

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
DISCIPLINA: MAT01339 - Cálculo e Geometria Analítica para Arquitetos
PROFESSOR: Vilmar Trevisan
Lista XV de Exercícios

1. Encontre a primitiva para cada uma das equações diferenciais.

$$(a) \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (b) \frac{d^3 y}{dx^3} = x \quad (c) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

2. Encontre uma solução particular satisfazendo as condições iniciais dadas.

$$(a) \frac{d^2 y}{dx^2} = e^x \quad y = 1 \quad \text{e} \quad y' = 0 \quad \text{para} \quad x = 1$$

$$(b) \frac{dy}{dx} = y \quad y = 1 \quad \text{para} \quad x = 0$$

3. Encontre uma solução particular satisfazendo as condições de contorno dadas.

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0 \quad y = 1 \quad \text{para} \quad x = -1 \quad \text{e} \quad x = 1 \quad \text{e} \quad y' = 0 \quad \text{para} \quad x = -1 \quad \text{e} \quad x = 1$$

4. Verifique que as seguintes são soluções das equações diferenciais dadas.

$$(a) y = \sin x \quad \text{para} \quad y'' + y = 0$$

$$(b) y = e^{2x} \quad \text{para} \quad y'' - 4y = 0$$

$$(c) y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad \text{para} \quad y'' + y = 0$$

$$(d) y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \quad \text{para} \quad y'' - 4y = 0$$

5. Classifique as equações diferenciais segundo a ordem e o grau.

$$(a) \frac{dy}{dx} = x^2 - y^2 \quad (b) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + x \frac{dy}{dx} - y^2 = 0$$

$$(c) \frac{d^2 y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + xy = 0 \quad (d) \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^4 - 2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 0$$

6. Ache a solução das equações por separação de variáveis.

$$(a) y' = \sin x \cos^2 y \quad (b) y' = \frac{2y^2 - 1}{y} \quad (c) y' = y^{-2} \quad (d) y' = \frac{x+1}{y} \quad (e) y' = \frac{x^2 - 1}{y^2 + 1}$$

7. Resolva:

$$(a) y' = 1 - y \quad (b) y' = \frac{xy}{1+x^2}$$

$$(c) \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}, \quad y(2) = 1 \quad (d) y' \sin^2 x = y \quad y(\pi/6) = -1/2$$

$$(e) y' = \frac{\ln x}{1+y^2} \quad y(1) = 0 \quad (f) y' = \frac{1+y}{1+x} \quad y(-3) = -2$$

8. Resolva a equação diferencial e faça um esboço da família de soluções.

$$y' = \frac{x}{1+y}$$

9. O nucleotídeo radioativo plutônio 241 decai de acordo com a equação diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = -0,0525 Q,$$

onde t é o tempo (dado em anos). Se 50 mg de plutônio 241 estiverem presentes numa amostra no dia de hoje, determine quanto plutônio existirá daqui a 2 anos.

10. Resolva cada PVI.

$$(a) \begin{cases} y' = 2y - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} y' = \cos 5\pi t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

11. Em psicologia, a lei de Weber-Fechner para a resposta-estímulo diz que a taxa de variação $\frac{dR}{dS}$ da reação R é inversamente proporcional ao estímulo. O valor inicial é o nível mínimo de estímulo que pode ser consistentemente detectado. O problema de valor inicial para este modelo é

$$\begin{aligned} R' &= \frac{k}{S} \\ R(S_0) &= 0 \end{aligned}$$

Determine a reação R para um caso em que $k = 1$ e $S_0 = 0,1$.

12. Uma das equações básicas dos circuitos elétricos é

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

onde L é a indutância, R é a resistência, i é a corrente e E , a força eletromotriz. Considere $L = 3\text{ H}$, $R = 15\ \Omega$, $E = 110\text{ V}$ e $i = 0$ quando $t = 0$. Determine o valor da corrente quando $t = 0,5\text{ s}$.

13. Em uma reação química, uma molécula de A se combina com uma molécula de B para formar uma molécula do produto químico C . Sabe-se que a concentração, $y(t)$, no tempo t , é a solução do problema de valor inicial:

$$y' = k(a - y)(b - y)$$

onde k é uma constante positiva e a e b são as concentrações iniciais de A e de B , respectivamente.

- Resolva a equação por variáveis separáveis e mostre que a solução geral satisfaz a equação

$$\ln \left[(a - y)^{\frac{1}{a-b}} (b - y)^{\frac{1}{b-a}} \right] = kx + C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

- Suponha que $y(0) = 0$, $k = 0,01$, $a = 70$ milimoles/litro e $b = 50$ milimoles/litro. Encontre a solução deste PVI.

14. Suponha que uma população $N(t)$ de mosquitos, na ausência de outros fatores, aumente a uma taxa, em cada instante, proporcional à população existente, tal que a equação diferencial satisfeita pela população de mosquitos seja:

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N. \quad (1)$$

- Sabendo que a população duplica a cada semana, e que no instante inicial, $t = 0$, a população é de 200.000 mosquitos, obtenha o valor de k .
- Resolva a PVI resultante

$$\frac{dN}{dt} = \ln 2 \cdot N. \quad (2)$$

$$N(0) = 200.000 \quad (3)$$

- Considere, agora, que exista no mesmo ambiente uma espécie de pássaros predadores, que comem 140.000 mosquitos por semana, tal que a equação diferencial satisfeita pela população de mosquitos seja:

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N - 140000, \quad (4)$$

onde $k = \ln 2 / \text{semana} \simeq 0,693 / \text{semana}$, é a taxa de crescimento intrínseca da população. Faça um esboço do gráfico de $\frac{dN}{dt}$ em função de N , neste caso; localize a população inicial $N(0) = 200.000$ mosquitos e explique como se comportará a população.

- Considerando o sinal de $\frac{dN}{dt}$ correspondente à equação (4), o que se pode concluir a respeito do gráfico de $N(t)$ em função de t ?
- Com base no que você observou nos dois itens anteriores, faça um esboço do gráfico de $N(t)$ em função de t . Com a presença desta espécie de pássaros, a população de mosquitos irá à extinção? Justifique sua resposta, relacionando com os gráficos de $\frac{dN}{dt}$ em função de N , e de $N(t)$ em função de t , que você traçou.
- Verifique que a função constante $N(t) = 140000 / \ln 2$ é uma solução de (4). Isso indica que a solução geral da equação (4) é

$$N(t) = C e^{t \ln 2} + 140000 / \ln 2,$$

onde C é contante arbitrária. Calcule o valor de C para o PVI (4), com $N(0) = 200000$.

- Esboçe o gráfico da função $N(t)$ obtida no item anterior e reitere as conclusões sobre a extinção da espécie.
15. Considere uma viga apoiada de comprimento l e de peso w por unidade de comprimento. Tomando a origem do sistema de coordenadas no apoio esquerdo, tem-se que as forças externas são a reação $\frac{ql}{2}$ e a carga $-qx$ e seus momentos são $\frac{qlx}{2}$ e $\frac{-qx^2}{2}$, respectivamente. Portanto,

$$EI y'' = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

com condições de contorno

$$y(0) = 0 \quad y(l) = 0$$

Resolva este problema considerando $l = 2$, $EI = 10000$ e $q = 5000$.

16. Representando por $N_1(t)$ e por $N_2(t)$ as populações de New York e de Los Angeles, respectivamente, em um instante t , e sabendo que elas crescem 1% e 1,4% por ano, respectivamente, podemos escrever:

$$\frac{dN_1}{dt} = k_1 \cdot N_1 \quad \text{e} \quad \frac{dN_2}{dt} = k_2 \cdot N_2.$$

- Mostre que $k_1 = \ln(1,01) / \text{ano} \simeq 0,01 / \text{ano}$ e $k_2 = \ln(1,014) / \text{ano} \simeq 0,014 / \text{ano}$.
 - Calcule a solução geral para $N_1(t)$ e $N_2(t)$, esboçando as curvas integrais para cada uma delas.
 - Considerando uma população inicial de 8 milhões de habitantes em New York, e de 6 milhões de habitantes em Los Angeles, determine as soluções $N_1(t)$ e $N_2(t)$ que satisfazem a EDO (16).
 - Esboçe, no mesmo sistema de coordenadas, os gráficos das soluções $N_1(t)$ e $N_2(t)$ encontradas no item anterior.
 - Mostre que, segundo este modelo, as populações destas duas cidades serão iguais após $\tau = \frac{1}{0,004} \ln(\frac{4}{3})$ anos $\simeq 71,92$ anos.
17. Assuma que a curva $P(t)$ para uma determinada população obedeça a equação diferencial para uma curva logística $P' = aP - bP^2$, com t o tempo em anos.
- Obtenha a solução geral para a equação usando o método de separação de variáveis.
 - Os valores $a = 0,02$ e $b = 0,00004$ produzem um modelo para a população. Esboçe a família de curvas integrais para estes valores de a e b e a solução encontrada no item anterior.
 - Considerando que no ano de 1990 a população era 76,1 milhões, obtenha uma estimativa para esta população no ano de 2010.
18. Determine a solução geral das EDO's:
- (a) $y'' + y' = 0$ (b) $y'' + y' + y = 0$ (c) $y'' + 2y' + y = 0$
19. Encontre a EDO lineare, homogênea, e com coeficientes constantes cujas soluções são:
- (a) $1, x,$ (b) $2e^x, 3e^{-5x}$ (c) $3 \cos 4x, 9 \sin 4x$

RESPOSTAS

- (a) $c_1 x + c_2$ (b) $\frac{1}{24} x^4 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$ (c) $\ln |x| + c$ ($x \neq 0$)
- (a) $e^x - e x + 1$ (b) e^x
- 1
- (a) ordem 1, grau 1 (b) ordem 1, grau 2 (c) ordem 2, grau 1 (d) ordem 2, grau 4
- (a) $tg y = -\cos x + c$ (b) $2y^2 - 1 = c e^{4x}$ (c) $y^3 = 3x + c$ (d) $y^2 = x^2 + 2x + c$
- (e) $y^3 + 3y = x^3 - 3x + c$
- (a) $y = 1 + c e^{-x}$ (b) $y = c \sqrt{1 + x^2}$ (c) $y + \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} - \frac{4}{3}$ (d) $y = -\frac{1}{2} e^{\sqrt{3} - \cot g x}$
- (e) $y + \frac{y^3}{3} + x - x \ln x = 1$ (f) $y = \frac{x-1}{2}$
- $x^2 - y^2 - 2y = c$ família de hipérboles
- $50 e^{-0,105} \approx 45,02$
- (a) $y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{2t}$ (b) $y(t) = \frac{1}{5\pi} \sin(5\pi t) + 1$
- $R(S) = \ln(10S)$
- $\frac{22}{3} - \frac{22}{3} e^{-2,5} \approx 6,73$
- $k = \ln 2 \simeq 0,693$ $N(t) = 200000 \exp(t \cdot \ln 2),$ $N(t) = (200000 - 140000 / \ln(2)) e^{t \ln(2)} + 140000 / \ln(2)$
- $P(t) = \frac{a}{b + e^{-at} C a},$ $C \approx 0,01114.$ População em 2010 $\approx 105,6$ milhões.