UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
DISCIPLINA: MAT01339 - Cálculo e Geometria Analítica para Arquitetos
PROFESSOR: Vilmar Trevisan
Lista IX de Exercícios (Elaborada por Carolina Cardoso)

1. Seja V o volume de um cilindro tendo altura h e raio r e suponha que h e r variam com o tempo.
   (a) Como estão relacionadas $\frac{dV}{dt}$, $\frac{dh}{dt}$ e $\frac{dr}{dt}$?
   (b) Em certo instante, a altura é de $6\,cm$ e está crescendo a $1\,cm/s$, enquanto que o raio é de $10\,cm$ e está decrescendo a $1\,cm/s$. Com que rapidez o volume está variando naquele instante? O volume está crescendo ou decrescendo naquele instante?

2. Seja θ (em radianos) um ângulo agudo de um triângulo retângulo e sejam x e y, respectivamente, os comprimentos dos lados adjacente e oposto a θ. Suponha também que x e y variam com o tempo.
   (a) Como se relacionam $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$?
   (b) Em um certo instante, $x = 2$ unidades está crescendo uma unidade por segundo, enquanto $y = 2$ unidades e está decrescendo em 1/4 de unidade por segundo. Com que rapidez θ estará variando naquele instante? θ está crescendo ou decrescendo naquele instante?

3. O ponteiro do minuto de um certo relógio tem $4\,cm$ de comprimento. Começando do momento em que o ponteiro está apontando diretamente para cima, com que rapidez estará variando a área do setor que é varrido pelo ponteiro durante uma revolução?

4. Pela ruptura de um tanque, uma mancha de óleo espalha-se em forma de um círculo cuja área cresce a uma taxa constante de $6\,milhas/h$. Com que rapidez estará variando o raio da mancha crescente quando a área for de $milhas^2$?

5. Um balão esférico é esvaziado de tal forma que o seu raio decresce a uma taxa constante de $15\,cm/min$. Com que taxa o ar estará sendo removido quando o raio for $9\,cm$?

6. Uma escada de $13\,m$ está apoiada em uma parede. Se o topo da escada desliza sobre a parede para baixo com uma taxa de $2\,m/s$, com que rapidez a base da escada estará afastando-se da parede quando o topo estiver $5\,m$ acima do chão?

7. Uma quadra de *baseball* é um quadrado cujos lados medem 60 pés de comprimento. Suponha que um jogador correndo da primeira para a segunda base tem uma velocidade de 25 pés/s no instante em que está a 10 pés da segunda base. Com que taxa estará variando a distância do jogador à base do batedor naquele instante?

8. Para a câmera e o foguete da figura, com que taxa estará variando a distância entre a câmera e o foguete, quando ele estiver a 4000 pés de altura e subindo verticalmente a 880 pés/s?

9. Um satélite está em uma órbita elíptica em torno da Terra. A sua distância r em milhas do centro da Terra é dada por

$$r = \frac{4995}{1 + 0,12\, cos\, \theta}$$

onde θ é o ângulo medido do ponto da órbita mais próximo da superfície da Terra.

(a) Ache a altura do satélite no *perigeu* (ponto mais próximo da superfície da Terra) e no *apogeu* (ponto mais distante da superfície da Terra) usando $3960\, milhas$ como o raio da Terra.

(b) No instante em que $\theta = 120^0$, o ângulo estará crescendo a uma taxa de $2,7^0/min$. Ache a altura do satélite e a taxa segundo a qual a altura estará variando neste instante. Expresse a taxa em unidades de $milhas/min$.

10. Um tanque cônico com água com o vértice para baixo tem um raio de $10\, m$ no topo e uma altura de $24\, m$. Se a água fluir dentro do tanque a uma taxa de $20\, m^3$ min, com que velocidade a profundidade da água estará crescendo quando ela tiver $16\, m$ de profundidade?

11. Areia cai de uma calha de escoamento formando uma pilha cônica, cuja altura é sempre igual ao diâmetro. Se a altura crescer a uma taxa constante de 5 pés^3/min, com que taxa a areia estará escoando quando a pilha for de 10 pés de altura?

12. Uma aeronave está subindo a um ângulo de 30^0 com a horizontal. Com que rapidez a aeronave está ganhando altura se a sua velocidade for de $500\, milhas/h$?

13. Um bote é puxado para uma doca por meio de um a corda ligada a uma polia na doca. A corda está ligada à proa do bote em um ponto 10 pés abaixo da polia.

Com que rapidez deve a corda ser puxada se quisermos o bote aproximando-se da doca a uma taxa de 12 pés/min, no instante em que restam ser puxados 125 pés de corda?

14. Um farol que indica perigo faz uma revolução a cada $10\, s$ e está localizado em um navio, ancorado a $4\, km$ de uma praia reta. Com que rapidez o facho de luz do farol estará movendo-se ao longo da praia, quando fizer com ela um ângulo de 45^0?

15. Um aeronave está voando a uma altitude constante e com uma velocidade constante de $60\, milhas/h$. Um míssil anti-aéreo é disparado em linha reta e sua trajetória faz um ângulo de 120^0 com a trajetória da aeronave, de tal forma que irá atingi-la no ponto P. No instante em que a aeronave está a $2\, milhas$ do ponto de impacto, o míssil está a $4\, milhas$ dela e voando a $1200\, milhas/h$ naquele instante. Com que rapidez estará decrescendo a distância entre o míssil e a aeronave? *Sugestão: use o lei dos cossenos.*

16. Uma partícula move-se ao longo de uma curva cuja equação é

$$\frac{x\,y^3}{1+y^2} = \frac{8}{5}.$$

Suponha que a coordenada x está crescendo a uma taxa de 6 unidades por segundo, quando a partícula estiver no ponto $(1,2)$.

(a) Com que taxa estará variando a coordenada y do ponto naquele instante?

(b) Naquele instante, a partícula estará descendo ou subindo?

17. Um ponto P está movendo-se ao longo de uma reta cuja equação é $y = 2\,x$. Com que rapidez estará variando a distância entre P e o ponto $(3,0)$ no instante em que P estiver em $(3,6)$ se x for decrescente a uma taxa de 2 unidades por segundo, naquele instante?

18. A equação das lentes finas em Física é

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{S} = \frac{1}{f}$$

onde s é a distância do objeto à lente, S é a distância da imagem à lente e f é a distância focal da lente. Suponha que uma certa lente tenha um comprimento focal de $6\,cm$ e que um objeto move-se em direção à lente a uma taxa de $2\,cm/s$. Com que rapidez estará variando a distância da imagem, no instante em que o objeto estiver a $10\,cm$ da lente? A imagem estará afastando-se ou aproximando-se da lente?

19. Um meteorito entra na atmosfera da Terra e queima a uma taxa que, em cada instante, é proporcional à área de sua superfície. Supondo que o meteorito é sempre esférico, mostre que o seu raio decresce a uma taxa constante.

20. O café é derramado a uma taxa uniforme de $20\,cm^3/s$ em uma xícara em forma de um cone truncado. Se os raios superior e inferior da xícara forem de $4\,cm$ e de $2\,cm$ e a altura $6\,cm$, com que rapidez estará subindo o nível de café quando ele estiver na metade da xícara? *Sugestão: estenda a xícara para baixo para formar um cone.*

21. Resolva as equações para x:

$(a)\ \log_{10}(\sqrt{x}) = -1$ $\quad (b)\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -1$ $\quad (c)\ \log_5(5^{2\,x}) = 8$ $\quad (d)\ \log_{10}(x^{\frac{3}{2}}) - \log_{10}(\sqrt{x}) = 5$

$(e)\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(2\,x^3) = \ln 3$ $\quad (f)\ 5^{-2\,x} = 3$ $\quad (g)\ 2\,e^{3\,x} = 7$ $\quad (h)\ x\,e^{-x} + 2\,e^{-x} = 0$

22. Esboce o gráfico de cada equação.

$(a)\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 1$ $\qquad (b)\ y = \ln|\,x\,|$

23. Ache o que está errado na seguinte "prova" que $\frac{1}{8} > \frac{1}{4}$.

Multiplique ambos os lados da desigualdade $3 > 2$ por $\log \frac{1}{2}$ para obter

$$\begin{aligned} 3\,\log \frac{1}{2} &> 2\,\log \frac{1}{2} \\ \log \left(\frac{1}{2}\right)^3 &> \log \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \log \frac{1}{8} &> \log \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} &> \frac{1}{4} \end{aligned}$$

24. A acidez de uma substância é medida pelo seu valor do pH, o qual é definido pela fórmula

$$pH = -\log[H^+]$$

onde o símbolo $[H^+]$ denota a concentração de íons de hidrogênio, medido em moles por litro. A água destilada tem umpH igual a 7; uma substância é chamada de ácida se tiver pH<7 e básica, se tiver pH>7. Ache o pH de cada uma das substâncias e estabeleça se é ácida ou básica.

	Substância	$[H^+]$
(a)	Sangue arterial	$3,9 \times 10^{-8}$ mol/L
(b)	Tomates	$6,3 \times 10^{-5}$ mol/L
(c)	Leite	$4,0 \times 10^{-7}$ mol/L
(d)	Café	$1,2 \times 10^{-6}$ mol/L

25. Na escala Richter, a magnitude M de um terremoto está relacionada com a energia liberada, E, em joules (J), pela equação

$$\log E = 4,4 + 1,5\,M.$$

(a) Ache a energia E do terremoto se São Francisco em 1906, que registrou $M = 8,2$ na escala Richter.

(b) Se a energia liberada de um terremoto for 10 vezes a de outro, quanto maior será sua magnitude na escala Richter?

26. Nos exercícios a seguir, ache $\dfrac{dy}{dx}$.

$(a)\ y = \ln 2x$ $\quad (b)\ y = \ln(x^3)$ $\quad (c)\ y = (\ln x)^2$ $\quad (d)\ y = \ln(sen\,x)$

$(e)\ y = \ln|\,tg\,x\,|$ $\quad (f)\ y = \ln(2+\sqrt{x})$ $\quad (g)\ y = \ln\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$ $\quad (h)\ y = \ln(\ln x)$

$(i)\ y = \ln|\,x^3 - 7x^2 - 3\,|$ $\quad (j)\ y = x^3 \ln x$ $\quad (l)\ y = \sqrt{\ln x}$ $\quad (m)\ y = \sqrt{1+\ln^2 x}$

$(n)\ y = cos(\ln x)$ $\quad (o)\ y = sen^2(\ln x)$ $\quad (p)\ y = x^3 \log_2(3-2x)$ $\quad (q)\ y = x\,[\log_2(x^2-2x)]^3$

$(r)\ y = \dfrac{x^2}{\log x}$ $\quad (s)\ y = \dfrac{\log x}{1+\log x}$ $\quad (t)\ y = e^{7x}$ $\quad (u)\ y = e^{-5x^2}$

$(v)\ y = x^3 e^x$ $\quad (x)\ y = e^{\frac{1}{x}}$ $\quad (z)\ y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\quad (a_1)\ y = sen(e^x)$

$(b_1)\ y = e^{x\,tg\,x}$ $\quad (c_1)\ y = \dfrac{e^x}{\ln x}$ $\quad (d_1)\ y = e^{(x - e^{3x})}$ $\quad (e_1)\ y = e^{\sqrt{1+5x^3}}$

$(f_1)\ y = \ln(1 - x\,e^{-x})$ $\quad (g_1)\ y = \ln(cose^x)$ $\quad (h_1)\ y = 2^x$ $\quad (i_1)\ y = \pi^{sen\,x}$

27. Ache $\dfrac{d\,y}{d\,x}$ por diferenciação implícita.

   $(a)\ y + \ln xy = 1 \qquad (b)\ y = \ln(x\,tg\,y)$

28. Ache $\dfrac{d\,y}{d\,x}$ usando primeiro as propriedades dos logaritmos.

   $(a)\ y = \ln\ \dfrac{cos\,x}{\sqrt{4-3\,x^2}} \qquad (b)\ y = \ln\ \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

29. Ache $\dfrac{d\,y}{d\,x}$ usando o método da diferenciação logarítmica.

   $(a)\ y = x\,\sqrt[3]{1+x^2} \qquad (b)\ y = \dfrac{(x^2-8)^{\frac{1}{3}}\sqrt{x^3+1}}{x^6-7\,x+5} \qquad (c)\ y = (x^3-2\,x)^{\ln x}$

   $(d)\ y = (\ln x)^{tgx} \qquad (e)\ y = 2^x \qquad (f)\ y = \pi^{sen\,x}$

30. Mostre que, para quaisquer constantes A e B, a função

$$y = A\,e^{2\,x} + B\,e^{-4\,x}$$

   satisfaz a equação

$$y'' + 2\,y' - 8\,y = 0$$

31. Dado que $\theta = tg^{-1}(4/3)$, ache os valores exatos de $sen\,\theta$, $cos\,\theta$, $cotg\,\theta$, $sec\,\theta$ e $cossec\,\theta$.

32. Ache $\dfrac{d\,y}{d\,x}$.

   $(a)\ y = sen^{-1}\left(\dfrac{x}{3}\right) \qquad (b)\ y = tg^{-1}(x^2) \qquad (c)\ y = (tg\,x)^{-1} \qquad (d)\ y = sen^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

33. Ache $\dfrac{d\,y}{d\,x}$ por diferenciação implícita para $x^3 + x\,tg^{-1}y = e^y$.

34. Um satélite de observação terrestre tem sensores de horizonte que podem medir o ângulo θ mostrado na figura. Seja R o raio da Terra (suposta esférica) e h a distância entre o satélite e a superfície da Terra.

   (a) Mostre que $\theta = sen^{-1}\dfrac{R}{R+h}$.

   (b) Ache θ para um satélite que está a $10\,000\,km$ da superfície da Terra (use $R = 6\,378\,km$).

35. Um aeroplano está voando a uma altura constante de 3 000 pés acima da água, a uma velocidade de 400 pés/s. O piloto deve soltar um pacote de sobrevivência de tal forma que ele caia na água em um ponto P à vista. Se a resistência do ar for desprezada, então o pacote irá seguir uma trajetória parabólica, cuja equação em relação ao sistema de coordenadas na figura é

$$y = 3\,000 - \frac{g}{2\,v^2}x^2$$

onde g é a aceleração da gravidade e v, a velocidade do avião. Usando $g = 32$ pés$/s^2$, ache o ângulo θ da "linha de visão" que resultará no pacote atingir o alvo.

RESPOSTAS

1.(a) $\dfrac{dV}{dt} = \pi\left(r^2\,\dfrac{dr}{dt} + 2\,r\,h\,\dfrac{dr}{dt}\right)$ (b) $-20\,\pi\,cm^3/s$, decrescendo.

2.(a) $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{cos^2\theta}{x^2}\left(x\,\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}\right)$ (b) $-\dfrac{5}{16}rad/s$, decrescendo.

3. $\dfrac{4\,\pi}{15}cm^3/min$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}mi/h$

5. $4\,860\,\pi\,cm^3/min$

6. $\dfrac{5}{6}$ pés/s

7. $\dfrac{125}{\sqrt{61}}$ pés/s

8. 704 pés/s

9.(a) $500\,mi,\ \ 1716\,mi$ (b) $1354\,mi,\ \ 27,7\,mi$

10. $\dfrac{9}{20\,\pi}$ m/min

11. $125\,\pi$ pés^3/min

12. 250 mi/h

13. $\dfrac{36\sqrt{69}}{25}$ pés/min

14. $\dfrac{8\,\pi}{5}$ km/s

15. $600\,\sqrt{7}$ mi/h

16.(a) $-\dfrac{60}{7}$ unidades por segundo (b) descendo

17. -4 unidades por segundo

18. $4,5$ cm/s; afastado

20. $\dfrac{20}{9\,\pi}$ cm/s

21.(a) 10^{-2} (b) e^2 (c) 4 (d) 10^5 (e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (f) $-\dfrac{\ln 3}{2\,\ln 5}$ (g) $\dfrac{\ln(7/2)}{3}$ (h) -2

24.(a) $7,4$ básico (b) $4,2$ ácido (c) $6,4$ ácido (d) $5,9$ ácido

25.(a) $\approx 5\times 10^{16}J$ (b) $\approx 0,67$

26.(a) $\dfrac{1}{x}$ (b) $\dfrac{3}{x}$ (c) $\dfrac{2\,\ln\,x}{x}$ (d) $cotg\,x$ (e) $\dfrac{sec^2x}{tg\,x}$ (f) $\dfrac{1}{4\,\sqrt{x}+2\,x}$ (g) $\dfrac{1-x^2}{x+x^3}$ (h) $\dfrac{1}{x\,\ln\,x}$

26.(i) $\dfrac{3\,x^2-14\,x}{x^3-7\,x^2-3}$ (j) $x^2\,(1+3\,\ln x)$ (l) $\dfrac{1}{2\,x\,\sqrt{\ln x}}$ (m) $\dfrac{\ln x}{x\,\sqrt{1+\ln^2 x}}$

26.(n) $-\dfrac{sen\,(\ln x)}{x}$ (o) $\dfrac{sen\,(2, \ln x)}{x}$ (p) $\dfrac{x^2}{\ln 2}\left(-\dfrac{2\,x}{3-2\,x}+3\,\ln(3-2\,x)\right)$

26.(q) $\dfrac{[\ln(x^2-2\,x)]^2}{[\ln 2]^3}\left(\dfrac{6\,x^2-6\,x}{x^2-2\,x}+\ln(x^2-2\,x)\right)$ (r) $\dfrac{2\,x+2\,x\,\log x-\frac{x}{\ln 10}}{(1+\log x)^2}$

26.(s) $\dfrac{1}{x\,\ln 10}\dfrac{1}{(1+\log x)^2}$ (t) $7\,e^{7\,x}$ (u) $-10\,x\,e^{-5\,x^2}$ (v) $x^2\,e^x\,(x+3)$ (x) $-\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ (z) $\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

26.(a_1) $e^{x\,tg\,x}\,(x\,sec^2x+tg\,x)$ (b_1) $\dfrac{e^x}{(\ln x)^2}\left(\ln x-\dfrac{1}{x}\right)$ (c_1) $e^{(x-e^{3\,x})}\,(1-3\,e^{3\,x})$ (d_1) $\dfrac{15\,x^2\,e^{\sqrt{1+5\,x^3}}}{2\,\sqrt{1+5\,x^3}}$

26.(e_1) $\dfrac{x-1}{e^x-x}$ (f_1) $-e^x\,tg\,(e^x)$ (g_1) $2^x\,\ln\,2$ (h_1) $\pi^{sen\,x}\,(\ln\,\pi)\,(cos\,x)$

27.(a) $-\dfrac{y}{x\,(y+1)}$ (b) $\dfrac{1}{x+tg\,y+sec^2y}$

28.(a) $-tg\,x+\dfrac{3\,x}{4-3\,x^2}$ (b) $\dfrac{1}{x^2-1}$

29.(a) $\dfrac{3+5\,x^2}{3\,(1+x^2)^{\frac{2}{3}}}$ (b) $\dfrac{(x^2-8)^{\frac{1}{3}}\sqrt{x^3+1}}{x^6-7\,x+5}\left[\dfrac{2\,x}{3\,(x^2-8)}+\dfrac{3\,x^2}{2\,(x^3+1)}-\dfrac{6\,x^5-7}{x^6-7\,x+5}\right]$

29.(c) $(x^3-2\,x)^{\ln x}\left[\dfrac{\ln(x^3-2\,x)}{x}+\dfrac{3\,x^2-2}{x^3-2\,x}\,\ln x\right]$ (d) $(\ln x)^{tg\,x}\left[\dfrac{tg\,x}{x\,\ln x}+sec^2x\,\ln(\ln x)\right]$

29.(e) $2^x\,\ln 2$ (f) $\pi^{sen\,x}\,(\ln\pi)\,(cos\,x)$

31. $\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{4}$

32.(a) $\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ (b) $\dfrac{2\,x}{1+x^2}$ (c) $\dfrac{1}{1+x^2}$ (d) $-\dfrac{1}{|\,x\,|\,\sqrt{x^2-1}}$

33. $\dfrac{-(3\,x^2+tg^{-1}y)\,(1+y^2)}{x-e^y\,(1+y^2)}$

34.(b) $\approx 23^0$

35. $\approx 29^0$