$.

Exercício 20.

a) reta tangente: $4y + x - 25 = 0$, reta normal: $y - 4x + 32 = 0$,

b) reta tangente: $6y + x - 15 = 0$, reta normal: $y - 6x + 16 = 0$.

Exercício 21. Varia a 3 unidades por segundo.

Exercício 22.

a) reta tangente: $4y + 5x + 9 = 0$, reta normal: $5y - 4x - 40 = 0$,

b) reta tangente: $y + 2x = 0$, reta normal: $2y - x = 0$.

Exercício 23. Varia a $\dfrac{32}{3}$ unidades por segundo.

Exercício 24. Menor (mínima) distância é $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

Exercício 25.

a) $\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

b) $\dfrac{25}{3}\text{arcsen}\left(\dfrac{3}{5}\right) - 4$.

Exercício 26.

a) Esboce a região R,

b) $A = 2\displaystyle\int_0^3 \left(5 - \sqrt{16 + x^2}\right)\, dx$,

c) Substituição trigonométrica $\dfrac{x}{4} = \operatorname{tg}\theta$.

Referências Bibliográficas

ANTON, Howard. **Cálculo, um novo horizonte**. Bookman, 2000.

ÁVILA, Geraldo S. **Cálculo**. LTC, 1992.

EDWARDS, B., HOSTETLER, R. e LARSON, R.
Cálculo com Geometria Analítica. LTC, 1994.

EDWARDS, C.H. e PENNEY, D.E.
Cálculo com Geometria Analtica. Prentice Hall do Brasil, 1997.

HUGUES-HALLETT, Deborah e outros. **Calculus**. John Wiley & Sons, 1994.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Harbra, 1976.

MUNEM, M.A. e FOULIS, D.J. **Cálculo**. Guanabara, 1982.

SHENK, Al. **Cálculo e Geometria Analítica**. Campus, 1984.

SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria Analítica**. McGraw-Hill, 1987.

STRANG, Gilbert. **Calculus**. Wellesley–Cambridge Press, 1991.

SWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo com Geometria Analtica**. McGraw-Hill, 1983.