UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
DISCIPLINA: MAT01339 - Cálculo e Geometria Analítica para Arquitetos
PROFESSOR: Vilmar Trevisan
Lista XI de Exercícios (Elaborada por Carolina Cardoso)

1. Dê um gráfico completo de cada função, marcando as coordenadas dos pontos estacionários e de inflexão.
   $(a)\ f(x) = x^2 - 2x - 3$ $(b)\ f(x) = x^3 - 3x + 1$ $(c)\ f(x) = x^4 + 2x^3 - 1$ $(d)\ f(x) = 3x^5 - 5x^3$
   $(e)\ f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ $(f)\ f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

2. Dê um gráfico completo de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ e localize todos os pontos críticos e de inflexão.

3. Ache os limites da função quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$; dê um gráfico completo da função e localize todos os extremos relativos e pontos de inflexão.
   $(a)\ f(x) = x^2 e^{-2x}$ $(b)\ f(x) = x\, e^{x^2}$

4. Ache os limites de $f(x) = x \ln x$ quando $x \to 0^+$ e $x \to -\infty$; dê um gráfico completo de $f(x)$ e localize todos os extremos relativos e pontos de inflexão.

5. Em cada parte, esboce o gráfico de uma função contínua f com as propriedades indicadas no intervalo $[0, 10]$.
   (a) f tem mínimo e máximo absolutos em $x = 0$ e $x = 10$, respectivamente.
   (b) f tem mínimo e máximo absolutos em $x = 2$ e $x = 7$, respectivamente.
   (c) f tem mínimos relativos em $x = 1$ e $x = 8$, máximos relativos em $x = 3$ e $x = 7$ e tem mínimo e máximo absolutos em $x = 5$ e $x = 10$, respectivamente.

6. Ache os valores máximo e mínimo absolutos de f no intervalo fechado dado e indique onde ocorrem estes valores.
   $(a)\ f(x) = 4x^2 - 4x + 1 \quad [0, 1]$ $(b)\ f(x) = (x - 1)^3 \quad [0, 4]$ $(c)\ f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{4x^2 + 1}} \quad [-1, 1]$

7. Ache os valores máximo e mínimo absolutos, se houver, no intervalo dado e indique onde ocorrem estes valores.
   $(a)\ f(x) = x^2 - 3x - 1 \quad (-\infty, \infty)$ $(b)\ f(x) = 4x^3 - 3x^4 \quad (-\infty, \infty)$
   $(c)\ f(x) = x^3 - 3x - 2 \quad (-\infty, \infty)$ $(d)\ f(x) = \dfrac{x^2}{x+1} \quad (-5, -1)$

8. Qual é a menor inclinação possível para uma reta tangente à equação $y = x^3 - 3x^2 + 5x$?

9. Expresse o número 10 como a soma de dois números não negativos cujo produto é o maior possível.

10. Ache um número no intervalo $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$ tal que a soma do número com o seu recíproco é
    (a) a menor possível
    (b) a maior possível.

11. Um terreno retangular deve ser cercado de duas formas. Dois lados opostos devem receber uma cerca reforçada que custa $R\$\,3$ o metro, enquanto que os dois lados restantes recebem uma cerca padrão de $R\$\,2$ o metro. Quais são as dimensões do terreno de maior área que pode ser cercada com $R\$\,6\,000$?

12. Ache as dimensões do retângulo de área máxima que pode ser inscrito em um círculo de raio $10\,cm$.

13. Uma área retangular com $288\,m^2$ deve ser cercada. Em dois lados opostos será usada uma cerca que custa $R\$\,1$ o metro e nos lados restantes, uma cerca que custa $R\$\,2$ o metro. Ache as dimensões do retângulo com o menor custo.

14. Mostre que entre todos os retângulos com área A, o quadrado tem perímetro mínimo.

15. Suponha que o número de bactérias em uma cultura no instante t é dada por $N = 5\,000\,(25 + t\,e^{-\frac{t}{20}})$.

    (a) Ache o maior e o menor número de bactérias durante o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 100$.

    (b) Em que momento, durante o intervalo de tempo da parte (a), o número de bactérias decresce mais rapidamente?

16. Uma folha de papelão quadrada com $12\,cm$ de lado é usada para fazer uma caixa aberta, retirando quadrados do mesmo tamanho dos quatro cantos e dobrando-se os lados. Qual é o tamanho dos quadrados que resulta na caixa com o maior volume possível?

17. Uma caixa aberta deve ser feita com uma folha de metal de $3\,cm$ por $8\,cm$ cortando-se quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando-se os lados. Ache o volume máximo que uma caixa destas pode ter.

18. Um recipiente com a forma de um paralelepípedo com base quadrada deve ter um volume de $2\,000\,cm^3$. O custo da base e da tampa é o dobro do custo dos lados. Ache as dimensões do recipiente de menor custo.

19. Um recipiente com a forma de um paralelepípedo tem dois lados quadrados e é aberto em cima. Se o volume for V unidades cúbicas, ache as dimensões do recipiente com a área superficial mínima.

20. Uma lata cilíndrica aberta no topo deve conter $500\,cm^3$ de líquido. Ache a altura e o raio que minimizam a quantidade de material necessário para confeccionar a lata.

21. Uma armação em arame consiste de dois quadrados idênticos, cujos vértices estão ligados por quatro fios retos de mesmo comprimento. Se a armação for feita com um único fio de arame de comprimento L, quais devem ser as dimensões para obter uma caixa com o maior volume?

22. Uma janela em estilo normando consiste em um retângulo com um semicírculo sobre ele. Se o perímetro de uma janela normanda for de $10\,m$, determine qual deve ser o raio do semicírculo e a altura do retângulo, tal que a janela do retângulo deixe passar o máximo de luz.

23. Aproxime $\sqrt{2}$ aplicando o método de Newton à equação $x^2 - 2 = 0$.

24. Aproxime $\sqrt[3]{6}$ aplicando o método de Newton à equação $x^3 - 6 = 0$.

25. Aproxime uma solução real de cada equação pelo método de Newton.

(a) $x^3 - x + 3 = 0$ $\quad (b)$ $x^5 + x^4 - 5 = 0$

26. Use o método de Newton para aproximar a solução que satisfaça a equação dada.

(a) $x^4 + x - 3 = 0; \quad x < 0$ $\quad (b)$ $2\,sen\,x = x; \quad x > 0$

27. Determine graficamente o número de vezes que as curvas se interceptam; aplique então o método de Newton, quando necessário, para aproximar as coordenadas x de todas as intersecções.

(a) $y = x^3 \quad e \quad y = \dfrac{x}{2} - 1$ $\quad (b)$ $y = x^2 \quad e \quad y = \sqrt{2\,x + 1}$

28. Use o método de Newton para encontrar o mínimo absoluto de $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + x^2 + 5\,x$.

29. (a) Aplique o método de Newton à função $f(x) = x^2 + 1$ com valor inicial $x_0 = 1,5$ e determine se os valores $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ aparentam convergir.

(b) Explique o que está acontecendo.

RESPOSTAS

6.(a) Valor máximo 1 em $x = 0$, $x = 1$; Valor mínimo 0 em $x = 1/2$.
6.(b) Valor máximo 27 em $x = 4$; Valor mínimo -1 em $x = 0$.
6.(c) Valor máximo $3/\sqrt{5}$ em $x = 1$; Valor mínimo $x = -3/\sqrt{5}$ em $x = -1$.
7.(a) Valor mínimo $f(3/2) = -13/4$; Não há máximo.
7.(b) Valor máximo $f(1) = 1$; Não há mínimo.
7.(c) Não há máximo nem mínimo.
7.(d) Valor máximo $f(-2) = -4$; Não há mínimo.
8. $f'(1) = 2$ 9. $5; 5$ 10.(a) 1 (b) $1/2$ 11. $500\,m \times 750\,m$ 12. $10\sqrt{2}\,un. \times 10\sqrt{2}\,un.$
13. $24\,m$ ($R\$1$ o metro da cerca), $12\,m$ ($R\$2$ o metro da cerca)
15.(a) máximo $N = 161\,788$, mínimo $N = 125\,000$ 16. $2\,cm$ 17. $200/27\,cm^3$
18. base $10\,cm$, altura $20\,cm$ 19. tampa (ou base) $\sqrt[3]{3\,V/4}$, altura $\frac{4}{3}\sqrt[3]{3\,V/4}$
20. altura=raio=$\sqrt[3]{500/\pi}$ cm 21. $L/12$ por $L/12$ por $L/12$
22. raio do semicírculo $\frac{10}{4+\pi}\,m$; altura do retângulo $\frac{10}{4+\pi}\,m$
23. $1,41421313562$ 24. $1,817120593$ 25.(a) $-1,671699882$ 25.(b) $1,224439550$
26.(a) $-1,452626879$ 26.(b) $1,895494267$
27.(a) $-1,165373043$ 27.(b) $-0,474626218; 1,395336994$ 28. $-4,098859132$