

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática

**Notas de Aula:
Mecânica e Controle**

Prof. Mark Thompson

10 de março de 2010

Sumário

Prefácio	1
1 PARTE I	3
1.1 Cinemática	3
1.1.1 Coordenadas Esféricas (r, θ, ψ)	3
1.1.2 Velocidade angular	5
1.2 Forças	16
1.2.1 Leis de Newton	17
1.2.2 Leis de Kepler	17
1.2.3 Movimento Planetário	19
1.2.4 Equação de Kepler no tempo	21
1.2.5 Forças Centrais	23
1.3 Dinâmica de Partículas	25
1.3.1 Problemas em Duas e Três Dimensões	25
1.3.2 Movimento de Projéteis sob Ação da Gravidade	25
1.3.3 Movimento Restrito de Partículas	33
1.3.4 Pêndulo Simples	36
1.3.5 Momentum Angular de uma Partícula	39
1.4 Movimento Orbital	45
1.4.1 Órbita de uma partícula sobre uma força central	45
1.5 Sistemas de Partículas: Princípios gerais	47
1.5.1 Momentum Angular e Taxa de Mudança do Momento do Sistema	48
1.5.2 Centróides (Centros de Massa)	49
1.5.3 Origem em Movimento	50
1.5.4 Forças Impulsivas	53
1.5.5 Impacto Elástico	56
1.6 Dinâmica de Corpos Rígidos	57
1.6.1 Momentos e Produtos de Inércia	57
1.6.2 O Teorema dos eixos Paralelos e Perpendiculares	58
1.6.3 Momento Angular de um Corpo Rígido sobre um Ponto Fixo e sobre Eixos Fixos	59
1.6.4 Eixos Principais	60

1.6.5	Energia Cinética de um Corpo Rígido rotando sobre um ponto fixo	61
1.6.6	Elipsóide de Momento- Sistemas com Momentos iguais	62
1.7	Problemas Bidimensionais em Dinâmica de Corpos Rígidos	64
1.7.1	Problemas Ilustrando as Leis do Movimento	65
2	Parte II	67
2.1	Alguns Problemas Tridimensionais em Dinâmica Vetorial	67
2.1.1	Equações Dinâmicas de Euler para o Movimento de um Corpo Rígido sobre um Ponto Fixo	67
2.1.2	A Rotação da Terra	71
2.2	Coordenadas Generalizadas	75
2.2.1	Noções Preliminares	75
2.2.2	Velocidades Generalizadas	75
2.2.3	Trabalhos Virtuais e Forças Generalizadas	76
2.2.4	Dedução da Equação de Lagrange para um Sistema Holonomico	77
2.2.5	Componentes Generalizadas do Momentum e do Impulso	78
2.2.6	Equações de Lagrange para Forças Impulsivas	80
2.2.7	Energia Cinética como uma Função Quadrática de Velocidades	81
2.3	Angulos Eulerianos	82
2.4	Movimento de um Pião Simétrico	84
2.5	Métodos Variacionais	88
2.5.1	O Cálculo das Variações	88
2.5.2	O problema Brachistochrone	90
2.5.3	Extensões do Método Variacional	91
2.5.4	Princípio de Hamilton	92
2.5.5	Princípio da última Ação	92
2.5.6	Caso Não-Holonomico	95
2.5.7	Diferenças entre o Princípio de Hamilton e o Princípio de Última Ação	97
2.6	98
2.6.1	A Função de Ação	98
2.6.2	A equação de Hamilton-Jacobi	99
2.6.3	Relações entre Mecânica clássica e Mecânica Quântica	102
	Referências Bibliográficas	105
3	PARTE III	109
3.1	Enunciado do Problema de Controle Ótimo	109
3.2	Enunciado do Princípio de Pontryagin	110
3.2.1	Teorema: Princípio de Pontryagin	111
3.3	Enunciado do Problema de Aterrissagem na Lua	112
3.3.1	Extremais para o Problema de Aterrissagem na Lua	113
3.4	Resultados Preliminares	118

3.5	Apêndice Parte III	120
3.6	O Problema dos “n-Corpos” de Newton: Uma Abordagem Clássica e seus Modernos Desenvolvimentos	120
3.6.1	Abordagem Clássica do Problema dos Três Corpos	121
3.6.2	Modernos Desenvolvimentos	136
	Bibliografia	148

Prefácio

Estas notas não tem nenhuma pretensão à originalidade e a forte influência dos livros Chorlton [5], Rutherford [10] e Whittaker [15] é reconhecida e evidente nas partes I e II, bem como o livro de Fleming e Rishel [6] na parte III. A seção 18, foi preparada por A. Haag e A. Novroth e consiste de seu trabalho final da disciplina. Esperamos que estas notas forneçam uma concisa e útil introdução aos textos mais completos em Mecânica. Um conhecimento de cálculo vetorial e análise elementar é um pré-requisito para ler estas notas e algum conhecimento da teoria de funções complexas seria útil em algumas aplicações da teoria de funções elípticas.

Agradeço João Francisco Prolo Filho por me alertar que o antigo *pêndulo de Foucault* não existe mais no Museu de Sciences em South Kensington e ao mesmo por fornecendo as informações do Institute Smithsonian de Washington incluídas nas notas.

Capítulo 1

PARTE I

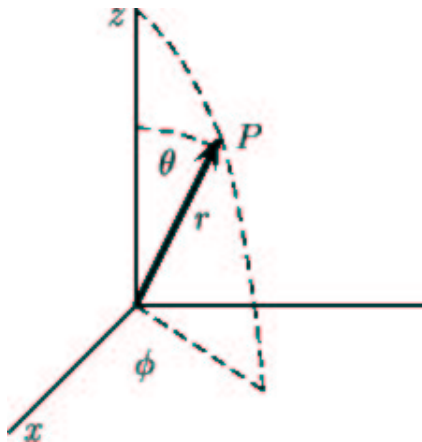
1.1 Cinemática

Definição 1.1.1. *O termo Cinemática significa estudo do movimento.*

Os vários tipos de movimento são referidos a um sistema coordenado, sendo o sistema cartesiano de eixos coordenados retangulares $OXYZ$ utilizado em boa parte dos problemas. Em outros, será mais indicado o uso de coordenadas esféricas.

1.1.1 Coordenadas Esféricas (r, θ, ψ)

A relação entre coordenadas esféricas e coordenadas cartesianas é dada por



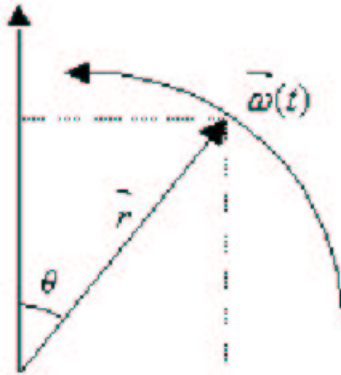
$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\psi, \quad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi, \quad z = r \cos\theta.$$

Suponha que tenhamos uma partícula com posição dado por $\vec{r} = \vec{r}(t)$ em tempo t . Então, a velocidade = taxa de mudança de posição e enquanto a aceleração é dado por:

$$v(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Velocidade e aceleração são vetores quantitativos.

Exemplo 1.1.1. Quando temos um eixo fixo e queremos fazer uma rotação ao redor dele com uma taxa $w(t)$ para calcular a velocidade em algum ponto que está na rotação, tal velocidade é chamada de **velocidade angular**.



Observemos que no intervalo Δt esta velocidade vai seguir uma distância infinitesimal. Onde estará a posição infinitesimal aproximada no tempo Δt ?

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = w(t), \quad \phi(t + \Delta t) - \phi(t) = \int_t^{t+\Delta t} w(\tau) d\tau = w(t)\{1 + o(1)\}\Delta t$$

supondo que $w(\tau)$ é contínua .

O que temos, então, é um arco, que é aproximadamente h onde h é dado por



$$\tan(w\Delta t) = \frac{h}{r\text{sen}\theta}$$

daí,

$$\begin{aligned} h &= r \cdot \text{sen}\theta \cdot \tan(w\Delta t) = r \cdot \text{sen}\theta \frac{\text{sen}(w\Delta t)}{\cos(w\Delta t)} \\ &= r \cdot \text{sen}\theta \frac{\{1 + o(w\Delta t)^2\}w\Delta t}{1 + o(w\Delta t)^2} \\ &= r \cdot \text{sen}\theta \cdot w\Delta t \{1 + o(1)\} \end{aligned}$$

\vec{v} será $r \cdot \text{sen}\theta w\Delta t / \Delta t \cong w \cdot r \cdot \text{sen}\theta$ na direção tangencial ao círculo de rotação.

1.1.2 Velocidade angular

- Rotações finitas sobre diferentes eixos, embora possam ser representadas por linhas em magnitude e direção, não são comutativas e portanto não obedecem a lei de adição de vetores.
- Rotações infinitesimais, por outro lado, podem ser representadas por vetores.

Considere uma rotação infinitesimal com um ângulo $\delta\theta$ sobre um eixo passando pela origem dado pelo vetor unitário \vec{e} . Em virtude desta rotação, um ponto cujo vetor posição é originalmente \vec{r} e descreve um arco de um círculo de raio $r \cdot \text{sen}\phi$, onde ϕ é o ângulo entre \vec{e} e \vec{r} . este deslocamento tem comprimento $r \cdot \text{sen}\phi\delta\theta$ e é perpendicular a \vec{e} e \vec{r} . Conseqüentemente, $\delta\vec{r}$ é paralelo ao produto $\vec{e} \wedge \vec{r}$. Em outras palavras,

$$\delta\vec{r} = \delta\theta\vec{e} \wedge \vec{r}$$

e a velocidade do ponto é

$$\dot{\vec{r}} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} = \dot{\theta}\vec{e} \wedge \vec{r} = \omega \wedge \vec{r},$$

onde $\vec{\omega}$ (velocidade angular) denota o vetor $\dot{\theta}\vec{e}$, que representa um giro sobre a reta origem na direção de $\vec{\omega}$ (ou \vec{e}) com a velocidade angular $\vec{\omega}$ (ou $\dot{\theta}$).

Vimos que se um ponto \vec{r} é sujeito a uma rotação infinitesimal $\delta\theta_1$ sobre o eixo e_1 , este ponto assume uma nova posição

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \delta\theta_1\vec{e}_1 \wedge \vec{r}.$$

Se esta rotação é seguida por outra rotação $\delta\theta_2$ sobre e_2 , a posição final deste ponto fica

$$\begin{aligned} \vec{r}_{12} &= \vec{r}_1 + \delta\theta_2\vec{e}_2 \wedge \vec{r}_1 \\ &= (\vec{r} + \delta\theta_1\vec{e}_1 \wedge \vec{r}) + \delta\theta_2\vec{e}_2 \wedge (\vec{r} + \delta\theta_1\vec{e}_1 \wedge \vec{r}) \\ &= \vec{r} + (\delta\theta_1\vec{e}_1 + \delta\theta_2\vec{e}_2) \wedge \vec{r} + O(\delta\theta_1\delta\theta_2). \end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$\vec{r}_{21} = \vec{r} + (\delta\theta_1\vec{e}_1 + \delta\theta_2\vec{e}_2) \wedge \vec{r}.$$

Portanto, podemos observar que

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_{21} + O(\delta\theta_1\delta\theta_2),$$

de onde concluímos que estas rotações infinitesimais são comutativas. O que também é válido para velocidades angulares.

$$\dot{\vec{r}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_{21} - \vec{r}}{\Delta t} = (\dot{\theta}_1\vec{e}_1 + \dot{\theta}_2\vec{e}_2) \wedge \vec{r}.$$

Então,

$$\dot{\vec{r}} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \wedge \vec{r}$$

Observação 1. *Duas velocidades angulares ω sobre eixos paralelos de rotação produzem efeitos diferentes. Uma velocidade angular é, portanto, um vetor localizado, ou seja, não somente possui magnitude e direção mas também é associado a uma reta definida de ação.*

Como, um ponto \vec{r} adquire uma velocidade $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$ devido à uma velocidade angular $\vec{\omega}$ sobre a origem, adquire-se uma velocidade $\vec{\omega} \wedge (\vec{r} - \vec{a})$ devido a uma velocidade angular $\vec{\omega}$ sobre um ponto \vec{a} . Como a diferença $\vec{\omega} \wedge \vec{a}$ entre estas duas velocidades é independente da posição de \vec{r} , segue que uma velocidade angular sobre a origem é equivalente à velocidade linear $\vec{\omega} \wedge \vec{a}$ juntamente com a velocidade angular $\vec{\omega}$ sobre \vec{a} . Portanto, o movimento rotacional de um corpo rígido pode ser especificado por uma mesma velocidade angular $\vec{\omega}$ sobre qualquer ponto \vec{a} desde que haja uma compensação da velocidade linear $\vec{\omega} \wedge \vec{a}$ seja dada ao corpo como um todo.

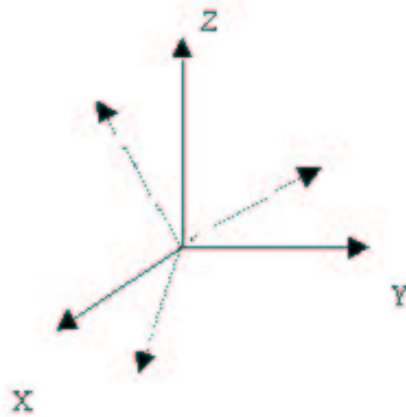
 Frequentemente, em mecânica, consideramos um eixo ao redor do qual à rotação. Supondo que há um sistema fixo, o restante dos sistemas estão em movimento quando queremos expressar o sistema em termos de mecânica (eixos de rotação - ex.: pêndulos). Seja $OXYZ$ uma conjunto de eixos fixos que coincidem momentaneamente em $t = 0$ com outro conjunto $OX'Y'Z'$ (rotações relativas em $OXYZ$ com velocidade angular $\vec{\omega}$).

Seja,

$$\vec{\omega} = \omega_1\vec{i} + \omega_2\vec{j} + \omega_3\vec{k}$$

onde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são os vetores unitários em \vec{OX}, \vec{OY} e \vec{OZ} , respectivamente. Seja $P = P(x, y, z)$ um ponto qualquer no espaço que tem velocidade relativa seguindo a regra da mão direita e $\vec{OP} \equiv \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$$\vec{r} = x(t)\vec{i}(t) + y(t)\vec{j}(t) + z(t)\vec{k}(t) \quad (\text{em respeito ao eixo em rotação})$$



Então a velocidade de P é dada por

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i}(t) + \dot{y}(t)\vec{j}(t) + \dot{z}(t)\vec{k}(t) + x(t)\frac{d\vec{i}(t)}{dt} + y(t)\frac{d\vec{j}(t)}{dt} + z(t)\frac{d\vec{k}(t)}{dt} \quad (1.1)$$

Os eixos não são fixos neste caso ($d\vec{i}/dt, \dots$) são não nulos. Agora, $d\vec{i}/dt$ é a velocidade no ponto $(1, 0, 0)$.

A velocidade no ponto será a taxa de mudança em $\vec{v}(t)$.

A relação final em (1.1), que por conveniência vamos chamar de “A”, pode ser escrita da seguinte forma

$$A = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

onde podemos observar que

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \text{velocidade relativa ao sistema em movimento} \\ \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \text{movimento do sistema} \end{cases}$$

Como $\vec{\omega} = \omega_1\vec{i} + \omega_2\vec{j} + \omega_3\vec{k}$, e $d\vec{i}/dt$ é a velocidade no ponto $(1, 0, 0)$ temos

$$(\omega_1\vec{i} + \omega_2\vec{j} + \omega_3\vec{k}) \wedge \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Assim como, $d\vec{j}/dt$ é a velocidade no ponto $(0, 1, 0)$, então

$$(\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k}) \wedge \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

e $d\vec{k}/dt$ é a velocidade no ponto $(0, 0, 1)$

$$(\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k}) \wedge \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Então,

$$\vec{v} = (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) + x(\omega_3\vec{j} - \omega_2\vec{k}) + y(\omega_1\vec{k} - \omega_3\vec{i}) + z(\omega_2\vec{i} - \omega_1\vec{j}).$$

Podemos observar que o primeiro termo desta fórmula $(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k})$ representa a velocidade de P relativa ao modelo regra: quando $(\vec{\omega} = 0)$, \vec{v} deve ser igual a isto. Denotemos esta quantidade por $\partial\vec{r}/\partial t$, onde a diferencial parcial significa que o movimento é relativo à regra. Os outros termos representam $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$. Logo,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}.$$

Este sistema pode ser representado para qualquer vetor, não necessariamente para velocidade angular

Exemplo 1.1.2.

$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} =$ *mudança relativa do sistema mais mudanças do sistema onde \vec{R} pode ser qualquer vetor, não necessariamente o valor de posição de uma partícula.*

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\partial\vec{R}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{R} = \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

Em particular, a velocidade $\frac{d\vec{r}}{dt}$ de um ponto \vec{r} em movimento pode ser expressa em termos dos movimentos dos eixos pela fórmula

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}.$$

Usando este valor de $\frac{d\vec{r}}{dt}$ obtemos a forma para a aceleração relativa a OXYZ

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \right) = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \vec{\omega} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

onde

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}).$$

Combinando as duas últimas equações, temos

$$\vec{a}(t) = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + 2\vec{\omega} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}).$$

Para corpos rígidos, temos

$$\begin{cases} i' \cdot i' = j' \cdot j' = k' \cdot k' = 1 \\ j' \cdot k' = k' \cdot i' = i' \cdot j' = 0 \end{cases}$$

Com respeito ao tempo temos

$$\begin{cases} \dot{i}' \cdot i' = \dot{j}' \cdot j' = \dot{k}' \cdot k' = 0 \\ \dot{j}' \cdot k' = -\dot{k}' \cdot j' \\ \dot{k}' \cdot i' = -\dot{i}' \cdot k' \\ \dot{i}' \cdot j' = -\dot{j}' \cdot i' \end{cases}.$$

Destas equações segue que

$$\begin{cases} \dot{i}' = \frac{di'}{dt} = \gamma j' - \beta k', \\ \dot{j}' = \frac{dj'}{dt} = -\gamma i' + \alpha k', \\ \dot{k}' = \frac{dk'}{dt} = \beta i' - \alpha j', \end{cases}$$

onde α, β, γ denotam a natureza do movimento em questão.

Considerando um ponto qualquer \vec{r}' do corpo em movimento, temos

$$\begin{aligned} (\alpha i' + \beta j' + \gamma k') \times \vec{r}' &= (\alpha i' + \beta j' + \gamma k') \times (x' i' + y' j' + z' k') \\ &= (\beta z' - \gamma y') i' + (\gamma x' - \alpha z') j' + (\alpha y' - \beta x') k' \\ &= x' (\gamma j' - \beta k') + y' (-\gamma i' + \alpha k') + z' (\beta i' - \alpha j') \\ &= x' \dot{i}' + y' \dot{j}' + z' \dot{k}' \\ &= x' \frac{di'}{dt} + y' \frac{dj'}{dt} + z' \frac{dk'}{dt} \\ &= \frac{d\vec{r}'}{dt} \end{aligned}$$

O movimento deste ponto arbitrário, e portanto, do corpo, pode ser representado pela velocidade angular

$$\vec{\omega} = \alpha i' + \beta j' + \gamma k'$$

sobre o ponto fixo O .

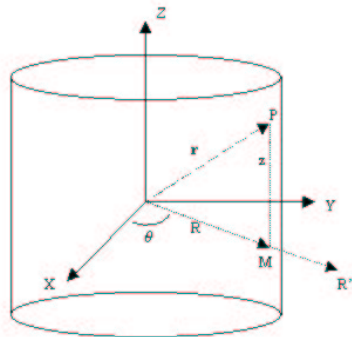
Como visto anteriormente, estabelecemos a seguinte forma para a aceleração

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + 2\vec{\omega} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}).$$

Se a origem move-se com aceleração a_0 , então a aceleração total de P é dada por

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + 2\vec{\omega} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}).$$

Vamos aplicar os resultados para encontrar as expressões para a velocidade e aceleração em termos de coordenadas cilíndricas e esféricas.



onde OX, OY, OZ são eixos fixos, perpendiculares entre si. PM é perpendicular a P no plano XOY , $OM=R$, $MP=z$. Então (R, θ, z) são as coordenadas do ponto.

Seja $OP = \vec{r}$ e P varia com t . Então,

$$\vec{r} = R\vec{R} + \theta\vec{\theta} + z\vec{z} = R\vec{R} + z\vec{z},$$

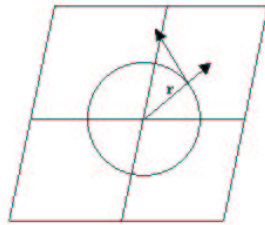
onde $\vec{R}, \vec{\theta}, \vec{z}$ representam vetores unitários na direção de R, θ e Z , respectivamente. Então, visto que P é especificado pelos vetores unitários e move-se com velocidade angular $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{z}$, a velocidade de P é

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \\ &= \dot{R}\vec{R} + \dot{z}\vec{z} + \dot{\theta}\vec{z} \wedge (R\vec{R} + z\vec{z}) \\ &= \dot{R}\vec{R} + \dot{z}\vec{z} + R\dot{\theta}\vec{\theta} \end{aligned}$$

A aceleração de P é dada por

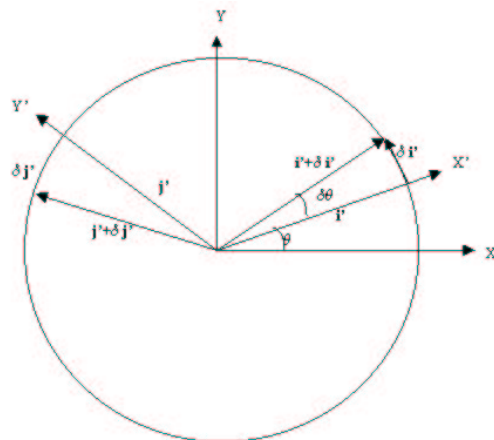
$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} \\ &= \ddot{R}\vec{R} + (R\ddot{\theta} + \dot{R}\dot{\theta})\vec{\theta} + \ddot{z}\vec{z} + \dot{\theta}\vec{z} \wedge (\dot{R}\vec{R} + R\dot{\theta}\vec{\theta} + \dot{z}\vec{z}) \\ &= (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\vec{R} + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\vec{\theta} + \ddot{z}\vec{z}. \end{aligned}$$

Suponha que possamos restringir o que foi feito para o plano



$$(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2, R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})$$

Considere um sistema de eixos retangulares $OX'Y'$ rotando sobre O com $\vec{\omega}(= \dot{\theta})$ relativa ao sistema fixo OXY , $\vec{\omega}$ é medida na direção de uma rotação de OX' para OY' . Assim, os vetores unitários \vec{i}' , \vec{j}' , seguem a direção das coordenadas. Traçando um círculo de raio unitário, $\delta\vec{i}'$ e $\delta\vec{j}'$ são paralelos a \vec{j}' e \vec{i}' , respectivamente. A magnitude de ambos é $\delta\theta$ (ângulo sobre o qual \vec{i}' e \vec{j}' estão sendo rotados).



onde, podemos observar que

$$\delta \vec{i}' = \delta \theta \vec{j}', \quad \delta \vec{j}' = -\delta \theta \vec{i}',$$

de onde segue que

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \dot{\theta} \vec{j}', \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = -\dot{\theta} \vec{i}'.$$

Existem duas aplicações importantes para estas fórmulas:

Primeira Aplicação

Seja P um ponto movendo-se no plano OXY e OP escolhido como um eixo OX' . OX' é a direção radial e OY' é a direção transversal. Se \vec{r} é o vetor posição de P e as coordenadas polares de P são r, θ , então

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\vec{i}', \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\vec{i}' + r\dot{\vec{i}}' = \dot{r}\vec{i}' + r\dot{\theta}\vec{j}' \end{aligned}$$

As componentes radial e transversal da velocidade de P são dadas por

$$\dot{r}, \quad r\dot{\theta}.$$

A velocidade escalar de P na curva é, então,

$$\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= (\ddot{r}\vec{i}' + \dot{r}\dot{\vec{i}}') + (\dot{r}\dot{\theta}\vec{j}' + r\ddot{\theta}\vec{j}' + r\dot{\theta}\dot{\vec{j}}') \\ &= (\ddot{r} + \dot{r}\dot{\theta}^2)\vec{i}' + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{j}'. \end{aligned}$$

Assim, as componentes radial e transversal da aceleração ficam

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}.$$

A componente transversal da aceleração pode também ser escrita na forma

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}).$$

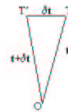
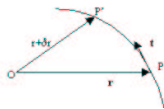
Segunda Aplicação

Se P é um ponto movendo-se num plano, podemos escolher OX' na direção tangente ao caminho de P. Se esta tangente faz um ângulo ψ com o eixo fixo OX , então OX' gira com uma velocidade escalar angular $\dot{\psi}$ e

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \dot{\psi} \vec{j}'$$

onde \vec{j}' e OY' são prolongamentos na direção normal a P. Se \vec{v} é a velocidade escalar do ponto P na curva, então a velocidade de P é $v\vec{i}'$ e sua aceleração é $\dot{v}\vec{i}' + v\dot{\psi}\vec{j}'$, ou

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{dv}{dt} \vec{i}' + v\dot{\psi} \vec{j}' \\ &= \dot{v}\vec{i}' + v\dot{\psi} \vec{j}' \\ &= \dot{v}\vec{i}' + \frac{v^2}{\rho} \vec{j}' \end{aligned}$$



O triângulo OTT' é isósceles, OT e OT' tem comprimentos unitários. Seja $\delta\psi$ o ângulo $T'OT$. Como $\delta\vec{r} \rightarrow 0$, $P' \rightarrow P$, assim como $T' \rightarrow T$ e a direção $\delta\vec{r} (\equiv \vec{T}\vec{T}')$ tendem à perpendicular à \vec{i}' . Suponha que \vec{n} denota o vetor unitário nesta direção limite.

Agora, $|\delta\vec{r}| = TT' = 2\text{sen}(\delta\psi/2)$, e assim

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \lim \left| \frac{\delta\vec{r}}{\delta s} \right| = \lim \left[\frac{\text{sen}(\delta\psi/2)}{\delta s/2} \right] = \lim \left(\frac{\delta\psi}{\delta s} \right) = \frac{d\psi}{ds}.$$

Então, o raio de curvatura é dado por

$$\rho = \frac{ds}{d\psi},$$

onde ds é o elemento do arco, logo, podemos escrever

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} v.$$

A componente normal da aceleração, fica

$$\frac{v^2}{\rho}.$$

Um ponto cujo movimento é um círculo com velocidade escalar angular constante, portanto, tem aceleração normal constante.

Exemplo 1.1.3. *Uma partícula é obrigada a mover-se ao longo de uma hélice circular tal que suas coordenadas em relação ao tempo são $(a \cos\theta, a \sin\theta, a\theta \tan\alpha)$, onde a e α são constantes e $0 < \alpha < \pi/2$. A velocidade escalar na curva decresce linearmente com $v \rightarrow 0$ em $t = 0$ e para V em $t = T$. Encontre a aceleração em algum tempo $t < T$, o movimento acontece no sentido em que θ aumenta, partindo do ponto $(a, 0, 0)$.*

No tempo $t(0 < t < T)$, o vetor posição é dado por

$$\vec{r} = a(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j} + \theta \tan\alpha \vec{k});$$

$$\therefore \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = a \dot{\theta}(-\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j} + \tan\alpha \vec{k}).$$

Então a magnitude de $(-\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j} + \tan\alpha \vec{k})$ é $\sec \alpha$,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (a \dot{\theta} \sec \alpha)(-\sin\theta \cos \alpha \vec{i} + \cos\theta \sin \alpha \vec{j} + \sec \alpha \vec{k}),$$

i. é, $(Vt/T)\vec{t} = a \dot{\theta} \sec \alpha(-\sin\theta \cos \alpha \vec{i} + \cos\theta \sin \alpha \vec{j} + \sec \alpha \vec{k})$, para $0 < t < T$.

Logo,

$$\frac{Vt}{T} = a \dot{\theta} \sec \alpha,$$

Então para algum tempo $t(0 < t < T)$, a partícula se move tendo componentes V/T ao longo da tangente e $xv^2 = V^2 t^2 \cos^2 \alpha / a T^2$ ao longo da normal principal.

Exemplo 1.1.4. *Vamos pensar, agora, em um círculo*

$$R = b \text{ (constante)} \iff \dot{R} = 0 \Rightarrow \ddot{R} = 0.$$

Portanto,

$$(b\dot{\theta}^2, \ddot{\theta})$$

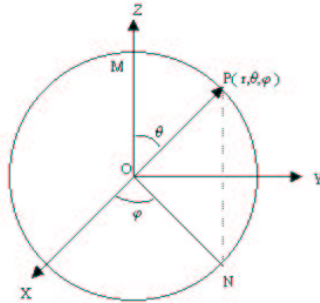
$$\dot{\theta} = \omega \text{ (constante)} \iff \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow (-a\omega^2, 0)$$

$$\vec{v} = b\omega$$

Logo,

$$\left(-\frac{V^2}{b}, 0\right)$$

Partindo para coordenadas esféricas



OX , OY e OZ são eixos fixos e P é variável. $OP = r$, o ângulo $POZ = \theta$. O círculo no plano POZ tem centro O e raio OP , o ângulo $NOX = \varphi$. Então, (R, θ, φ) são as coordenadas esféricas do ponto P .

sejam \vec{r} , $\vec{\theta}$, $\vec{\phi}$ os vetores unitários nas direções r , θ e φ , respectivamente. Pela regra da mão direita: $\vec{r} \wedge \vec{\theta} = \vec{\phi}$, ...

A velocidade angular, fica

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\theta} \vec{\phi} + \dot{\varphi} \vec{k} \\ &= \dot{\theta} \vec{\phi} + \dot{\varphi} (\cos\theta \vec{r} - \sin\theta \vec{\theta}) \\ &= \dot{\varphi} \cos\theta \vec{r} - \dot{\varphi} \sin\theta \vec{\theta} + \dot{\theta} \vec{\phi}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \\
&= \dot{r} \vec{r} + (\dot{\varphi} \cos\theta \vec{r} - \dot{\varphi} \sin\theta \vec{\theta} + \dot{\theta} \vec{\phi}) \wedge \vec{r} \\
&= \dot{r} \vec{r} + r\dot{\theta} \vec{\theta} + r\dot{\varphi} \sin\theta \vec{\phi}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta)\vec{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta)\vec{\theta} + \left(\frac{d}{dt}(r\dot{\varphi} \sin\theta) + r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos\theta + \dot{r}\dot{\varphi} \sin\theta\right)\vec{\phi}$$

que é a fórmula para a aceleração em coordenadas esféricas.

1.2 Forças

Suponhamos que existe uma força \vec{F} . Se aplicarmos esta força em uma determinada trajetória, isto produzirá trabalho.

Infinitesimalmente, o trabalho é

$$\vec{F} \cdot \Delta r = |\vec{F}| |\Delta r| \cos\theta \quad \text{com } \theta \text{ o ângulo entre } \vec{F} \text{ e } \Delta r$$

sabendo que sobre determinadas condições analíticas

$$\begin{aligned}
\exists \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} &= \int_{r_0}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
\int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt &= \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}
\end{aligned}$$

Exemplo 1.2.1. Onde C é um caminho dinâmico ligando os pontos $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ e $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$

Definição 1.2.1 (Campo conservativo). um campo é dito ser conservativo quando seu trabalho independe do caminho.

Podemos fixar o ponto r_1 e varia $\vec{r}_0 = \vec{r}$ em

$$V(r) = - \int_{r_1}^r \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Se variarmos apenas uma das variáveis, por exemplo, $\Delta y = \Delta z = 0$, isto resulta

$$\begin{aligned}
\Delta V &= V(P + \Delta P) - V(P) \\
&= -\vec{F} \cdot \Delta \vec{r} + o(\Delta \vec{r}) \\
&= -\vec{F} \cdot \Delta x + o(\Delta \vec{r}) \\
-\nabla V &= \vec{F}
\end{aligned}$$

1.2.1 Leis de Newton

Em mecânica clássica supomos que sabemos medir distâncias em relação ao tempo, portanto podemos calcular velocidades e acelerações.

N1 - Na ausência de forças, uma partícula movimenta-se com velocidade constante. Em um sistema Euclidiano, isto significa que o deslocamento está em linha reta.

N2 - O movimento de uma partícula em relação a uma força possui aceleração proporcional à força, no entanto, o fator de proporcionalidade é independente da força e do tempo.

Exemplo 1.2.2. *Se aumentamos o tamanho de uma bola duas vezes, isto implica que sua aceleração cai pela metade.*

N3 - Lei da ação e reação: quando duas partículas interagem entre si, as duas forças que agem nas partículas são iguais mas em sentido oposto direcionadas à linha entre as duas partículas.

Por N2 observamos que a aceleração é proporcional à força, portanto é um vetor quantitativo.

Suponha que há interação entre duas partículas S e P. suponha, também, que as acelerações destas duas partículas pode ser medidas e são $\ddot{\vec{r}}_p$ e $\ddot{\vec{r}}_s$, respectivamente. Por N3 a força que age sobre S deve ser $-\ddot{\vec{r}}_s$. Então, a força produz uma aceleração $\ddot{\vec{r}}_p$, e segue de N2 que

$$-\ddot{\vec{r}}_s = m_p \ddot{\vec{r}}_p$$

onde m_p é o fator de proporcionalidade peculiar. Este fator é chamado de massa de p e é definido pela razão

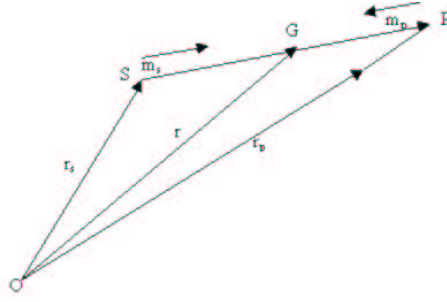
$$m_p = -\frac{\ddot{\vec{r}}_s}{\ddot{\vec{r}}_p}$$

1.2.2 Leis de Kepler

K1 - Os planetas descrevem elipses em relação ao Sol, tendo o Sol como foco.

K2 - Um raio-vetor do Sol à um planeta varre áreas iguais em tempos iguais.

K3 - Os quadrados dos períodos dos planetas são proporcionais aos cubos de suas distâncias médias ao Sol.



Isaac Newton unificou estas três leis através de sua Lei da Gravitação a qual diz que toda partícula do universo atrai todas as outras partículas com força proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado de suas distâncias. Então, para duas partículas de massas m_1 e m_2 distantes \vec{r} uma da outra, a força de atração entre elas é $\gamma m_1 m_2 / r^2$ onde γ é a constante gravitacional (algumas vezes denotada por G). G é o centróide do sistema tal que

$$\vec{OG} \equiv \vec{r} = \frac{m_s \vec{r}_s + m_p \vec{r}_p}{m_s + m_p}.$$

Pela Lei da Gravitação de Newton, S e P são sujeitos às forças $(\gamma m_s m_p / r^2) \vec{r}$ e $(\gamma m_s m_p / r^2) (-\vec{r})$, respectivamente. Então, suas equações do movimento são:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\gamma m_s m_p}{r^2}\right) \vec{r} &= m_s \ddot{\vec{r}}_s, \\ \left(\frac{\gamma m_s m_p}{r^2}\right) (-\vec{r}) &= m_p \ddot{\vec{r}}_p. \end{aligned}$$

Somando, temos

$$m_s \ddot{\vec{r}}_s + m_p \ddot{\vec{r}}_p = 0,$$

ou $\ddot{\vec{r}} = 0$, isto é, o centróide de um sistema com dois corpos não tem aceleração.

Observando

$$\begin{aligned} \left(\frac{\gamma m_s m_p}{r^2}\right) \vec{r} &= m_s \ddot{\vec{r}}_s, \\ \left(\frac{\gamma m_s m_p}{r^2}\right) (-\vec{r}) &= m_p \ddot{\vec{r}}_p. \end{aligned}$$

temos,

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_p - \ddot{\vec{r}}_s = -\frac{\gamma(m_p + m_s)}{r^2} \vec{r}.$$

Em seção 1.4.1 vamos estabelecer que o planeta é sujeito a uma força por unidade de massa de $-\mu \vec{r} / r^2$, onde $\mu = \gamma(m_p + m_s)$ e assim relativo a S descreve uma órbita cônica com S como foco.

1.2.3 Movimento Planetário

Para algum planeta que move-se tendo o Sol como origem

$$r^2 \dot{\theta} = cte = h. \quad (1.2)$$

A equação da órbita do planeta, tendo o sol como origem, em termos de coordenadas polares r, θ é

$$\ell = r(1 - e \cos \theta), \quad (1.3)$$

onde "e" é a excentricidade da elipse, e podemos avaliar a força central como segue. Das duas últimas equações, temos:

$$\begin{aligned} e \cos \theta &= 1 - \frac{\ell}{r}, \\ -e \sin \theta \dot{\theta} &= -\frac{eh}{r^2} \sin \theta = \frac{\ell \dot{r}}{r^2}. \end{aligned}$$

onde ℓ = semi-latus rectum. Então,

$$\begin{aligned} e \sin \theta &= -\frac{\ell \dot{r}}{h}, \\ e \cos \theta \dot{\theta} &= e \cos \theta \frac{h}{r^2} = \left(1 - \frac{\ell}{r}\right) \frac{h}{r^2} = -\frac{\ell}{h} \ddot{r}, \end{aligned}$$

e a componente radial da aceleração é

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{h^2}{\ell} \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{\ell}{r^3} \right) - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{h^2}{\ell r^2}.$$

Segue que a força de atração dos planetas de massa m ao redor do Sol é

$$\frac{m\mu}{r^2}$$

onde $\mu = h^2/\ell$.

Se temos dois planetas

$$\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3},$$

onde τ_1, τ_2 são os períodos de revolução dos dois planetas sobre o sol e a_1, a_2 são os comprimentos dos semi-eixos maiores de seus caminhos.

Agora, com notação usual, a área de uma elipse é πab , e $1/2h$ é a velocidade de área do raio externo da área da elipse. Conseqüentemente, o período τ é dado por

$$\frac{2\pi ab}{h}.$$

Então,

$$\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} = \frac{\frac{a_1^2 b_1^2}{h_1^2}}{\frac{a_2^2 b_2^2}{h_2^2}}.$$

Então, $b^2 = a^2(1 - e^2) = al$, de onde segue que

$$\frac{h_1^2}{h_2^2} = \frac{\frac{b_2^2}{a_2}}{\frac{b_1^2}{a_1}} = \frac{\ell_2}{\ell_1}.$$

Então,

$$\frac{h_2^2}{\ell_2} = \frac{h_1^2}{\ell_1}.$$

Em outras palavras, o fator μ é o mesmo para todos os planetas no sistema solar.

Então a força entre o Sol e um planeta é proporcional à massa do planeta, disto é natural supor que também é proporcional à m_s do Sol. Concluimos, portanto, que esta força pode ser expressa por

$$\gamma \frac{m_s m_p}{r^2},$$

onde γ é um fator constante dependendo da unidade de massa e do comprimento, m_s é a massa do Sol, m_p é a massa do planeta e r é a distancia entre o Sol e o planeta. vamos negligenciar todos os efeitos dos outros planetas sobre eles, as acelerações do Sol e do planeta são

$$\gamma \frac{m_p}{r^2} \text{ e } \gamma \frac{m_s}{r^2}.$$

Se os vetores posição do Sol e do planeta são, respectivamente, \vec{r}_s e \vec{r}_p , então o vetor posição \vec{r} do planeta relativo ao Sol como origem, é $\vec{r}_p - \vec{r}_s$, e que as equações do movimento do planeta e do Sol são, respectivamente

$$m_p \ddot{\vec{r}}_p = \frac{\gamma m_p m_s (\vec{r}_s - \vec{r}_p)}{r^3},$$

$$m_s \ddot{\vec{r}}_s = \frac{\gamma m_p m_s (\vec{r}_p - \vec{r}_s)}{r^3}.$$

Destas duas equações, obtemos a relação

$$m_p \ddot{\vec{r}}_p + m_s \ddot{\vec{r}}_s = 0$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_p - \ddot{\vec{r}}_s = -\frac{\gamma(m_s + m_p)(\vec{r}_p - \vec{r}_s)}{r^3} = -\frac{\gamma(m_s + m_p)}{r^3} \vec{r}.$$

Da primeira delas, concluímos que

$$\frac{m_p \vec{r}_p + m_s \vec{r}_s}{m_p + m_s}.$$

Da segunda deduzimos que

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r},$$

onde $\mu = \gamma(m_p + m_s)$, indicando que o planeta move-se ao redor do Sol com aceleração central igual ao inverso do quadrado.

K.2 é uma dedução imediata do fato de que a aceleração $\ddot{\vec{r}}$ do planeta relativa ao Sol é unitária. A velocidade de área é, de fato, $1/2h$. Então, a área da elipse é πab , com a notação usual, segue que o período τ do movimento elíptico é dado por

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{h^2} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{\mu \ell} = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu}.$$

Então, para dois planetas na órbita do mesmo Sol, temos

$$\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} = \frac{a_1^3/\mu_1}{a_2^3/\mu_2}.$$

Se μ_1 e μ_2 são iguais esta equação é mais precisa em K.3, mas como vimos

$$\mu_1 = \gamma(m_{p_1} + m_s), \quad \mu_2 = \gamma(m_{p_2} + m_s).$$

Se assumimos que m_{p_1} e m_{p_2} são ambos relativamente pequenos com respeito a m_s , obtemos K.3.

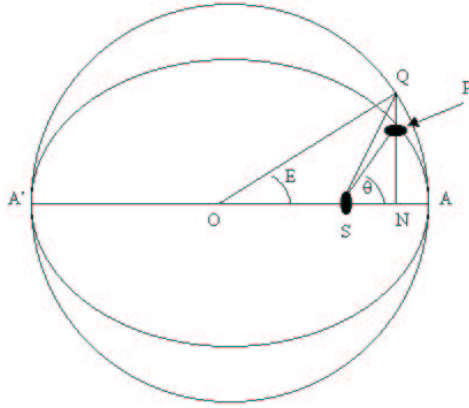
Mais precisamente, temos

$$\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} = \frac{a_1^3/(m_{p_1} + m_s)}{a_2^3/(m_{p_2} + m_s)}.$$

1.2.4 Equação de Kepler no tempo

Em uma órbita elíptica do planeta, o ponto A de menor aproximação do Sol é chamado de periélio, e o ponto A' mais distante do Sol é chamado afélio. A linha AA' é portanto, o eixo maior da elipse e de comprimento $2a$. Em AA' como diâmetro descreve um círculo

auxiliar de raio a . Seja P a posição do planeta e seja AA' a perpendicular sobre P que encontra um círculo auxiliar em Q e AA' em N . Mais, seja O o centro da elipse e suponha que $t = 0$ quando o planeta está em A .



agora, fazemos as seguintes definições:

A Anomalia Real no tempo $t = \angle ASP = \theta$

A Anomalia Excêntrica no tempo $t = \angle ADQ = E$

A Anomalia Média no tempo $t = nt$

onde $n = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\mu/a^3}$.

A equação de Kepler no tempo é dada pela relação entre a anomalia média nt e a anomalia excêntrica E . Disto obtemos o seguinte significado.

a velocidade de área do planeta é

$$\frac{\pi ab}{\tau} = \frac{1}{2} nab.$$

Então, se esta velocidade é constante, temos

$$\begin{aligned} t &= \frac{\text{area} ASP}{\frac{1}{2} nab} = \frac{2}{nab} \frac{b}{a} \text{area} ASQ \\ &= \frac{2}{na^2} (\text{area} AOQ - \text{area} SOQ) \\ &= \frac{2}{na^2} \left(\frac{a^2 E}{2} - \frac{a^2 e \sin E}{2} \right), \end{aligned}$$

portanto, obtemos a seguinte relação

$$nt = E - e \sin E.$$

Para obter E em termos de θ usamos o fato de que

$$a(1 - e^2) = \ell = r(1 + e \cos \theta).$$

Então,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{(1 + e \cos \theta)}.$$

Portanto,

$$\sin E = \frac{\left(\frac{a}{b}PN\right)}{a} = \frac{e \sin \theta}{a \sqrt{1 - e^2}} = \frac{\sqrt{(1 - e^2)} \sin \theta}{1 + e \cos \theta}.$$

1.2.5 Forças Centrais

Se uma partícula for sujeita a uma força que é sempre dirigida na direção de ou contrariamente a um ponto fixo, esta força é chamada de força central. Se o ponto fixo é escolhido como origem, então a força central deve ser paralela ao vetor posição \vec{r} da partícula. Se uma partícula de massa m é sujeita a uma força de atração gravitacional de outra partícula de massa M e se esta partícula M for escolhida como a origem do sistema de coordenadas, então a partícula é sujeita a uma força central \vec{F} de magnitude

$$\gamma \frac{Mm}{r^2},$$

e como esta força é paralela à \vec{r} , podemos escrever

$$\vec{F} = -\frac{m\mu}{r^3} \vec{r},$$

onde $\mu = \gamma m$.

Similarmente,

$$\vec{F} = -mk\vec{r}$$

representa a força de uma partícula no interior de uma massa esférica.

Somente um tipo de força é de nosso interesse

$$\vec{F} = m\phi(r)\vec{r}.$$

O caso mais importante de forças centrais é aquele onde a magnitude da força depende somente da distância r . Denotando a força por $f(r)$, a equação diferencial da órbita é

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{f(r)}{h^2u^2}.$$

Integrando, obtemos

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = c - \frac{2}{h^2} \int f(r)dr - u^2,$$

e integrando novamente,

$$\theta = \int^r \left\{ c - \frac{2}{h^2} \int^r f(r) dr - \frac{1}{r^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \frac{dr}{r^2},$$

que é a equação da órbita em coordenadas polares. Quando r é encontrado em termos de θ , o tempo é dado pela integral

$$t = \frac{1}{h} \int^{\theta} r^2 d\theta + c.$$

Estamos interessados no caso em que $f(r) = r^n$. Seguimos aqui a discussão do livro de Whittaker [?]. Então,

$$\theta = \int (a + bu^2 + cu^{-n-1})^{-\frac{1}{2}} du.$$

onde a, b, c são constantes arbitrárias, exceto no caso que $n = -1$, quando um logaritmo substitui u^{-n-1} .

Se esta equação for resolvida em termos de funções trigonométricas o polinômio no radical no integrando não pode ter termos de grau maior que 2. Isto dá $-n-1 = 0, 1$ ou 2 , e conseqüentemente $n = -1, -2$ ou -3 . Não podemos usar $n = -1$. Podemos considerar também $n = 1$ (nova variável: u^2).

Resolução de Funções Elípticas

Para a resolução em termos de funções elípticas a irracionalidade a ser integrada deveria ser de grau 3 ou 4. Por tanto:

$$\begin{aligned} r &= 0, -4, -5 & u &\text{variável independente} \\ n &= 3, 5, -7 & u^2 &\text{variável independente.} \end{aligned}$$

Para forças centrais, $f(r) = r^n$, podemos resolver em termos de funções elípticas para $n = 5, 3, 1, 0, -2, -3, -4, -5, -7$.

Vamos supor que há uma força agindo sobre um corpo de massa m e que $v = \dot{s}$, assim como $a = \frac{1}{2}m\dot{s}^2$ e seu trabalho é dado por $-\int_{s_0}^s f(s)ds$.

Observando que a energia cinética é dada por $T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$. Analisando $dT/dt = m\ddot{r} \cdot \dot{r}$ onde $F = m\ddot{r}$. Assim,

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Integrando isto, temos

$$\int_{t_0}^t \frac{dT}{dt} dt = T(t) - T(0) = \int_{t_0}^t \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_0}^t \vec{F} d\vec{r} = -V$$

que é a energia potencial. O que significa que $T + V = cte \Rightarrow$ conservação da energia. Portanto, para movimentos centrais

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2 = \int_{s_0}^s f(r)dr + c$$

1.3 Dinâmica de Partículas

1.3.1 Problemas em Duas e Três Dimensões

Vamos estender as Leis de Newton do movimento para duas e três dimensões para alguns casos de dinâmica de partículas.

Primeiro suponha que a partícula tem massa m constante e está situada no ponto $P(x, y, z)$ em algum tempo t e que $\overline{OP} \equiv \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, em notação usual. Seja $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ a resultante das forças que agem na partícula. Então, pela segunda lei de Newton para o movimento,

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\ddot{\vec{r}} \\ X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} &= m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k})\end{aligned}$$

Portanto, $X = m\ddot{x}$, $Y = m\ddot{y}$, $Z = m\ddot{z}$.

1.3.2 Movimento de Projéteis sob Ação da Gravidade

Suponha que uma partícula seja projetada de um ponto O com velocidade V em determinada direção fazendo um ângulo de elevação α com a direção horizontal \overline{OX} . \overline{OY} é o eixo perpendicular a O . Seja $P(x, y)$ a posição da partícula no tempo t após a projeção. Então, desconsiderando a resistência do ar, a partícula está sujeita à uma aceleração uniforme g na direção para baixo no eixo vertical e assim as equações do movimento são

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g,$$

sujeitas às condições iniciais $\dot{x} = V \cos \alpha$, $\dot{y} = V \sin \alpha$; $x = 0$, $y = 0$. Resolvendo estas equações

$$x = Vt \cos \alpha, \quad y = Vt \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2,$$

de onde, eliminando t ,

$$y = x \tan \alpha - \left(\frac{gx^2}{2V^2 \cos^2 \alpha} \right).$$

A equação acima mostra que a trajetória é parabólica. Colocando $y = 0$ e fazendo $x \neq 0$ nesta equação, obtemos

$$x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2V^2 \cos^2 \alpha} = 0 \tag{1.4}$$

o que nos fornece o alcance máximo na horizontal, dado por

$$x = \frac{2V^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{V^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Dados uma velocidade e um alcance existem dois possíveis valores para o ângulo de elevação α , α e $(1/2\pi - \alpha)$. O alcance assume seus valores de máximo $\frac{V^2}{g}$ para $\alpha = \frac{1}{4}\pi$.

Completando quadrados da expressão quadrática em x , (3.18) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left(x - \frac{V^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g}\right)^2 = \left(-\frac{2V^2 \cos^2 \alpha}{g}\right) \left(y - \frac{V^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}\right)$$

mostrando que a parábola tem vértice no ponto

$$\left(\frac{V^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g}, \frac{V^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}\right)$$

e "latus rectum" de comprimento $(V^2 \cos^2 \alpha)/(2g)$ acima do vértice, i.é, $V^2/2g$ acima da linha OX . Assim, a equação da diretriz é $y = V^2/2g$.

Em P a velocidade v do projétil é dada por

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = V^2 \cos^2 \alpha + (V \operatorname{sen} \alpha - gt)^2 = V^2 - 2Vg \operatorname{sen} \alpha \cdot t + g^2 t^2 = V^2 - 2gy,$$

$$\therefore \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m(V^2 - 2gy) = \frac{1}{2}mV^2 - mgy = mgh^* - mgy$$

onde $h^* = V^2/2g$. Assim, mostramos que em algum ponto P do percurso da trajetória parabólica, a E.C. da partícula é a mesma que seria dada por ela em movimento de queda livre sob ação da gravidade naquele ponto na diretriz verticalmente acima de P.

Exemplo 1.3.1. *Obtenha expressões para as componentes tangencial e normal da aceleração de um ponto movendo-se ao longo de um caminho plano.*

Mostre que no movimento livre de uma partícula P sem resistência, projetada sob ação da gravidade, a velocidade em algum instante é a mesma velocidade se a queda fosse da altura SP, onde S é foco de um caminho parabólico.

Uma partícula de massa m move-se sob ação da gravidade em um meio com resistência, e S é o foco da parábola que a partícula descreveria se em algum instante a resistência cessasse. Mostre que S move-se com uma velocidade que em algum momento está ao longo de SP e de magnitude (Rv/mg) , onde v é a velocidade de P, e R a resistência.

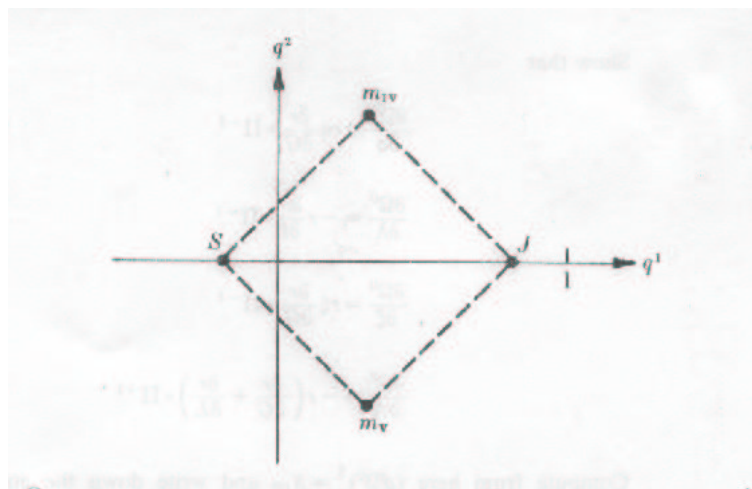
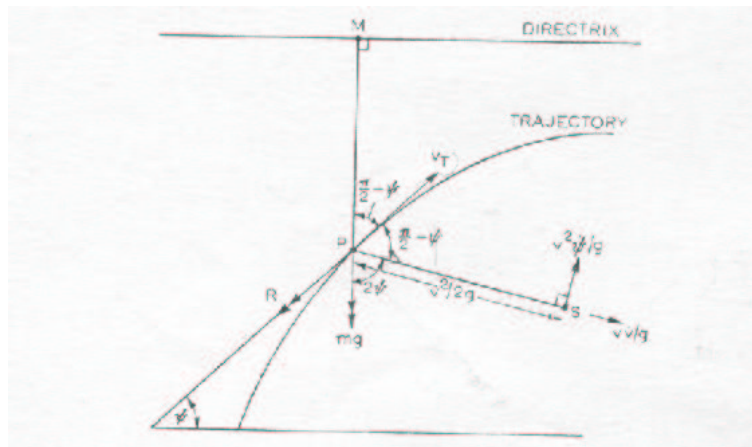
(i) Foi mostrado na primeira seção que uma partícula movendo-se com velocidade v ao longo de um plano curvo tem componentes de aceleração tangencialmente \dot{v} na direção de decaimento do arco e componente de aceleração normal v^2/ρ para dentro do centro de curvatura.

(ii) Pela propriedade do foco-diretriz SP é igual à profundidade de P abaixo da diretriz.

(iii)

Na figura acima, S é o foco da trajetória parabólica que poderia ser descrita por $R = 0$, PM é a perpendicular a P na diretriz da parábola. Então, se v é a velocidade da partícula em P, $PS = v^2/2g$.

A tangente à trajetória atual (para a qual $R \neq 0$) faz um ângulo ψ com a horizontal em P. Como PT coincide instantaneamente com a parábola em P, se particionarmos ao meio



o $\angle MPS$ e assim $\angle MPS = \pi - 2\psi$ e PS faz um ângulo 2ψ com direção vertical. Disto segue que as componentes de velocidade de S relativas a P ao longo de \overline{PS} e na direção perpendicular a PS e no sentido crescente de 2ψ são respectivamente

$$\frac{d v^2}{dt 2g} = v \frac{\dot{v}}{g}; \quad \frac{v^2}{2g} \times (2\dot{\psi}) = \frac{v^2 \dot{\psi}}{g}.$$

Como P tem velocidade tangencial v , as componentes de velocidade na direção \overline{PS} e com os ângulos retos no sentido crescente de 2ψ são V_1, V_2 , onde

$$\begin{cases} V_1 = v \frac{\dot{v}}{g} + v \sin(\psi) \rightarrow \sin(\psi) = \frac{V_1 - v \frac{\dot{v}}{g}}{v} = \frac{V_1}{v} - \frac{\dot{v}}{g} \\ V_2 = \frac{v^2 \dot{\psi}}{g} + v \cos(\psi). \end{cases} \quad (1.5)$$

Para o movimento da partícula nas direções normal e axial temos as equações

$$\begin{cases} \text{componente normal} \rightarrow m\dot{v} = -R - mg \sin \psi, & \sin \psi = -\frac{m\dot{v} + R}{mg} \\ \text{componente axial} \rightarrow m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos(\psi). \end{cases} \quad (1.6)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{v} - \frac{\dot{v}}{g} &= -\frac{m\dot{v} + R}{mg} \\ V_1 &= -\frac{vR}{mg} \end{aligned}$$

Enquanto,

$$\begin{cases} V_2 = \frac{v^2 \dot{\psi}}{g} + v \cos \psi \rightarrow \cos \psi = \frac{V_2}{v} - \frac{v \dot{\psi}}{g} \quad \text{com} \\ mg \cos \psi = \frac{mv^2}{\rho} \end{cases} \quad (1.7)$$

e concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{v} - \frac{v \dot{\psi}}{g} &= \frac{v^2}{\rho g} \\ V_2 &= \frac{v^3}{g\rho} + \frac{v^2 \dot{\psi}}{g} \end{aligned}$$

Então o movimento de S é ao longo de SP e a velocidade é $-Rv/mg$. A equação

$$y = x \tan(\alpha) - \left(\frac{gx^2}{2V^2 \cos^2(\alpha)} \right) \quad (1.8)$$

pode ser reescrita de forma alternativa

$$\left(\frac{gx^2}{2V^2}\right)\tan(\alpha) - x \tan(\alpha) + \left(\frac{gx^2}{2V^2}\right) + y = 0. \quad (1.9)$$

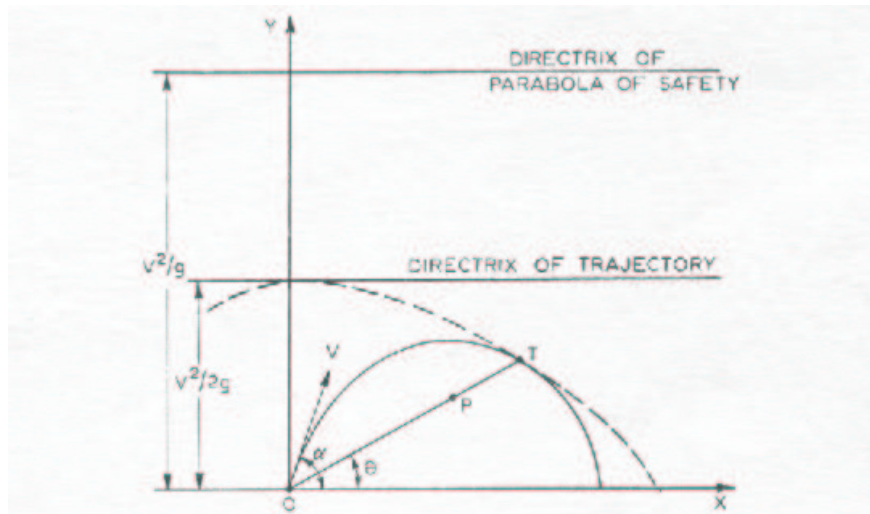
Agora, supondo que V é fixo: então como α varia, a família de trajetórias é gerada no plano (x,y) , cada uma passando por $(0,0)$. Então (1.9) é a equação quadrática na $\tan \alpha$, a curva envoltório desta família é obtida equacionando o discriminante da equação quadrática e igualando a zero, obtendo portanto, se $x \neq 0$,

$$x^2 - 4\frac{g^2x^4}{V^4} - 2\frac{g^2yx^2}{V^2} = 0 \implies x^2\left(1 - \frac{g^2x^2}{V^4} - \frac{2gy}{V^2}\right) = 0$$

$$x^2 = V^2\left(\frac{V^2}{g^2} - \frac{2y}{g}\right) = \frac{2V^2}{g}\left(\frac{V^2}{2g} - y\right) \quad (1.10)$$

(1.10) é uma parábola e é conhecida como parábola de segurança. Quando esta parábola é rotada sobre o eixo y para formar um parabolóide de revolução, isto determina uma região do espaço acessível da O para uma dada velocidade de projeção V .

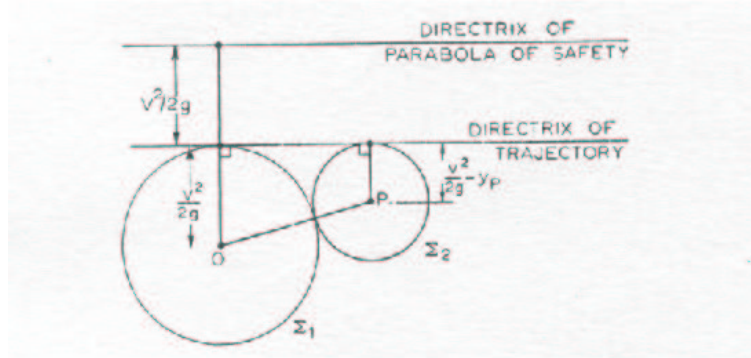
(1.10) mostra que o vértice da parábola de segurança é $(0, V^2/2g)$. Pode-se facilmente verificar que o foco é $(0,0)$ e que a diretriz é de altura máxima V^2/g acima do ponto de projeção O . Toda trajetória, para dado V , toca a parábola de segurança em algum ponto T . A conexão entre a duas curvas é mostrada na figura seguinte



Agora, provamos que se T é algum ponto na linha OT , o maior valor de OP para uma dada velocidade de projeção V é obtido quando $P \equiv T$, T sendo a intersecção da linha com a parábola de segurança.

O foco S da trajetória em um círculo Σ_1 tendo centro O e raio $V^2/2g$, assim $V^2/2g$ é a distância de O à diretriz. Como P é distante $\left(\frac{V^2}{2g} - y_p\right)$ da diretriz, S está no círculo Σ_2

centro P e raio $\left(\frac{V^2}{2g} - y_p\right)$. Os círculos Σ_1, Σ_2 se interceptam em um par de pontos distintos e reais, como mostra a figura 4.4, um par de pontos imaginários, ou num par coincidente. Quando a intersecção não é real, P não pode ser obtido da origem com a velocidade que foi dada. Quando são duas intersecções, P pode ser obtido por dois caminhos parabólicos. quando os círculos se tocam, como na figura 4.5, a distância OP é um máximo.



Na figura acima, $OP = \frac{V^2}{2g} + \frac{V^2}{2g} - y_p = \frac{V^2}{g} - y_p$. Esta é a distância de P à diretriz da parábola de segurança. Mas O é foco da parábola de segurança e assim a distância OP é um máximo quando $P \equiv T$.

A distância de T à diretriz da parábola de segurança é igual a OT. Assim,

$$\frac{V^2}{g} - OT \sin \theta = OT$$

$$OT = \frac{V^2}{g(1 + \sin \theta)}.$$

Isto fornece a distância máxima em um plano inclinado com ângulo fixo θ com a horizontal quando a velocidade V de projeção é prescrita.

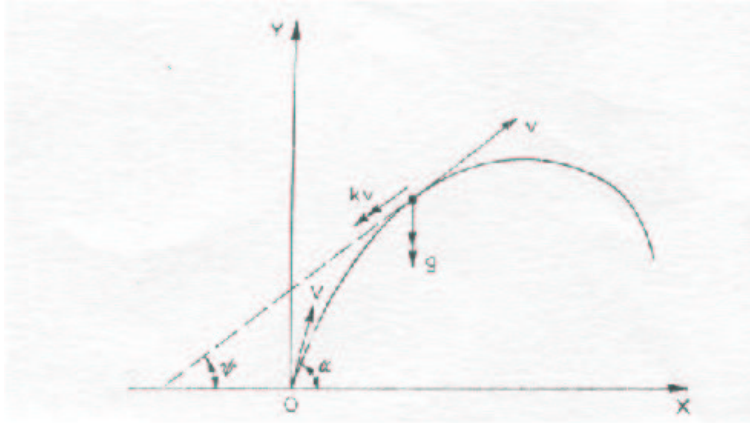
Exemplo 1.3.2. Movimento de projéteis num meio com resistência. *Uma partícula de massa unitária com velocidade V e inclinação α num meio cuja resistência é $k \times (\text{vel.})$. Mostre que se k é pequeno a equação do caminho é aproximadamente*

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2V^2 \cos^2 \alpha} - \frac{kx^3}{3V^3 \cos^3 \alpha}.$$

A partícula é projetada no mesmo meio de um ponto no plano inclinado com ângulo β com a horizontal. Prove que o alcance máximo é aproximadamente

$$\frac{2V^2 \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha}{g \cdot \cos^2 \beta} \left(1 - \frac{4kV \sin(\alpha - \beta)}{3g \cos \beta}\right),$$

onde V é a velocidade de projeção e α a elevação.



- (i) A equação da trajetória a figura acima mostra que a partícula em $P(x, y)$ no tempo t , as forças agindo nela é g para abaixo e kv tangencialmente na direção oposta à da velocidade v . As equações do movimento nas direções horizontal e vertical são:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -kv \cos(\psi) = -k\dot{x} \\ \ddot{y} &= -g - kv \sin(\psi) = -g - k\dot{y}\end{aligned}$$

ψ sendo a inclinação da tangente em P para a horizontal \overline{OX} .

Inicialmente, $\dot{x} = V \cos(\alpha)$, $x = 0$, quando $t = 0$ e assim

$$\ddot{x} = -k\dot{x} \rightarrow \ddot{x} + k\dot{x} = 0$$

Equação característica

$$r^2 + kr = 0 \rightarrow r(r + k) = 0 \rightarrow r_1 = 0 \text{ e } r_2 = -k$$

Logo,

$$x(t) = A_1 e^0 + A_2 e^{-kt}$$

C.I. $x(0) = 0 \Rightarrow A_1 + A_2 = 0$

$$\dot{x}(0) = V \cos \alpha \Rightarrow \dot{x}(t) = -kA_2 e^{-kt}$$

$$\dot{x}(0) = -kA_2 = V \cos(\alpha) \rightarrow A_2 = -\frac{V \cos(\alpha)}{k}$$

$$x(t) = A_1 - \frac{V \cos(\alpha)}{k} e^{-kt} \Rightarrow x(0) = 0 \Rightarrow A_1 - \frac{V \cos(\alpha)}{k} = 0 \Rightarrow A_1 = \frac{V \cos(\alpha)}{k}$$

$$x(t) = \frac{V}{k} \cos(\alpha) - \frac{V \cos(\alpha)}{k} e^{-kt} = \frac{V}{k} \cos(\alpha)(1 - e^{-kt})$$

Também, quando $t = 0$, $\dot{y} = V \sin \alpha$, $y = 0$

$$\left(\frac{d}{dt} + k\right)\dot{y} = -g$$

e

$$\dot{y} = A_3 e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

assim

$$\begin{aligned} y &= -\frac{gt}{k} - \left(\frac{V \operatorname{sen} \alpha}{k} + \frac{g}{k} \right) e^{-kt} + A_4 \\ &= \frac{1}{k} V \operatorname{sen} \alpha + \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}) - \frac{gt}{k} \end{aligned}$$

Como

$$x = \frac{V}{k} \cos(\alpha)(1 - e^{-kt})$$

e assim, substituindo em (??) fica

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{1}{k} V \operatorname{sen}(\alpha) + \frac{g}{k^2} \right) (1 - e^{-kt}) - \frac{gt}{k} \\ &\cong x \tan(\alpha) - \frac{gx^2}{2V^2 \cos^2(\alpha)} - \frac{kgx^3}{3V^2 \cos^3(\alpha)} \end{aligned} \quad (1.11)$$

(ii) Alcance no plano inclinado.

Seja R o alcance máximo no plano inclinado em β para \overline{OX} (Fig. 4.7). Coloque $x = R \cos \beta$, $y = R \operatorname{sen} \beta$ em (1.11) resulta

$$R \operatorname{sen} \beta = R \cos \beta \tan \beta - g \frac{R^2 \cos^2 \beta}{2V^2 \cos^2 \alpha} - \frac{k g R^3 \cos^3 \beta}{3V^3 \cos^3 \alpha}$$

como $\operatorname{sen} \beta - \cos \beta \cdot \tan \alpha = \operatorname{sen}(\alpha - \beta) / \cos \alpha$ obtemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos \alpha} = \frac{gR \cos^2 \beta}{2V^2 \cos^2 \alpha} \left(1 + \frac{2kR \cos \beta}{3V \cos \alpha} \right)$$

Temos que

$$R = \left(\frac{2V^2 \cos \alpha \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{g \cos^2 \alpha} \right) \left(1 + \frac{2kR \cos \beta}{3V \cos \alpha} \right)^{-1}$$

$$R \cong \frac{2V^2 \cos \alpha \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{g \cos^2 \beta} \left(1 - \frac{2kR \cos \beta}{3V \cos \alpha} \right)$$

e

$$\begin{aligned} R \left[1 + \frac{4kV \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{3g \cos \beta} \right] &\cong \frac{2V^2 \cos \alpha \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{g \cos^2 \beta} \\ R &\cong \frac{2V^2 \cos \alpha \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{g \cos^2 \beta} \left[1 - \frac{4kV \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{3g \cos \beta} \right] \end{aligned}$$

1.3.3 Movimento Restrito de Partículas

Vamos, agora analisar o movimento de partículas simples restritas a um movimento em curvas ou superfícies. Quando a partícula é lisa, não existe atrito e existe uma reação normal que não realiza trabalho durante o movimento da partícula. Nestas circunstâncias, o princípio da conservação da energia pode ser usado como trabalho, i.é, o trabalho realizado é calculado pela equação da energia.

Exemplo 1.3.3.

1. Mostre que a aceleração de uma partícula P movendo-se ao longo de uma curva C é $\ddot{s}\vec{t} + (\dot{s}^2/\rho)\vec{n}$, onde \vec{s} denota o comprimento do arco ao longo de C , \vec{t} , \vec{n} são vetores unitários ao longo da tangente e normal em P respectivamente e ρ é o raio de curvatura de P .
2. Um arame fixo à um plano liso horizontal tem a seguinte forma (de catenária):

$$y = c \cdot \operatorname{ch}(x/c)$$

e leva um pequeno anel fixo à parte superior da diretriz com força proporcional à distância y da diretriz. Mostre que o movimento do anel é um movimento harmônico simples e que a reação normal varia com y^2 . (Podemos assumir as fórmulas $s = c \tan \psi$, $y = c \sec \psi$ como válidas).

Demonstração. s denota o comprimento do arco do vértice A ao ponto P , e ky a atração na diretriz. R é a reação normal da corda no anel em P .

Resolvendo tangencialmente,

$$-ky \operatorname{sen} \psi = m\ddot{s}.$$

Agora,

$$y = \operatorname{sen} \psi = (c \sec \psi) \operatorname{sen} \psi = c \frac{1}{\cos \psi} \operatorname{sen} \psi = c \tan \psi = s$$

$$\Rightarrow -ky \operatorname{sen} \psi = m\ddot{s} \Rightarrow -ks = m\ddot{s} \Rightarrow \ddot{s} = -\frac{k}{m}s$$

Assim, para $k > 0$, isto é um movimento harmônico simples com período $2\pi(m/k)^{1/2}$.

Resolvendo para a componente normal, temos

$$R - ky \cos \psi = \frac{m\ddot{s}}{\rho}$$

$$\ddot{s} = -\frac{k}{m}s \Rightarrow \dot{s}^2 = A - \frac{k}{m}s^2$$

e assim,

$$R - ky \cos \psi = \frac{ms^2}{\rho} = \frac{m}{\rho} \left(-\frac{k}{m} s^2 + A \right)$$

ou

$$R = ky \cos \psi + \frac{m}{\rho} \left(A - \frac{k}{m} s^2 \right)$$

e como $s = c \tan \psi$ e $y = c \sec \psi$

$$\begin{aligned} R &= kc \sec \psi \cos \psi + \frac{m}{\rho} \left(A - \frac{k}{m} (c^2 \tan^2 \psi) \right) \\ R &= kc \frac{1}{\cos \psi} \cos \psi + \frac{m}{\rho} \left(A - \frac{k}{m} c^2 \tan^2 \psi \right) = kc + \frac{m}{\rho} A - \frac{k}{m} c^2 \tan^2 \psi \end{aligned}$$

Agora, $\rho = ds/d\psi = c \sec^2 \psi$ e conseqüentemente

$$\begin{aligned} R &= kc + \frac{m}{c} A \cos^2 \psi - kc \tan^2 \psi \\ &= \left(kc + \frac{mA}{c} \right) \cos^2 \psi \\ &= \left(kc + \frac{mA}{c} \right) \frac{c^2}{y^2}. \end{aligned}$$

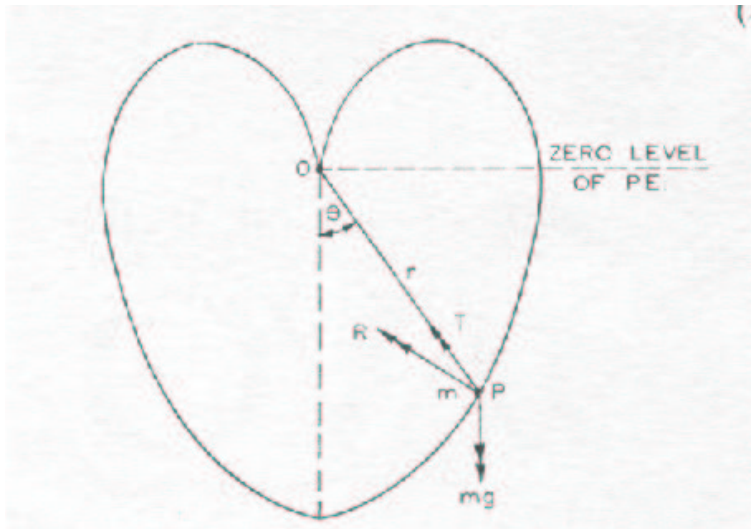
□

Exemplo 1.3.4. Um arame fixo em forma de cardióide $r = a(1 + \cos \theta)$, a reta inicial sendo o eixo vertical para baixo. Um pequeno anel de massa m pode deslizar no arame e está fixo em $r = 0$ do cardióide por um fio elástico de comprimento natural a e módulo $4mg$. Se a partícula parte do repouso quando o fio está horizontal mostre que

$$a\dot{\theta}^2 + (1 + \cos \theta) - g \cos \theta (1 - \cos \theta) = 0$$

Mostre portanto que $\theta = \pi/3$ é uma posição de equilíbrio estável e que o período de pequenas oscilações desta posição é $2\pi(2a/g)^{1/2}$. mostre a posição do anel em t . Os componentes de velocidade são então $[\dot{r}, r\dot{\theta}]$ nas direções radial e transversal. Assim

$$\begin{aligned} E.C. \text{ da viga} &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \\ &= \frac{1}{2} m a^2 (\sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + (1 + \cos \theta)^2 \dot{\theta}^2) \\ &= m a^2 \dot{\theta}^2 (1 + \cos \theta) \end{aligned}$$



A Energia Potencial gravitacional da partícula (referente à horizontal sob O como origem) é

$$-mgr \cos \theta = -mga \cos \theta (1 + \cos \theta).$$

A energia potencial do fio é

$$\frac{1}{2}(4mg) \frac{(r-a)^2}{a} = 2mga \cos^2 \theta.$$

Então as forças são conservativas,

$$\text{energia cinética} + \text{energia potencial} = \text{constante}$$

e

$$mga(\cos^2 \theta - \cos \theta) + ma^2 \dot{\theta}^2 (1 + \cos \theta) = cte = 0$$

então, $\dot{\theta} = 0$ quando $\theta = \pi/2$. Assim,

$$a^2 \dot{\theta}^2 (1 + \cos \theta) - g \cos \theta (1 - \cos \theta) = 0$$

Diferenciando com respeito a t, obtemos

$$-a\dot{\theta}^3 \sin \theta + 2a\dot{\theta}\ddot{\theta}(1 + \cos \theta) + g\dot{\theta} \sin \theta (1 - \cos \theta) - g\dot{\theta} \cos \theta \cdot \sin \theta = 0$$

portanto

$$2a\ddot{\theta}(1 + \cos \theta) - a\dot{\theta}^2 \sin \theta + g \sin \theta (1 - 2 \cos \theta) = 0 \quad (1.12)$$

Pelo equilíbrio, $\dot{\theta} = 0 = \ddot{\theta}$ e assim $\theta = 0$ ou $\pi/3$.

Em (1.12), coloque $\theta = \pi/3 + \xi$, onde ξ é pequeno.

$$\cos \theta = \cos(\xi + \pi/3) = \cos \xi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin \xi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\xi$$

$$\sin \theta = \sin(\xi + \pi/3) = \sin \xi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos \xi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx \frac{1}{2}\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\xi}$$

$$1 + \cos \theta = 1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\xi = \frac{2+1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\xi = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\xi$$

$$1 - 2 \cos \theta = 1 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\xi\right) = \sqrt{3}\xi$$

substituindo em (1.12), temos

$$2a\ddot{\xi}\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\xi\right) - a\dot{\xi}^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3}\xi) = 0$$

$\dot{\xi}^2$ pode ser desprezado, logo

$$2a\ddot{\xi}\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\xi\right) + g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3}\xi) = 0,$$

$$2a\ddot{\xi}\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a\ddot{\xi}\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}g + \frac{3}{2}\xi g = 0$$

$$3a\ddot{\xi} = -\frac{3}{2}\xi g$$

$$\ddot{\xi} = -\frac{\xi g}{2a}$$

$$\ddot{\xi} + \frac{\xi g}{2a} = 0$$

Esta equação mostra que para uma perturbação pequena sobre $\theta = \pi/3$, o movimento se aproxima de um movimento harmônico simples. Portanto, $\theta = \pi/3$ é uma posição de equilíbrio estável, com o período de pequenas oscilações sendo

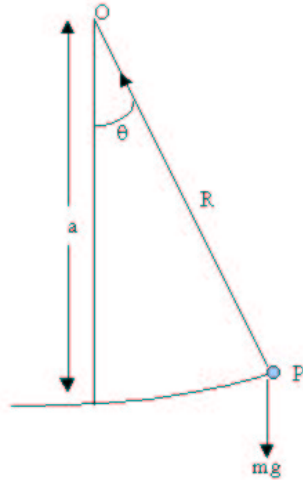
$$2\pi \sqrt{\frac{2a}{g}}.$$

1.3.4 Pêndulo Simples

Uma partícula com um grau de liberdade: o pêndulo.

Vamos analisar o movimento do pêndulo simples. A velocidade é dada por $s = a\dot{\theta}$, assim como a energia cinética é dada por

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2.$$



A energia cinética da partícula é

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2.$$

Já a energia potencial é, evidentemente dada por

$$- \int_{s_0}^s f(s)ds,$$

onde s_0 é uma constante. A equação da energia é, portanto

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2 = \int_{s_0}^s f(s)ds + c,$$

onde c é uma constante.

Integrando esta equação, temos

$$t = \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{s_0}^s \left\{ \int_{s_0}^s f(s)ds + c \right\}^{-\frac{1}{2}} ds + \ell,$$

onde ℓ é uma constante de integração. Esta equação representa a solução deste problema, então, isto é uma relação integral entre s e t , envolvendo duas constantes de integração. As duas constantes de integração c e ℓ podem ser interpretadas fisicamente em termos das condições iniciais da partícula em movimento. Então, se a partícula em $t = t_0$ para o ponto $s = s_0$, com velocidade u , e substituindo estes valores na equação de energia, temos

$$c = \frac{1}{2}mu^2,$$

e substituindo os mesmos valores na equação final obtemos $\ell = t_0$.

O modelo mais comum e mais conhecido é o pêndulo simples. Neste caso supõe-se que o tubo tenha forma de um círculo de raio a cujo plano é vertical, e a única força externa que age sobre a partícula é a gravidade. Usando θ para denotar o ângulo feito com a vertical pelo raio para o centro do círculo da partícula, temos

$$s = a\theta \text{ e } f(s) = -mg\text{sen}\theta,$$

A energia, agora, é dada por

$$a\dot{\theta}^2 = 2g\cos\theta + cte = -4g\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = cte$$

Vamos supor que $h = a^2\dot{\theta}^2/2g \Rightarrow \theta = 0$. Desta equação podemos supor

$$a\dot{\theta}^2 = 2gh - 4g\text{sen}^2\frac{\theta}{2}.$$

Fazendo $\text{sen}\theta/2 = y$, fica

$$\dot{y}^2 = \frac{g}{a} (1 - y^2) \left(\frac{h}{2a} - y^2 \right).$$

Observação 2. Não foi feita nenhuma consideração de que θ seja pequeno. Foram feitas apenas observações sobre a equação.

Neste problema de pêndulo, essencialmente temos dois casos, em um deles você tem energia suficiente para fazer uma volta completa e no outro caso você tem energia para dar toda a volta. Neste caso, $j = 0$, $y > 1$, logo é oscilatório. Portanto, "neste caso", $h/2a < 1$. Para tal escreve-se $h = 2ak^2$, $0, k < 1$. Para podermos tomar a fórmula

$$\dot{y}^2 = \frac{gk^2}{a} (1 - y^2) \left(1 - \frac{y^2}{k^2} \right)$$

$$y = ks_n \left\{ \sqrt{\frac{g}{a}}(t - t_0), k \right\},$$

onde s_n são as equações transcendentais, t_0 e k são constantes a serem determinadas pelo uso das condições iniciais.

Periódica:

$$4 \sqrt{\frac{a}{g}} K$$

onde

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}(1-k^2t^2)^{1/2}}$$

e podemos observar que se k é pequeno, tem-se

$$k \simeq \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}} \simeq \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta d\theta}{\cos\theta} = \frac{\pi}{2}.$$

Logo,

$$k \simeq 4 \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{\pi}{2} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Caso contrário, o movimento não para (voltas completas).

$$h > 2a, \quad 2a = hk^2 \quad k < 1$$

$$\dot{y}^2 = \frac{g}{ak^2}(1 - y^2)(1 - k^2y^2)$$

$$y = s_n \left\{ \sqrt{\frac{g}{a}} \frac{t - t_0}{k}, k \right\}$$

onde t_0 e k devem ser determinados. Evidentemente, tem-se um caso crítico onde $h = 2a$. e a equação fica

$$\dot{y}^2 = \frac{g}{a}(1 - y^2)^2,$$

ou,

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{g}{a}}(1 - y^2),$$

cuja solução é

$$y = \tanh \left\{ \sqrt{\frac{g}{a}}(t - t_0) \right\}.$$

1.3.5 Momentum Angular de uma Partícula

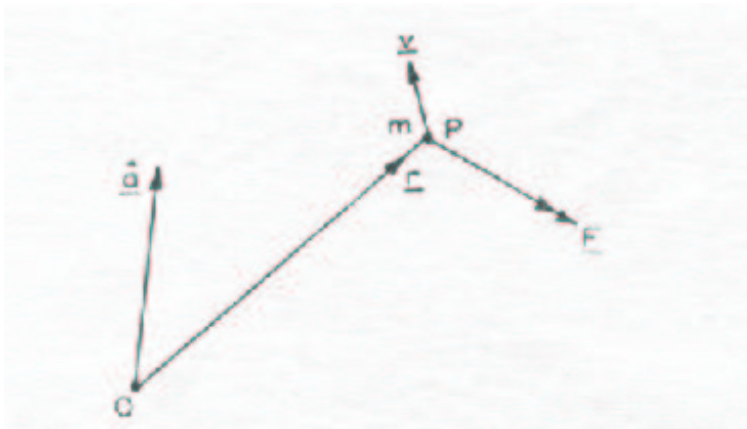


Figura 1.1: Posição de uma partícula de massa m movendo-se com velocidade \vec{v} no tempo t

A figura 1.1 mostra a posição de uma partícula de massa m movendo-se com velocidade \vec{v} no tempo t . Para uma origem fixa O , fazendo $\overline{OP} \equiv r$ tal que $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Então

o (vetor) momentum angular ou momento de momentum angular da partícula sobre O é definido como

$$\vec{H} = \vec{r} \wedge (mv).$$

Agora, seja sujeita a uma força \vec{F} . Então, para m constante,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{H}}{dt} &= \vec{r} \wedge \left(m \frac{d\vec{v}}{dt} \right) + \vec{v} \wedge (mv) \\ &= \vec{r} \times \vec{F}, \text{ então } \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \end{aligned}$$

A taxa de mudança do momentum angular da partícula é igual ao momento da força resultante que age nela.

Se, no entanto, $\vec{F} = 0$, então \vec{H} é constante. Portanto, o vetor momentum angular sobre o ponto fixo da partícula movendo-se sem forças é constante. (CONSERVAÇÃO DO MOMENTUM ANGULAR).

Se agora, \vec{a} especifica o vetor unitário no mesmo eixo sob O , definimos (fisicamente) que o momentum angular sobre este eixo é a resultante de \vec{H} sobre ele, i.é, $\vec{a}\vec{H}$. Então, a taxa de crescimento do momentum angular sobre o eixo \vec{a} é

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\vec{H}) = \vec{a} \left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right) = \vec{a} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{F}).$$

i. é, a taxa de crescimento do momentum angular sobre o eixo é igual ao momento da força resultante que age na partícula. Se, no entanto, o momento da força resultante sobre o eixo \vec{a} é nulo, então o momentum angular $\vec{a}\vec{H}$ da partícula sobre o eixo é constante.

Seja uma partícula P de massa m confinada a mover-se em um plano tal que suas coordenadas em t são (r, θ) e seja \vec{F} a força resultante agindo em m na direção ao longo de \overline{PO} (veja próxima figura). Assim, uma força \vec{F} é descrita como uma força central e o local geométrico descrito por m determina uma órbita.

As componentes radial e transversal de P são dadas por $[\dot{r}, r\dot{\theta}]$. Assim, o momentum angular sobre a normal ao plano O é

$$r \times (mr\dot{\theta}) = mr^2\dot{\theta}.$$

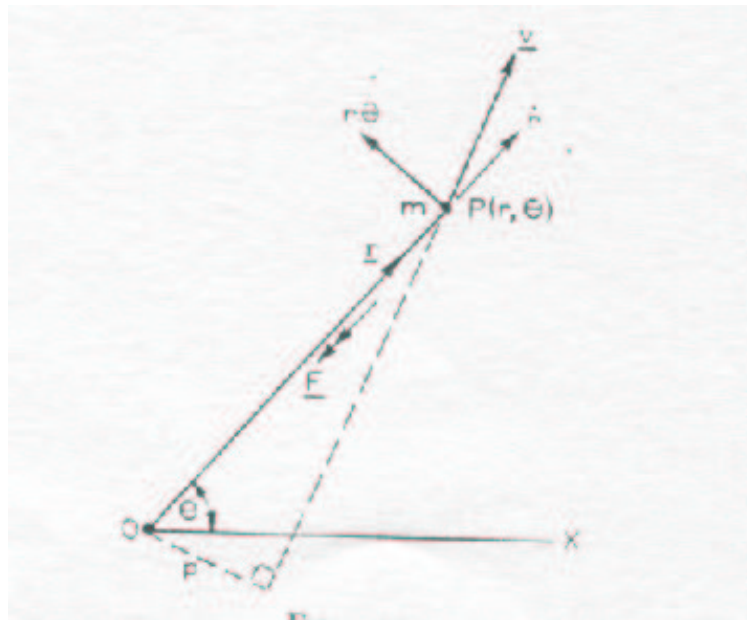
Assim \vec{F} não possui momento sobre o eixo, e após isto é constante.

$$r^2\dot{\theta} = h = cte.$$

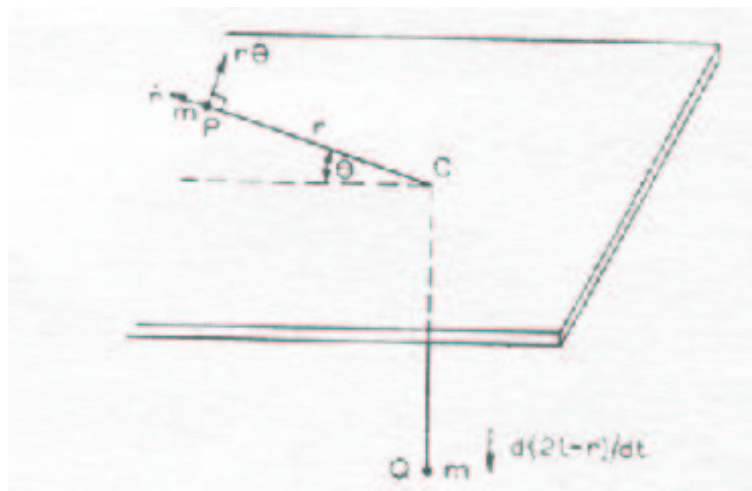
Observação 3. Se \vec{v} é a velocidade resultante da partícula, p o comprimento perpendicular a O na direção de \vec{v} , então

$$h = pv = r^2\dot{\theta}$$

onde h é conhecido como momentum angular constante. (O fato de h ser constante pode ser explicado pelo fato da componente de aceleração transversal ser nula, ou seja, $\frac{1}{r} \frac{d}{dt} r^2\dot{\theta} = 0$).



Exemplo 1.3.5. Sejam P, Q duas partículas, cada uma de massa m , ligadas por um fio (de comprimento 2ℓ) inextensível de baixa densidade e atrito desprezível. Este fio passa por um pequeno orifício O em uma mesa lisa. P é livre para deslizar na mesa, Q também é livre. Inicialmente OQ tem comprimento ℓ , e P parte do repouso num ângulo a direita de OP com velocidade $\sqrt{(8g\ell/3)}$. Mostre que o movimento decorrente de Q atingirá o orifício.



Seja (r, θ) as coordenadas polares de P referentes a mesma linha inicial de O na mesa. Então $2\ell - r$ é a distância de Q abaixo da mesa. P tem componentes de velocidade radial

e transversal $[\dot{r}, r\dot{\theta}]$ e Q tem velocidade (para baixo) $\frac{d}{dt}(2\ell - r) = -\dot{r}$. Assim a E.C. do sistema fica

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m(-\dot{r}^2) = m(\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2).$$

Assumindo que a mesa é o nível zero, a E.P. é $-mg(2\ell - r)$.

$$\therefore m(\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2) - mg(2\ell - r) = cte.$$

ou seja

$$\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 - gr = cte.$$

Inicialmente quando $t = 0$, $\dot{r} = 0$, $\ell = 0$, $r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{8g\ell}{3}}$ e assim

$$\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 - gr = 0 + \frac{1}{2} \frac{8g\ell}{3} + g\ell = \frac{8g\ell}{6} + g\ell = \frac{8g\ell + 6g\ell}{6} = \frac{14g\ell}{6} = \frac{7g\ell}{3}$$

Portanto,

$$r^2\dot{\theta} = h = \ell \sqrt{\frac{8g\ell}{3}} = \sqrt{\frac{8g\ell^3}{3}}.$$

$$\begin{cases} \dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 - gr = \frac{7g\ell}{3} \hookrightarrow \dot{\theta}^2 = 2 \frac{\frac{7g\ell}{3} - gr - \dot{r}^2}{r^2} \hookrightarrow \dot{\theta} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{14g\ell}{3} - 2gr - 2\dot{r}^2} \\ r^2\dot{\theta} = \sqrt{\frac{8g\ell^3}{3}} \hookrightarrow \dot{\theta} = \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{8g\ell^3}{3}} \end{cases}$$

$$\frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{8g\ell^3}{3}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{14g\ell}{3} - 2gr - 2\dot{r}^2}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{8g\ell^3}{3} = \frac{14g\ell}{3} - 2gr - 2\dot{r}^2$$

$$2\dot{r}^2 = -\frac{1}{r^2} \frac{8g\ell^3}{3} + \frac{14g\ell}{3} - 2gr$$

$$\dot{r}^2 = -\frac{1}{r^2} \frac{4g\ell^3}{3} + \frac{7g\ell}{3} - gr$$

$$= -\frac{4g\ell^3}{3r^2} + \frac{7g\ell}{3} - gr$$

$$\dot{r} = 0 \Rightarrow \frac{7g\ell}{3} - \frac{4g\ell^3}{3r^2} - gr = 0 \Rightarrow 7g\ell r^2 - 4g\ell^3 - 3gr^3 = 0 \Rightarrow 7\ell r^2 - 4\ell^3 - 3r^3 = 0$$

$$\therefore 3r^2 - 7\ell r^2 + 4\ell^3 = 0,$$

i.é,

$$(r - \ell)(3r + 2\ell)(r - 2\ell) = 0.$$

Portanto os valores fisicamente realizáveis de r que fazem o sistema sair do repouso são $r = \ell$, $r = 2\ell$. Quando $r = 2\ell$ a partícula superior deixa a mesa.

Observação 4. Para este exemplo o princípio da conservação da energia foi utilizado para um sistema com duas partículas. Isto é justificável pois a tensão no fio, uma força interna, e não realizar trabalho.

Exemplo 1.3.6 (Movimento de uma partícula em uma superfície de revolução). Uma partícula de massa m move-se na superfície (interna) lisa de um parabolóide de revolução $x^2 + y^2 = 4az$, cujo eixo é vertical e o vértice está para baixo. Encontre o momentum angular da partícula sobre OZ sendo que o movimento descreve um círculo horizontal de raio $2a$ com velocidade (speed) constante. Enquanto a partícula descreve este círculo ela recebe um impulso $m\sqrt{ag}$ ao longo da superfície do parabolóide no plano vertical com o eixo. Mostre o movimento subsequente do caminho da partícula termina entre os dois planos horizontais.

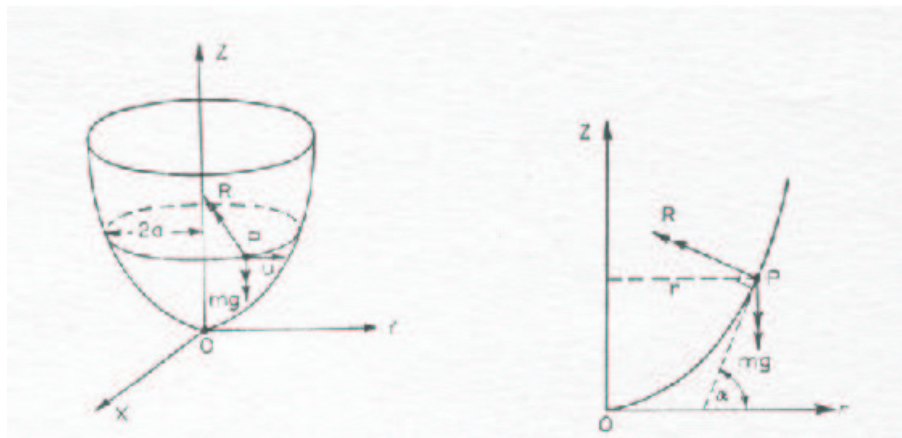


Figura 1.2: Partícula movendo-se num círculo de raio $2a = r$ no interior de um parabolóide de revolução.

O gráfico à esquerda na figura 1.2 mostra uma partícula movendo-se num círculo de raio $2a = r$ no interior de um parabolóide de revolução. As forças que agem na partícula são o peso mg (que está para baixo) e a reação normal à superfície que intercepta a reta OZ . O momentum angular é conservado sobre OZ no movimento e seu valor H é

$$2amu = H = cte.$$

A seção meridiana do parabolóide sobre P é mostrada na figura da direita e tem equação $r^2 = 4az$, r sendo a distância de P ao eixo OZ . Seja α o ângulo tangente à curva meridiana feita com a horizontal. Assim,

$$\tan \alpha = \frac{dz}{dr} = \frac{r}{2a}.$$

Quando $z = a$, $r = 2a$ e assim $\alpha = \pi/4$.

Resolvendo na direção \overline{OZ} para o caso $\alpha = \frac{\pi}{4}$,

$$\frac{R}{\sqrt{2}} = mg.$$

Resolvendo ao longo do raio do círculo $r = 2a$,

$$\frac{R}{\sqrt{2}} = m\left(\frac{u^2}{2a}\right).$$

$$\begin{cases} \frac{R}{\sqrt{2}} = mg \\ \frac{R}{\sqrt{2}} = m\frac{u^2}{2a} \end{cases} \Rightarrow mg = m\frac{u^2}{2a} \Rightarrow u^2 = 2ag$$

e então o momentum angular sobre OZ fica

$$\vec{H} = 2am\sqrt{2ag}.$$

No movimento generalizado na superfície, as componentes cilíndricas polar da velocidade de P são $[\dot{r}, r\dot{\theta}, \dot{z}]$ e assim, pela conservação da energia

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + mgz = cte$$

ou

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 + 2gz = cte.$$

Agora, $H = 2am\sqrt{2ag} = mr^2\dot{\theta}$ e assim

$$\dot{\theta}^2 = \frac{8a^3g}{r^4}$$

$$\therefore \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 + 2gz = \dot{r}^2 + \frac{8a^3g}{r^2} + \dot{z}^2 + 2gz = cte$$

Colocando, $v^2 = \dot{r}^2 + \dot{z}^2$, tal que v é a componente de velocidade ao longo da curva do meridiano. Então,

$$v^2 + \frac{2a^2g}{z} + 2gz = cte$$

Inicialmente, $v = \sqrt{ag}$, então $m\sqrt{ag}$ é o impulso aplicado, e $z = a$. Logo,

$$v^2 + \frac{2a^2g}{z} + 2gz = v^2 + \frac{2a^2g}{a} + 2ga = ag + 2ag + 2ag = 5ag.$$

Então $v = 0$ quando $2a^2 + 2z^2 - 5az = 0$, i.é, $z = a/2$ ou $2a$.

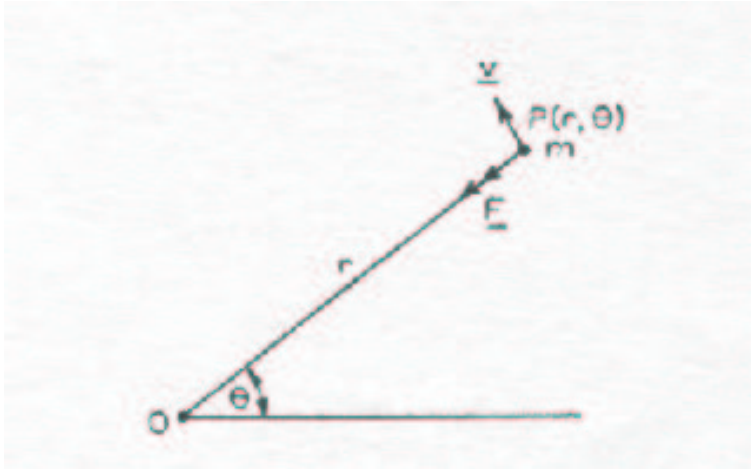


Figura 1.3: partícula de massa m agindo sobre uma força $m\phi(r)\vec{r}$

1.4 Movimento Orbital

1.4.1 Órbita de uma partícula sobre uma força central

Consideramos uma partícula de massa m agindo sobre uma força $m\phi(r)\vec{r}$. As componentes radial e transversal da \vec{F} são, evidentemente, $m\phi(r)\vec{r}$ e 0 , tal que as equações do movimento tem forma

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \phi(r)r, \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0,$$

onde r, θ , são coordenadas plano polares. A segunda equação tem como integral

$$r^2\dot{\theta} = h,$$

onde h é uma constante. substituindo a primeira equação por $\dot{\theta}$, obtemos

$$\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} - \frac{h^2}{r^3} = \phi(r)r.$$

Integrando, obtemos

$$\dot{r}^2 = -\frac{h^2}{r^2} + 2 \int \phi(r)rdr.$$

A velocidade escalar na curva v em alguma posição é dada por

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 = 2 \int \phi(r)rdr,$$

porque a órbita é obtida por integração da equação diferencial

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{\dot{r}^2}{\dot{\theta}^2} = \frac{r^4}{h^2} \left\{ -\frac{h^2}{r^2} + 2 \int \phi(r)rdr \right\}.$$

Observação 5. Devemos conhecer a função $\phi(r)$.

Colocando $\phi(r) = -\mu/r^3$, temos a equação do movimento

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0.$$

Assim,

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} + c\right),$$

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^4}{h^2}\left(-\frac{h^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} + \mu C\right) = r^2\left(\frac{\mu Cr^2}{h^2} + \frac{2\mu r}{h^2} - 1\right),$$

onde C é uma constante de integração.

Comparando a última equação com a equação diferencial

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = r^2\left(\frac{(e^2 - 1)r^2}{\ell^2} + \frac{2r}{\ell} - 1\right)$$

obtendo, por eliminação, a constante θ_0 da equação

$$\ell = r\{1 - e \cos(\theta - \theta_0)\}$$

para a elipse ou parábola, de excentricidade e e "semi-latus rectum" ℓ , então, podemos escrever

$$\frac{\mu C}{h^2} = \frac{e^2 - 1}{\ell^2}, \quad \frac{\mu}{h^2} = \frac{1}{\ell}.$$

Destas duas equações, encontramos

$$\ell = \frac{h^2}{\mu}, \quad e^2 - 1 = \frac{Ch^2}{\mu} = C\ell.$$

Agora temos 3 casos a considerar:

- i) Se $-\mu/h^2 < C < 0$, então $e < 1$ e a órbita é uma elipse. Colocando $C = -1/a$, encontramos que

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \quad \ell = a(1 - e^2),$$

onde a é o semi-eixo maior.

- ii) Se $C = 0$, então $e = 1$ e a órbita é parabólica. Assim,

$$v^2 = \frac{2\mu}{r}.$$

iii) Se $C > 0$, então $e > 1$ e a órbita é o "branch of the hiperbola nearer" com foco na origem. Colocando, neste caso, $C = 1/a$, e encontramos que

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right), \quad \ell = a(e^2 - 1),$$

onde a é o semi-eixo transversal desta hipérbole.

Se a velocidade escalar na curva é

$$\sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

então a órbita é uma parábola. Se a velocidade escalar na curva é maior que isto, C deve ser maior e a órbita é hiperbólica, mas se C é menor que este valor, C é negativo e a órbita é uma elipse. Por esta razão,

$$\sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

é chamado velocidade escalar crítica na curva de uma partícula distante r do centro da atração.

1.5 Sistemas de Partículas: Princípios gerais

Vamos estabelecer alguns resultados gerais sobre conservação do momento, conservação de energia, dinâmica de corpos rígidos ...

Observação 6. *As equações de Newton são tal gerais quanto as formulações Lagrangeanas, Hamiltonianas, etc, pelo menos em que se trata de sistemas de partículas.*

Sistema constituído de partículas m_i . Onde temos $M = \sum m_i$ (massa total do sistema) e temos o centro de massa do sistema. Vamos definir \vec{r} e $M\vec{r} = \sum m_i r_i$ o que define o centro de massa do sistema.

Se derivarmos a equação acima, temos:

$$M\dot{\vec{r}} = \sum m_i \dot{r}_i.$$

que pode ser chamado de momento total do sistema e pode ser definido como o momento de uma partícula movimentando-se com velocidade de centro de massa.

Denotando o momento linear do sistema por \vec{p} , temos

$$\dot{\vec{p}} = \sum m \ddot{\vec{r}} = M\ddot{\vec{r}},$$

$$\vec{F} = \sum F_i + \sum_{v=0} F_{ij} = \sum F_i.$$

Observando o que foi feito até aqui, temos

$$m_j \ddot{\vec{r}}_j = \vec{F}_j + \sum_{i \neq j} F_{ij}.$$

Se somarmos sobre j , teremos

$$M \ddot{\vec{r}}_i = \sum_j m_j \ddot{\vec{r}}_j = \sum_j \vec{F}_j = \vec{F} \text{ com } F_{ij} + F_{ji} = 0, \quad i \neq j.$$

Observação 7.

1. *Estamos abstraindo os fatos, isto é, estamos tratando as coisas como pontos.*
2. *Se considerarmos o gás, em mecânica Quântica, existe um raio de influência ao redor do gás.*
3. *A força externa total é igual à taxa de mudança do movimento linear do sistema.*

1.5.1 Momentum Angular e Taxa de Mudança do Momento do Sistema

M.A. = momentum angular = momento do momentum

O momentum angular do momento do momentum da partícula P sobre o ponto fixo O é $\vec{r} \wedge m\dot{\vec{r}}$. Então, o vetor total do momentum angular sobre O é

$$\vec{H} = \sum (\vec{r} \wedge m\dot{\vec{r}}),$$

O momentum angular físico sobre uma reta partindo de O é especificado pelo vetor unitário \hat{a} é então $\hat{a} \cdot \vec{H}$.

Diferenciando a equação acima com respeito a t ,

$$\dot{\vec{H}} = \sum (\vec{r} \wedge m\ddot{\vec{r}}) + \sum (\dot{\vec{r}} \wedge m\dot{\vec{r}}),$$

isto é,

$$\dot{\vec{H}} = \sum (\vec{r} \wedge m\ddot{\vec{r}}),$$

isto mostra que a razão da mudança do momentum sobre o ponto fixo O é igual ao momento total da razão da mudança do momentum sobre O . Então $\dot{\vec{H}} + \vec{F}' = m\ddot{\vec{r}}$, que na notação anterior fica

$$\dot{\vec{H}} = \sum (\vec{r} \wedge \vec{F}) + \sum (\vec{r} \wedge \vec{F}').$$

Agora vamos mostrar que o último somatório é nulo.

$$\begin{aligned}\sum (\vec{r} \wedge \vec{F}') &= \sum_i \sum_j (\vec{r}_i \wedge \vec{F}'_{ij}) \quad (i \neq j) \\ &= \sum_i \sum_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \wedge \vec{F}'_{ji} + \sum_i \sum_j (\vec{r}_j \wedge \vec{F}'_{ji}) \\ &= \sum_i \sum_j (\vec{r}_j \wedge \vec{F}'_{ji})\end{aligned}$$

e esta última equação segue do fato que os vetores $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ e \vec{F}'_{ji} são paralelas. lembrando que $\vec{F}'_{ji} = -\vec{F}'_{ij}$,

$$\sum_i \sum_j (\vec{r}_j \wedge \vec{F}'_{ji}) = - \sum_j \sum_i (\vec{r}_j \wedge \vec{F}'_{ij}).$$

Este último somatório é essencialmente $-\sum(\vec{r} \wedge \vec{F}')$. Então, $\sum(\vec{r} \wedge \vec{F}') = 0$ e estabelecemos que

$$\dot{\vec{H}} = \sum(\vec{r} \wedge \vec{F}').$$

1.5.2 Centróides (Centros de Massa)

Seja G o centróide tal que $\overline{OP} \equiv \vec{r}$, $\overline{OG} \equiv \vec{r}$, $\overline{GP} \equiv \vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}$.

A energia cinética total do sistema é

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \sum m \dot{\vec{r}}^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum m (\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}}')^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum m \dot{\vec{r}}^2 + \sum m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}' + \frac{1}{2} \sum m \dot{\vec{r}}'^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum m \dot{\vec{r}}^2 + \dot{\vec{r}} \sum m \dot{\vec{r}}' + \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}'^2 \sum m.\end{aligned}$$

Agora, $\sum m \dot{\vec{r}}' = 0$, e assim $\sum m \dot{\vec{r}}' = \frac{d}{dt} \sum m \vec{r}' = 0$. Além disso, $\sum m = M$. Logo, está mostrado que

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{2} \sum m \dot{\vec{r}}'^2.$$

i.é, a E.C. de um sistema de partículas movendo-se no espaço é igual a soma das E.C.(s) de uma simples partícula de massa total igual tal que o sistema, concentra-se no centróide e move-se com a velocidade do centróide.

O momentum angular sobre O é

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \sum \vec{r} \wedge m\dot{\vec{r}} \\ &= \sum \{(\vec{r} + \vec{r}') \wedge m(\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}}')\} \\ &= \vec{r} \wedge (\dot{M}\vec{r}) + \vec{r} \wedge \sum (m\dot{\vec{r}}') + (\sum m\dot{\vec{r}}) \wedge \dot{\vec{r}} + \sum (\vec{r}' \wedge m\dot{\vec{r}}').\end{aligned}$$

Agora, $\sum m\dot{\vec{r}}' = 0$ e assim $\sum m\ddot{\vec{r}}' = \frac{d}{dt} \sum m\dot{\vec{r}}' = 0$

$$\therefore \vec{H} = \vec{r} \wedge (M\ddot{\vec{r}}) + \sum (\vec{r}' \wedge m\dot{\vec{r}}'),$$

i.é, o momentum angular de um sistema sobre um ponto fixo " O " é igual ao momentum angular de uma simples partícula de massa total igual à massa do sistema por inteiro, concentrado no centróide e movendo-se com a velocidade do centróide, portanto com o momentum angular sobre o centróide do sistema em seu movimento relativo ao centróide.

Derivando a última equação com respeito a t , obtemos

$$\dot{\vec{H}} = \vec{r} \wedge (M\ddot{\vec{r}}) + \sum (\vec{r}' \wedge m\ddot{\vec{r}}'),$$

mostrando que a taxa de mudança do momentum angular do sistema sobre " O " é igual ao momento da taxa de variação do momentum linear de uma simples partícula de massa M (massa total do sistema) sobre " O " concentrado em seu centróide e tendo o movimento do centróide. Mais, igual ao momento total sobre " O " das forças externas que agem sobre o sistema.

Podemos perceber que

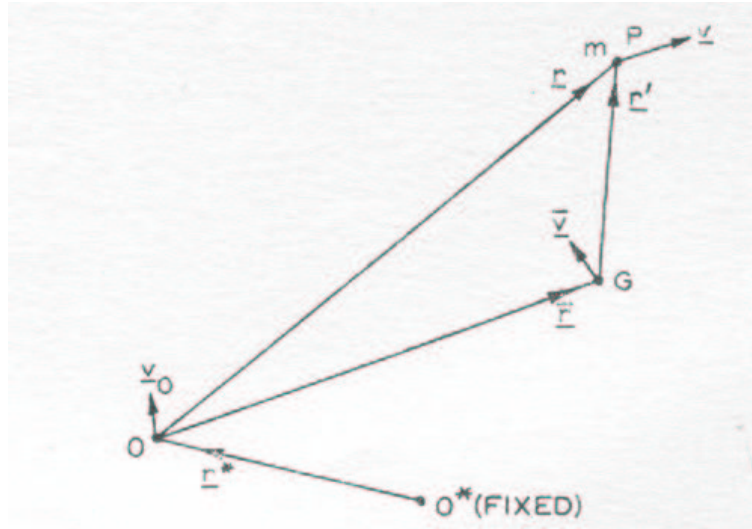
$$\sum (\vec{r}' \wedge m\ddot{\vec{r}}') = \frac{d}{dt} \sum (\vec{r}' \wedge m\dot{\vec{r}}'),$$

assim, a frase "momento da taxa de mudança do momentum do sistema em seu movimento relativo ao centróide" poderia ser trocada por "taxa de mudança do momento do momentum do sistema relativo ao centróide".

1.5.3 Origem em Movimento

Suponha que " O " é a origem e move-se com velocidade v_0 . Seja " P " uma partícula do sistema de massa m , G o centróide do sistema e seja $\overline{OP} \equiv \vec{r}$, $\overline{OG} \equiv \vec{r}'$, $\overline{GP} \equiv \vec{r}''$, tal que $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}''$. Seja \vec{v} a velocidade de P e M a massa total do sistema. O momentum angular do sistema sobre O é

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \sum (\vec{r} \wedge m\vec{v}) = \sum \{(\vec{r}' + \vec{r}'') \wedge m(\vec{v}_0 + \dot{\vec{r}}')\} \\ &= \vec{r}' \wedge M\vec{v}_0 + \vec{r}' \wedge \frac{d}{dt} \sum (m\dot{\vec{r}}') + (\sum m\dot{\vec{r}}') \wedge \vec{v}_0 + \sum (\vec{r}'' \wedge m\dot{\vec{r}}').\end{aligned}$$



Agora, $\sum (m\vec{r}) = M\vec{r}, \sum (m\vec{r}') = 0$ e

$$\begin{aligned} \sum (\vec{r} \wedge m\dot{\vec{r}}) &= \sum \{\vec{r} \wedge m(\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}}')\} \\ &= (\sum m\vec{r}) \wedge \dot{\vec{r}} + \sum (\vec{r} \wedge m\dot{\vec{r}}') \\ &= \sum (\vec{r} \wedge m\dot{\vec{r}}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{H} &= \vec{r} \wedge M\dot{\vec{r}} + \sum (\vec{r} \wedge m\dot{\vec{r}}') \\ &= \vec{r} \wedge M\dot{\vec{r}} + \sum (\vec{r} \wedge m\dot{\vec{r}}') \end{aligned}$$

i.é, o momentum angular do sistema de partículas sobre O é igual ao momentum angular sobre O de uma partícula de massa de todo o sistema, concentrado em seu centróide e movendo-se com a velocidade do centróide e momentum angular do sistema de partículas relativo ao centróide.

O princípio pode ser estabelecido tanto para um sistema fixo como para um sistema em movimento. Como $\vec{H}' = \sum (\vec{r}' \wedge m\dot{\vec{r}}')$. Então,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}} &= \dot{\vec{r}} \wedge M\dot{\vec{v}} + \vec{r} \wedge M\ddot{\vec{v}} + \dot{\vec{H}}' \\ &= (\dot{\vec{v}} - \dot{\vec{v}}_0) \wedge M\dot{\vec{v}} + \vec{r} \wedge M\ddot{\vec{v}} + \dot{\vec{H}}' \\ &= \dot{\vec{H}}' + \vec{r} \wedge M\ddot{\vec{v}} - \dot{\vec{v}}_0 \wedge M\dot{\vec{v}}. \end{aligned}$$

Agora, seja $O \equiv G$. Então, $\vec{r} = 0, \dot{\vec{v}}_0 = \dot{\vec{v}}$ e assim

$$\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{H}}' = \frac{d}{dt} \sum (\vec{r}' \wedge m\dot{\vec{r}}') = \sum (\vec{r}' \wedge m\ddot{\vec{r}}'),$$

i.é, a taxa de mudança do momentum angular do sistema de partículas sobre seu centróide G é igual ao momento total da taxa de variação do momentum sobre G do sistema em seu movimento relativo a G.

Então quando calculamos a taxa de variação do momentum angular do sistema de partículas sobre seu centróide, podemos tratá-lo.

Agora, introduzimos uma origem fixa O^* . \vec{F} denota o total de forças externas que agem na partícula em P e L^* o momento total sobre O^* e L sobre O . Então se, $\vec{O^*P} \equiv \vec{r}^* + \vec{r}$,

$$\vec{L}^* = \sum (\vec{r}^* + \vec{r}) \wedge \vec{F} = \vec{r}^* \wedge \sum \vec{F} + \vec{L}.$$

Se \vec{H}^* é o momentum angular sobre O^* , então da seção anterior,

$$\dot{\vec{H}}^* = \sum \{(\vec{r}^* + \vec{r}) \wedge \dot{\vec{F}}\} = \vec{r}^* \wedge \sum \dot{\vec{F}} + \dot{\vec{L}}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}^* &= \sum \{(\vec{r}^* + \vec{r}) \wedge m\dot{\vec{v}}\} = \vec{r}^* \wedge \sum m\dot{\vec{v}} + \dot{\vec{H}} \\ &= \dot{\vec{H}} + \vec{r}^* \wedge M\dot{\vec{v}}. \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}^* &= \vec{r}^* \wedge \sum \dot{\vec{F}} + \dot{\vec{L}} - \vec{r}^* \wedge M\dot{\vec{v}} - \vec{r}^* \wedge M\dot{\vec{v}} \\ &= \dot{\vec{L}} - \vec{v}_0 \wedge M\dot{\vec{v}}, \end{aligned}$$

dado que,

$$\sum \dot{\vec{F}} = M\dot{\vec{v}}.$$

Agora seja $O \equiv G$. Então, $\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{L}}$. i.é, a taxa de variação do momentum angular de um sistema de partículas sobre seu centróide é sempre igual ao vetor soma dos momentos sobre o centróide de todas as forças externas, não importando se G está em repouso ou em movimento.

Assumindo \vec{F}' como o somatório das forças internas que agem sobre a partícula em P, então $\vec{F} + \vec{F}'$ é a força total,

$$\begin{aligned} m\dot{\vec{v}} &= \vec{F} + \vec{F}'. \\ \therefore \sum (\vec{r} \wedge m\dot{\vec{v}}) &= \sum (\vec{r} \wedge \vec{F}) + \sum (\vec{r} \wedge \vec{F}'). \end{aligned}$$

Podemos ver, portanto, que $\sum (\vec{r} \wedge \vec{F}') = 0$ e assim

$$\sum (\vec{r} \wedge m\dot{\vec{v}}) = \sum (\vec{r} \wedge \vec{F}),$$

i.é, o momento total da taxa de variação do momentum do sistema sobre algum ponto, móvel ou fixo, é sempre igual ao momento total das forças externas sobre aquele ponto.

Exemplo 1.5.1. Prove que o momentum angular do sistema sobre O é igual a soma do momento angular sobre O do movimento relativo à O e que a partícula de massa $M = \sum m$ em G move-se com velocidade de O .

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \sum \vec{r} \wedge m\vec{v} = \sum \{(\vec{r} \wedge m(\vec{v} - \vec{v}_0))\} + \sum (\vec{r} \wedge m\vec{v}_0) \\ &= \sum \{(\vec{r} \wedge m(\vec{v} - \vec{v}_0))\} + (\sum m\vec{r}) \wedge \vec{v}_0 \\ &= \sum \{(\vec{r} \wedge m(\vec{v} - \vec{v}_0))\} + (M\vec{r}) \wedge \vec{v}_0 \\ &= \sum \{(\vec{r} \wedge m(\vec{v} - \vec{v}_0))\} + \vec{r} \wedge (M\vec{v}_0)\end{aligned}$$

1.5.4 Forças Impulsivas

Agora, vamos supor que as partículas do sistema considerado são sujeitas à forças impulsivas. Sejam \vec{I}, \vec{I}' são as resultantes das forças impulsivas externas e internas agindo sobre uma partícula P de massa m . a velocidade de P muda instantaneamente de \vec{v}_0 a \vec{v} . Então $\vec{I} + \vec{I}'$ é a força impulsiva resultante aplicada em P e seu momentum linear é $m(\vec{v} - \vec{v}_0)$,

$$\vec{I} + \vec{I}' = m(\vec{v} - \vec{v}_0).$$

$$\therefore \sum \vec{I} + \sum \vec{I}' = \vec{p} - \vec{p}_0,$$

onde $\vec{p} = \sum m\vec{v}$, $\vec{p}_0 = \sum m\vec{v}_0$. da terceira Lei de Newton e da natureza da força de impulsiva, $\sum \vec{I}' = 0$.

$$\therefore \sum \vec{I} = \vec{p} - \vec{p}_0.$$

Então o impulso externo total aplicado no sistema de partículas é igual à mudança total do momentum linear produzido.

Seja $\vec{r} \equiv \overrightarrow{OP}$, temos

$$\sum \{\vec{r} \wedge (\vec{I} + \vec{I}')\} = \sum \{\vec{r} \wedge m(\vec{v} - \vec{v}_0)\}.$$

Com argumentos similares aos previamente estabelecidos, $\sum \vec{r} \wedge \vec{I}' = 0$.

$$\therefore \sum (\vec{r} \wedge \vec{I}) = \vec{H} - \vec{H}_0,$$

onde $\vec{H} = \sum (\vec{r} \wedge m\vec{v})$, $\vec{H}_0 = \sum (\vec{r} \wedge m\vec{v}_0)$.

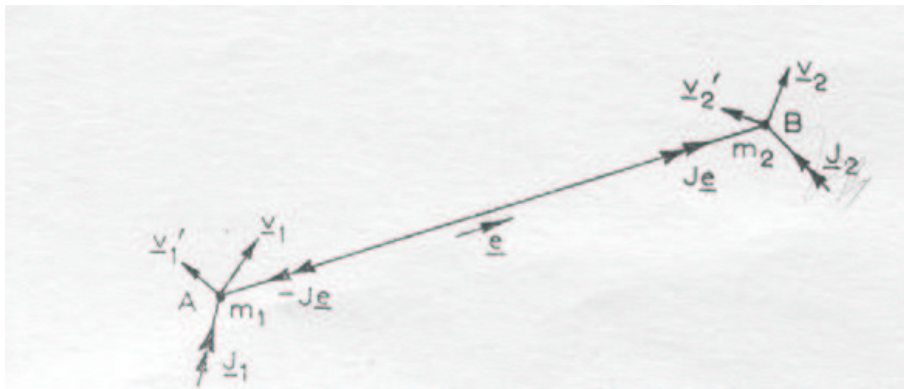
I.é. Independentemente da origem ser fixa ou estar em movimento, o vetor soma total dos momentos das forças impulso externas sobre ele é igual ao aumento instantâneo do momentum angular produzido sobre a origem.

Exemplo 1.5.2. Duas partículas, de massas m_1 e m_2 em A e B são ligadas por um eixo rígido sem massa \overline{AB} . Suas velocidades \vec{v}_1 e \vec{v}_2 mudam repentinamente pela aplicação de forças impulsivas externas \vec{J}_1 e \vec{J}_2 . Prove que a magnitude \mathcal{F} da reação ao impulso do eixo em m_1 é

$$\left\{ \frac{m_1 m_2 \vec{e}}{(m_1 + m_2)} \right\} \cdot \left(\frac{\vec{J}_2}{m_2} - \frac{\vec{J}_1}{m_1} \right)$$

onde \vec{e} é o vetor unitário em \overline{AB} . Também prove que a energia do sistema cresce a uma taxa

$$\vec{J}_1 \cdot \vec{v}_1 + \vec{J}_2 \cdot \vec{v}_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{J}_1^2}{m_1} + \frac{\vec{J}_2^2}{m_2} \right) - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{\mathcal{F}^2}{(m_1 m_2)}$$



Sejam \vec{v}_1' , \vec{v}_2' as velocidades de A e B imediatamente após a ação. O eixo \overline{AB} recebe um impulso $\mathcal{F}\vec{e}$ em m_2 e $-\mathcal{F}\vec{e}$ em m_1 .

Então $\vec{J}_1 - \mathcal{F}\vec{e}$ é o impulso resultante em m_1 ,

$$\vec{J}_1 - \mathcal{F}\vec{e} = m_1(\vec{v}_1' - \vec{v}_1).$$

Assim como $\vec{J}_2 + \mathcal{F}\vec{e}$ é o impulso resultante em m_2 ,

$$\vec{J}_2 + \mathcal{F}\vec{e} = m_2(\vec{v}_2' - \vec{v}_2).$$

Das duas últimas equações, obtemos

$$\vec{e} \cdot (\vec{v}_1' - \vec{v}_1) - \vec{e} \cdot (\vec{v}_2' - \vec{v}_2) = \vec{e} \cdot \left\{ \frac{(\vec{J}_1 - \mathcal{F}\vec{e})}{m_1} - \frac{(\vec{J}_2 + \mathcal{F}\vec{e})}{m_2} \right\}.$$

Mas, como \overline{AB} é uma conexão rígida,

$$\vec{e} \cdot (\vec{v}_1' - \vec{v}_1) = \vec{e} \cdot (\vec{v}_2' - \vec{v}_2) \quad \therefore \quad 0 = \vec{e} \cdot \left(\frac{\vec{J}_1}{m_1} - \frac{\vec{J}_2}{m_2} \right) - \mathcal{F} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right),$$

ou,

$$\mathcal{F} = -\{m_1 m_2 \vec{e}(m_1 + m_2)\}^{-1} \cdot \left\{ \frac{\vec{J}_2}{m_2} - \frac{\vec{J}_1}{m_1} \right\}.$$

A Energia cinética é, originalmente,

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2,$$

e após a aplicação das forças impulsivas fica

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left\{ \vec{v}_1 + \frac{(\vec{J}_1 - \mathcal{F} \vec{e})}{m_1} \right\}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left\{ \vec{v}_2 + \frac{(\vec{J}_2 + \mathcal{F} \vec{e})}{m_2} \right\}^2 \\ &= T + \vec{v}_1 \cdot (\vec{J}_1 - \mathcal{F} \vec{e}) + \vec{v}_2 \cdot (\vec{J}_2 + \mathcal{F} \vec{e}) + \frac{(\vec{J}_1 - \mathcal{F} \vec{e})^2}{2m_1} + \frac{(\vec{J}_2 + \mathcal{F} \vec{e})^2}{2m_2}. \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} T' - T &= \vec{v}_1 \vec{J}_1 + \vec{v}_2 \vec{J}_2 + \mathcal{F}(\vec{e} \cdot \vec{v}_2 - \vec{e} \cdot \vec{v}_1) + \frac{\vec{J}_1^2 - 2\mathcal{F} \vec{e} \cdot \vec{J}_1 + \mathcal{F}^2}{2m_1} \\ &\quad + \frac{\vec{J}_2^2 - 2\mathcal{F} \vec{e} \cdot \vec{J}_2 + \mathcal{F}^2}{2m_2} \\ &= \vec{v}_1 \vec{J}_1 + \vec{v}_2 \vec{J}_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{J}_1^2}{m_1} + \frac{\vec{J}_2^2}{m_2} \right) + (m_1 + m_2) \frac{\mathcal{F}^2}{(2m_1 m_2)} \\ &\quad + \mathcal{F} \left[\frac{(\vec{e} \cdot \vec{J}_2)}{m_2} - \frac{(\vec{e} \cdot \vec{J}_1)}{m_1} \right]. \end{aligned}$$

Da expressão da derivada de \mathcal{F} , $(\vec{e} \cdot \vec{J}_2)/m_2 - (\vec{e} \cdot \vec{J}_1)/m_1 = -(m_1 + m_2)\mathcal{F}/m_1 m_2$. Então segue o resultado.

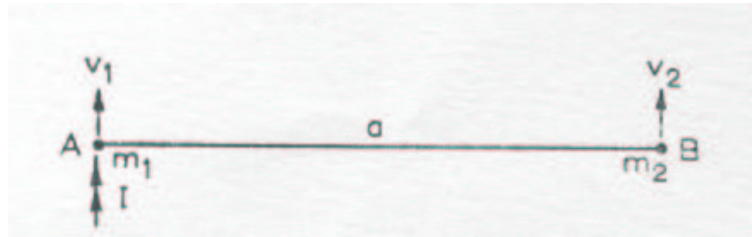
Exemplo 1.5.3. Duas partículas de massas, m_1 e m_2 em A e B, são conectadas por uma barra horizontal. Se um impulso \vec{I} é aplicado em A no plano da tabela e perpendicular a AB, encontre a velocidade inicial de A e B.

Seja a o comprimento da barra. O centróide move-se na direção do impulso, e assim A e B devem mover-se na mesma direção. O ganho de momentum linear é $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$.

$$\therefore m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{I}.$$

O momento do impulso sobre B é igual ao ganho de momentum angular do sistema sobre B.

$$\therefore \vec{I} a = m_1 \vec{v}_1 a,$$



ou,

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{I}}{m_1}$$

Então,

$$\vec{v}_2 = 0.$$

1.5.5 Impacto Elástico

A Lei de Newton da restituição diz que quando duas partículas colidem, suas componentes de velocidade relativa ao longo da componente normal em comum a eles após do impacto, conduzem à uma taxa constante - e àquela antes do impacto, onde e é uma constante para dados materiais e $0 \leq e \leq 1$. Esta constante é chamada de coeficiente de restituição. Para um impacto perfeitamente elástico, $e = 1$. Para um impacto inelástico, $e = 0$. Nos demais casos, e fica entre estes dois valores. A lei é experimental em caracter.



Figura 1.4:

A figura à esquerda do gráfico 1.4 mostra duas pequenas partículas esféricas de massas m_1 e m_2 antes do impacto: m_1 tem componentes de velocidade $[u_1, v_1]$ e ângulo reto em relação aos centros, enquanto m_2 tem componentes de velocidade $[u_2, v_2]$. no momento do impacto, um impulso que ocorre no ponto de contato das duas esferas, alterando as componentes da reta que liga os centros para valores (figura à direita).

Aplicando o princípio da conservação do momentum linear ao longo da reta dos centros, temos

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u'_1 + m_2 u'_2.$$

Aplicando a Lei de Newton da restituição,

$$u'_1 - u'_2 = -e(u_1 - u_2).$$

A Energia Cinética perdida ΔT é dada por

$$\Delta T = \frac{1}{2}m_1(u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{2}m_2(u_2^2 + v_2^2) - \frac{1}{2}m_1(u_1'^2 + v_1'^2) - \frac{1}{2}m_2(u_2'^2 + v_2'^2),$$

isto é,

$$\Delta T = \frac{1}{2}m_1(u_1^2 - u_1'^2) + \frac{1}{2}m_2(u_2^2 - u_2'^2).$$

Das equações, $m_1u_1 + m_2u_2 = m_1u'_1 + m_2u'_2$ e $u'_1 + u'_2 = -e(u_1 - u_2)$, encontramos

$$\begin{aligned} u_1 - u'_1 &= m_2 \frac{(1+e)(u_1 - u_2)}{(m_1 + m_2)}, \\ u_2 - u'_2 &= -m_1 \frac{(1+e)(u_1 - u_2)}{(m_1 + m_2)}, \\ u_1 + u'_1 &= \frac{\{[2m_1 + (1-e)m_2]u_1 + m_2(1+e)u_2\}}{(m_1 + m_2)}, \\ u_2 + u'_2 &= \frac{\{m_1(1+e)u_1 + [2m_2 + (1+e)m_1]u_2\}}{(m_1 + m_2)}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação para ΔT ,

$$\Delta T = \frac{1}{2}m_1m_2 \frac{(1-e^2)(u_1 - u_2)^2}{(m_1 + m_2)},$$

mostrando que não há perda de energia para um impacto perfeitamente elástico.

1.6 Dinâmica de Corpos Rígidos

1.6.1 Momentos e Produtos de Inércia

$P(x, y, z) \Rightarrow$ simples partícula de massa m de um sistema dado, cujas coordenadas são fornecidas com respeito à um conjunto tri-retângular de eixos sobre um ponto O . Escrevemos

$$\begin{aligned} A &= \sum m(y^2 + z^2), & B &= \sum m(z^2 + x^2), & C &= \sum m(x^2 + y^2), \\ D &= \sum mzy, & E &= \sum mzx, & F &= \sum mxy \end{aligned}$$

onde os somatórios são levados por todo sistema de partículas. Neste caso, quando a distribuição é contínua, as expressões são substituídas por

$$A = \int (y^2 + z^2)dm, \dots$$

a integração, agora, é feita sobre o sistema contínuo. as quantidades A, B, C são chamadas de **momentos de inércia** ou **segundos momentos de distribuição de massa** sobre os eixos coordenados $-x$, $-y$, $-z$, respectivamente. D, E, F são denominados **produtos de inércia** com respeito aos pares de eixos (Oy, Oz) ; (Oz, Ox) ; (Ox, Oy) , respectivamente.

Exemplo 1.6.1. *Determine o momento de inércia da distribuição sobre o eixo partindo de O tendo como cossenos diretores $[\lambda, \mu, \nu]$ em termos destes cossenos diretores e A, B, C, D, E e F.*

Seja $\vec{a} = [\lambda, \mu, \nu]$, $\vec{r} = [x, y, z]$. então a distância d de $P(x, y, z)$ para \vec{a} é dada por

$$d = |\vec{r} \wedge \vec{a}|.$$

Agora,

$$\vec{r} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = [(vy - \mu z), (\lambda z - \nu x), (\mu x - \lambda y)].$$

Logo,

$$\begin{aligned} \vec{I} &= \sum m d^2 = \sum m \{ (vy - \mu z)^2 + (\lambda z - \nu x)^2 + (\mu x - \lambda y)^2 \} \\ &= A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 - 2\mu\nu D - 2\nu\lambda E - 2\lambda\mu F. \end{aligned}$$

1.6.2 O Teorema dos eixos Paralelos e Perpendiculares

- (i) Seja $G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ o **centro** do sistema acima e sejam os eixos paralelos a ele e à O. Portanto, seja (x', y', z') as novas coordenadas de P referente a estes eixos paralelos a G tal que

$$x = \bar{x} + x', \quad y = \bar{y} + y', \quad z = \bar{z} + z'$$

Então,

$$\begin{aligned} A &= \sum m \{ (\bar{y} + y')^2 + (\bar{z} + z')^2 \} \\ &= M(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) + A' + 2\bar{y} \sum m y' + 2\bar{z} \sum m z', \end{aligned}$$

onde $M = \sum m$ (massa total do sistema), $A' = \sum m(y'^2 + z'^2)$ (momento de inércia sobre o eixo paralelo $-x$ sobre G). Mas da propriedade do centróide, temos

$$\sum m y' = 0 = \sum m z'.$$

Conseqüentemente,

$$A = A' + M h_1^2 = A' + M (\sqrt{y'^2 + z'^2})^2,$$

Teorema dos eixos paralelos para momentos de inércia

pois, $h_1 = \sqrt{y'^2 + z'^2}$ (distância do centróide ao eixo x).

Após isto, temos

$$D = \sum m(\bar{y} + \hat{y})(\bar{z} + \hat{z}) = M\bar{y}\bar{z} + \mathcal{D}$$

Teorema dos eixos paralelos para produtos de inércia

onde, $D' = \sum my'z'$ (produto da inércia com respeito aos eixos y' e z' sobre G)

(ii) Agora vamos supor que a distribuição é tal que para todas as partículas repousam no plano $z = 0$. Então, temos

$$A = \sum my^2, \quad B = \sum mx^2, \quad C = \sum m(x^2 + y^2),$$

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = \sum mxy.$$

Então, $C = A + B$.

1.6.3 Momento Angular de um Corpo Rígido sobre um Ponto Fixo e sobre Eixos Fixos

Suponha que P tem velocidade \vec{v} e que a distribuição é um corpo rígido movendo-se sobre um eixo O com vetor velocidade angular $\vec{\omega}$. Se $\overline{OP} \equiv \vec{r}$, então $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ e o vetor momentum angular sobre O é

$$\vec{H} = \sum (\vec{r} \wedge m\vec{v}) = \sum [\vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})] = \sum mr^2\vec{\omega} - \sum m(\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r}.$$

que é o vetor momentum angular de um corpo rígido sobre o corpo O . Escrevendo

$$\vec{r} = [x, y, z], \quad \vec{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3], \quad \vec{H} = [h_1, h_2, h_3],$$

$$\begin{aligned} h_1 &= \sum mr^2\omega_1 - \sum m(\omega_1x + \omega_2y + \omega_3z)x \\ &= \left\{ \sum m(y^2 + z^2) \right\} \omega_1 - \left\{ \sum mxy \right\} \omega_2 - \left\{ \sum mzx \right\} \omega_3 \\ &= A\omega_1 + F\omega_2 + E\omega_3. \end{aligned}$$

Em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

onde a matriz 3×3 pode ser chamada de matriz inércia μ .

1.6.4 Eixos Principais

Se no caso acima o eixo de rotação instantânea especificado por $\vec{\omega}$ é paralelo ao vetor velocidade angular \vec{H} , este eixo é chamado eixo principal do ponto O do corpo rígido. Podemos, então, escrever

$$\vec{\omega} = \omega \vec{a}, \quad \vec{H} = H \vec{a}, \quad H = n\omega,$$

tal que \vec{a} é o vetor unitário em um eixo principal sobre O . A equação

$$\vec{H} = \sum mr^2 \vec{\omega} - \sum m(\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}$$

resulta

$$\left(\sum mr^2 - n \right) \vec{a} = \sum m(\vec{r} \cdot \vec{a}) \vec{r}.$$

Substitua, nesta última equação, $\vec{r} = [x, y, z]$, $\vec{a} = [\lambda, \mu, \nu]$ tal que

$$\left(\sum mr^2 - n \right) (\lambda \vec{i} + \mu \vec{j} + \nu \vec{k}) = \sum m(\lambda x + \mu y + \nu z)(x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}).$$

a equação dos coeficientes dos vetores unitários nos eixos coordenados fica,

$$(A - n)\lambda - F\mu - E\nu = 0,$$

$$(B - n)\mu - D\nu - F\lambda = 0,$$

$$(C - n)\nu - E\lambda - D\mu = 0.$$

A condição é

$$\begin{vmatrix} A - n & -F & -E \\ -F & B - n & -D \\ -E & -D & C - n \end{vmatrix} = 0.$$

Dado que a matriz inercial é Simétrica sabemos que ses autovalores são reais A_1^* , A_2^* e A_3^* .

A_1^* , A_2^* e A_3^* são os momentos de inércia sobre os eixos principais chamados de momentos principais de inércia do sistema. Portanto,

$$\sum mr_1 \vec{r} \cdot \vec{a}_2 = \sum (mr^2 - n_1) \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2;$$

i.é,

$$\sum mr_1 r_2 = 0, \quad \dots$$

Então, o produto de inércia com respeito aos eixos principais é nulo e a matriz inércia com respeito aos eixos principais é

$$\begin{bmatrix} A_1^* & 0 & 0 \\ 0 & A_2^* & 0 \\ 0 & 0 & A_3^* \end{bmatrix}.$$

Então os momentos sobre os eixos principais $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ são

$$h_1 = A_1^* \omega_1, \quad h_2 = A_2^* \omega_2, \quad h_3 = A_3^* \omega_3,$$

e o vetor momentum angular sobre O é dado por

$$\vec{H} = A_1^* \omega_1 \vec{a}_1 + A_2^* \omega_2 \vec{a}_2 + A_3^* \omega_3 \vec{a}_3.$$

Podemos observar três casos para eixos principais de qualquer ponto O de um corpo rígido:

1. Existem exatamente três eixos mutuamente perpendiculares com n 's todos diferentes. Este é o caso que geralmente ocorre.
2. Um eixo principal e toda reta sobre O perpendicular a ela é um eixo principal. Um cilindro circular com O como ponto médio do eixo de simetria é um destes casos. este eixo e todas as retas sobre O perpendiculares a ele são eixos principais.
3. Existem eixos perpendiculares para os quais os n 's são todos os mesmos. Este caso ocorre quando O é o centro de uma esfera sólida homogênea.

Observação 8. Não é verdade que eixos principais são necessariamente eixos de simetria.

1.6.5 Energia Cinética de um Corpo Rígido rotando sobre um ponto fixo

Seja um corpo rígido rotando instantaneamente com vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ sobre um eixo sobre um ponto fixo O de um corpo rígido. Seja m a massa de uma partícula P do corpo onde $\overline{OP} = \vec{r}$. Então a velocidade de P é $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$, sua Energia Cinética é $1/2m(\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2$, e assim a Energia Cinética total do corpo é dada por

$$T = \frac{1}{2} \sum m(\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2.$$

Agora,

$$(\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2 = (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot [\vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})].$$

$$\therefore \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum \{\vec{r} \wedge m(\vec{\omega} \wedge \vec{r})\} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{H},$$

onde o vetor momentum angular sobre O é

$$\vec{H} = \sum \{\vec{r} \wedge m(\vec{\omega} \wedge \vec{r})\}.$$

Suponha $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ denota os três eixos principais sobre O e sejam A^*, B^*, C^* os principais momentos de inércia. Seja

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{a}_1 + \omega_2 \vec{a}_2 + \omega_3 \vec{a}_3.$$

Então os eixos são eixos principais,

$$\vec{H} = A^* \omega_1 \vec{a}_1 + B^* \omega_2 \vec{a}_2 + C^* \omega_3 \vec{a}_3.$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} (A^* \omega_1 \vec{a}_1 + B^* \omega_2 \vec{a}_2 + C^* \omega_3 \vec{a}_3).$$

Agora, usando $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{\omega} = \omega(\lambda\vec{i} + \mu\vec{j} + \nu\vec{k})$, $[\lambda, \mu, \nu]$ como os D.C.s do eixo instantâneo de rotação.

$$\therefore \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \omega \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

e assim $(\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2 = \omega^2 \{(\mu z - \nu y)^2 + (\nu x - \lambda z)^2 + (\lambda y - \mu x)^2\}$. Então encontramos

$$T = \frac{1}{2} \sum m (\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \vec{I},$$

onde $\vec{I} = A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 - 2D\mu\nu - 2E\nu\lambda - 2F\lambda\mu$.

1.6.6 Elipsóide de Momento- Sistemas com Momentos iguais

Considerando o quadrático de \vec{I} (visto anteriormente), temos

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Exz - 2Fxy = M\varepsilon^4$$

onde ε^4 é a constante de comprimento e $M = \sum m$.

Seja P um ponto da reta $[\lambda, \mu, \nu]$ distante R de O tal que as coordenadas de P são

$$\begin{cases} x = \lambda R \\ y = \mu R \\ z = \nu R \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad [x, y, z] = [\lambda, \mu, \nu]$$

$$A(\lambda R)^2 + B(\mu R)^2 + C(\nu R)^2 - 2D(\mu R)(\nu R) - 2E(\lambda R)(\nu R) - 2F(\lambda R)(\mu R) = M\varepsilon^4$$

$$\{A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 - 2D\mu\nu - 2E\lambda\nu - 2F\lambda\mu\}R^2 = M\varepsilon^4$$

$$\vec{I}R^2 = M\varepsilon^4$$

$$\vec{I} = \frac{M\varepsilon^4}{R^2}$$

o que mostra que para todos $[\lambda, \mu, \nu]$, R é real e finito, então $\vec{I} > 0$. Podemos concluir, então, que o quadrático acima é um elipsóide tendo como centro O: *chamado elipsóide de momento da distribuição para o ponto O*. Obtemos,

$$A^*x^2 + B^*y^2 + C^*z^2 = M\varepsilon^4$$

onde A^* , B^* , C^* são os momentos principais de inércia. Portanto os eixos principais da distribuição coincidem com os eixos principais do elipsóide de momento.

Exemplo 1.6.2. Um bloco sólido retangular uniforme de massa M e dimensões $2a \times 2b \times 2c$. Encontre a equação do elipsóide de momento para um canto O do bloco, referente as arestas sobre O como coordenadas e então determine o momento de inércia sobre OO' , onde O' é o ponto diagonalmente oposto a O .

Faça os eixos x, y, z como os comprimentos $2a, 2b, 2c$, então

$$\begin{aligned} A &= \frac{M}{3}(b^2 + c^2) + M(b^2 + c^2) = \frac{4M}{3}(b^2 + c^2) \\ B &= \frac{4M}{3}(c^2 + a^2) \\ C &= \frac{4M}{3}(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Portanto, se ρ denota a densidade do material,

$$\begin{aligned} D &= \int_{z=0}^{2c} \int_{y=0}^{2b} (2a\rho \, dy \, dz \, yz) \\ &= \frac{1}{2}a\rho [y^2]_0^{2b} [z^2]_0^{2c} \\ &= 8a\rho b^2 c^2 \\ &= Mbc \end{aligned}$$

Observação 9. Este resultado para D poderia ser mais facilmente obtido usando o Teorema dos eixos para produtos de inércia.

Similarmente, $E = Mca$, $F = Mab$.

Então a equação do momento elipsóide em O , fica

$$\frac{4M}{3}\{(b^2 + c^2)x^2 + (c^2 + a^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2\} - 2M(bcyz + cazx + abxy) = M\varepsilon^4.$$

as coordenadas de O' são $(2a, 2b, 2c)$ e a distância OO' é $R = 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Assim, o momento de inércia sobre OO' é

$$\frac{M\varepsilon^4}{R^2} = \frac{2}{3}M \frac{(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Definição 1.6.1.

1. Se dois sistemas são tais que eles tem momentos de inércia iguais sobre todas as retas do espaço, então eles são ditos equipotenciais.
2. As condições necessárias e suficientes para que dois sistemas sejam equipotenciais são expressas pelo seguinte teorema

3. "Se dois sistemas são tais que ambos tem (i) a mesma massa total; (ii) o mesmo centróide, (iii) o mesmo eixo principal e momentos de inércia do centróide, então eles são equipotenciais"

Exemplo 1.6.3. Encontre o sistema "equimomental" de partículas para uma barra AB de massa M .

Seja O o centróide da barra e $2a$ o seu comprimento. Partículas $m, m, M - 2m$ em A, B, O tem o mesmo centróide e massa total que a barra \overline{AB} . Elas também tem o mesmo Momento de Inércia (nulo) sobre AB.

Para encontrar m , equacione os Momentos de inércia sobre uma bisetor perpendicular sobre O.

$$2ma^2 = \frac{1}{3}Ma^2 \quad \therefore m = \frac{1}{6}M$$

O sistema equimomental é:

$$\begin{cases} \frac{1}{6}M \text{ em A} \\ \frac{1}{6}M \text{ em B} \\ M - 2 \times \frac{1}{6}M \text{ em O} \end{cases} \hookrightarrow \frac{6M - 2M}{6} = \frac{4}{6}M = \frac{2}{3}M \text{ em O}$$

1.7 Problemas Bidimensionais em Dinâmica de Corpos Rígidos

Dizemos que um corpo rígido se move em duas dimensões quando todas as partículas movem-se paralelas ao plano fixo. Em particular, uma lâmina rígida movendo-se em seu próprio plano é um importante caso de movimento bidimensional. Em geral, o movimento de uma lâmina rígida consiste de uma rotação e uma translação e que exista um ponto no plano que está instantaneamente em repouso. Mais ainda, conhecendo a velocidade angular instantânea da lâmina e a velocidade linear do centróide, podemos determinar a velocidade de quaisquer outras partículas em determinado instante.

Para o movimento de uma distribuição planar rígida, duas coordenadas são necessárias para fixar a posição do centro de massa e uma coordenada angular para fixar a orientação da lâmina. Então três variáveis independentes são envolvidas no movimento instantâneo da lâmina; duas componentes da velocidade linear do seu centro de massa e uma componente da velocidade angular da distribuição. A análise do movimento do corpo rígido em duas dimensões é construída da aplicação dos princípios desenvolvidos anteriormente para a determinação destas três variáveis.

1.7.1 Problemas Ilustrando as Leis do Movimento

conhecendo as magnitudes e posições das forças que agem num corpo rígido, encontramos (i) aceleração do centro de massa; (ii) aceleração angular.

Em (i) aplicamos \hookrightarrow a translação do centro de massa do corpo rígido sob o sistema de forças presentes é a mesma que a de partículas de massas iguais concentradas no centro de massa sob ação de todas as forças paralelas a elas agindo no centro de massa.

Em (ii) podemos usar o fato de que o momento total das forças externas sobre qualquer ponto da distribuição é igual a taxa de variação total do momento da distribuição sobre aquele ponto, independentemente do ponto ser fixo ou não. Quando o ponto é fixo ou quando este é o centro de massa, o momento da taxa de variação do momentum é igual a taxa de variação do momento do momentum sobre o ponto considerado.

Capítulo 2

Parte II

2.1 Alguns Problemas Tridimensionais em Dinâmica Vetorial

2.1.1 Equações Dinâmicas de Euler para o Movimento de um Corpo Rígido sobre um Ponto Fixo

Sejam OX, OY, OZ os três eixos principais sobre O , $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ os vetores unitários em $\overline{OX}, \overline{OY}, \overline{OZ}$. Em um tempo t , o corpo tem velocidade angular $\vec{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$, referentes aos eixos acima, assim, o momento do momentum sobre O é instantaneamente

$$A\omega_1\vec{i} + B\omega_2\vec{j} + C\omega_3\vec{k}$$

onde A, B, C são os momentos principais de inércia sobre estes eixos.

A taxa de variação do momento do momentum sobre O é

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{H},$$

onde $\vec{\omega}$ é o giro do corpo, $\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ denota a taxa de mudança do momentum angular relativo ao corpo

$$\therefore \frac{d\vec{H}}{dt} = A\dot{\omega}_1\vec{i} + B\dot{\omega}_2\vec{j} + C\dot{\omega}_3\vec{k} + \vec{\omega} \wedge \vec{H}.$$

Então O é fixo,

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = L,$$

onde

$$L = [L_1, L_2, L_3]$$

é o vetor momento da força externa sobre O .

$$\begin{cases} L_1 = A\dot{\omega}_1 - (B - C)\omega_2\omega_3 \\ L_2 = B\dot{\omega}_2 - (C - A)\omega_3\omega_1 \\ L_3 = C\dot{\omega}_3 - (A - B)\omega_1\omega_2 \end{cases}$$

que são conhecidas como equações dinâmicas de Euler.

O caso especial do movimento sobre O sem forças é importante. As equações dinâmicas, ficam

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_1 - (B - C)\omega_2\omega_3 = 0 \\ B\dot{\omega}_2 - (C - A)\omega_3\omega_1 = 0 \\ C\dot{\omega}_3 - (A - B)\omega_1\omega_2 = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

multiplicando estas três equações por $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ e somando

$$A\omega_1\dot{\omega}_1 + B\omega_2\dot{\omega}_2 + C\omega_3\dot{\omega}_3 = 0,$$

integrando

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = cte, \quad (2.2)$$

Então o L.H.S. desta equação é $2T$, T sendo a Energia Cinética (3.7) expressa a constância da E.C. durante o movimento.

Multiplicando (3.11) por $A\omega_1, B\omega_2, C\omega_3$ e somando

$$A^2\omega_1\dot{\omega}_1 + B^2\omega_2\dot{\omega}_2 + C^2\omega_3\dot{\omega}_3 = 0,$$

quando integrado resulta,

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = cte.$$

que expressa a constância da magnitude do momentum angular \vec{H} durante o movimento. Fisicamente isto é atribuído ao momento zero da força sobre O .

Exemplo 2.1.1. *Um corpo rígido é livre para rotar sobre o seu centróide G , os momentos principais de inércia são 7, 25, 32 unidades respectivamente. Ao corpo é fornecida uma velocidade Ω sobre a linha sob a qual G tem taxas direcionais de 4:0:3. Mostre que após um certo tempo t as componentes de velocidade angular sobre o eixo principal de inércia de G são*

$$\frac{4}{5}\Omega \cos \varphi, \frac{4}{5}\Omega \sin \varphi, \frac{3}{5}\Omega \cos \varphi$$

onde $\tan(\varphi/2) = \tanh(3\Omega t/10)$.

Deduza então, que o corpo roda últimamente sobre o segundo eixo principal de momento.

Se o corpo rota sobre o seu centróide, existe o momento zero sobre este ponto. Fazendo $A = 7$, $B = 25$ e $C = 32$ e $[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ como as velocidades angulares sobre as P.As do tempo t ,

$$\begin{cases} L_1 = A\dot{\omega}_1 - (B - C)\omega_2\omega_3 = 7\dot{\omega}_1 - (25 - 32)\omega_2\omega_3 = 7\dot{\omega}_1 - 7\omega_2\omega_3 = \dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3 = 0 \\ L_2 = B\dot{\omega}_2 - (C - A)\omega_3\omega_1 = 25\dot{\omega}_2 - (32 - 7)\omega_3\omega_1 = 25\dot{\omega}_2 - 25\omega_3\omega_1 = \dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1 = 0 \\ L_3 = C\dot{\omega}_3 - (A - B)\omega_1\omega_2 = 32\dot{\omega}_3 - (7 - 25)\omega_1\omega_2 = 32\dot{\omega}_3 - 18\omega_1\omega_2 = 16\dot{\omega}_3 - 9\omega_1\omega_2 = 0 \end{cases}$$

Assim,

$$\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3 = 0 \quad (2.3)$$

$$\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1 = 0 \quad (2.4)$$

$$16\dot{\omega}_3 - 9\omega_1\omega_2 = 0 \quad (2.5)$$

Os valores iniciais da velocidade angular são $\omega_{10} = \frac{4}{5}\Omega$, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{30} = \frac{3}{5}\Omega$

Multiplicando (2.3) por ω_1 e (2.4) por ω_2

$$\dot{\omega}_1\omega_1 + \omega_1\omega_2\omega_3 = 0$$

$$\dot{\omega}_2\omega_2 + \omega_3\omega_1\omega_2 = 0$$

que somando, fica

$$\dot{\omega}_1\omega_1 + \dot{\omega}_2\omega_2 = 0$$

integrando, obtemos

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 - c = 0$$

Aplicando as condições iniciais $\omega_{10} = \frac{4}{5}\Omega$ e $\omega_{20} = 0$, resulta

$$\left(\frac{4}{5}\Omega\right)^2 - c = 0 \Rightarrow c = \frac{16}{25}\Omega^2$$

Logo,

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{16}{25}\Omega^2.$$

Multiplicando (2.4), (3.15) por $9\omega_2$ e ω_3 , respectivamente

$$\begin{cases} 9\dot{\omega}_2\omega_2 - 9\omega_3\omega_1\omega_2 = 0 \\ 16\dot{\omega}_3\omega_3 - 9\omega_1\omega_2\omega_3 = 0 \end{cases}$$

Somando,

$$9\dot{\omega}_2\omega_2 + 16\dot{\omega}_3\omega_3 = 0$$

integrando, obtemos

$$9\omega_2^2 + 16\omega_3^2 = d_a$$

onde d_a é a constante de integração, e como $\omega_{20} = 0$ e $\omega_{30} = \frac{3}{5}\Omega$, temos

$$0 + 16\left(\frac{3}{5}\Omega\right)^2 = d_a \Rightarrow d_a = 16\frac{9}{25}\Omega^2 \Rightarrow d_a = \frac{144}{25}\Omega^2$$

Portanto,

$$\begin{cases} \dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1 = 0 \\ \omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{16}{25}\Omega^2 \hookrightarrow \omega_1^2 = \frac{16}{25}\Omega^2 - \omega_2^2 \\ 9\omega_2^2 + 16\omega_3^2 = 0 \hookrightarrow \omega_3^2 = \frac{1}{16}\frac{144}{25}\Omega^2 - \frac{1}{16}9\omega_2^2 = \frac{9}{25}\Omega^2 - \frac{9\omega_2^2}{16} \end{cases}$$

Logo,

$$dt = \frac{d\omega_2}{\omega_3\omega_1} = \frac{\omega_1 d\omega_2}{\omega_3\omega_1^2} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_3}\right) \frac{d\omega_2}{\omega_1^2} = \frac{4}{3} \frac{d\omega_2}{\left[\left(\frac{4}{5}\Omega\right)^2 - \omega_2^2\right]}$$

que integrando, resulta

$$t = \left(\frac{5}{3\Omega}\right) \text{th}^{-1}\left(\frac{5\omega_2}{4\Omega}\right),$$

ou

$$\omega_2 = \left(\frac{4\Omega}{5}\right) \text{th}\left(\frac{3\Omega t}{5}\right) = \frac{4}{5}\Omega \text{ sen } \varphi.$$

Substituindo esta última equação em

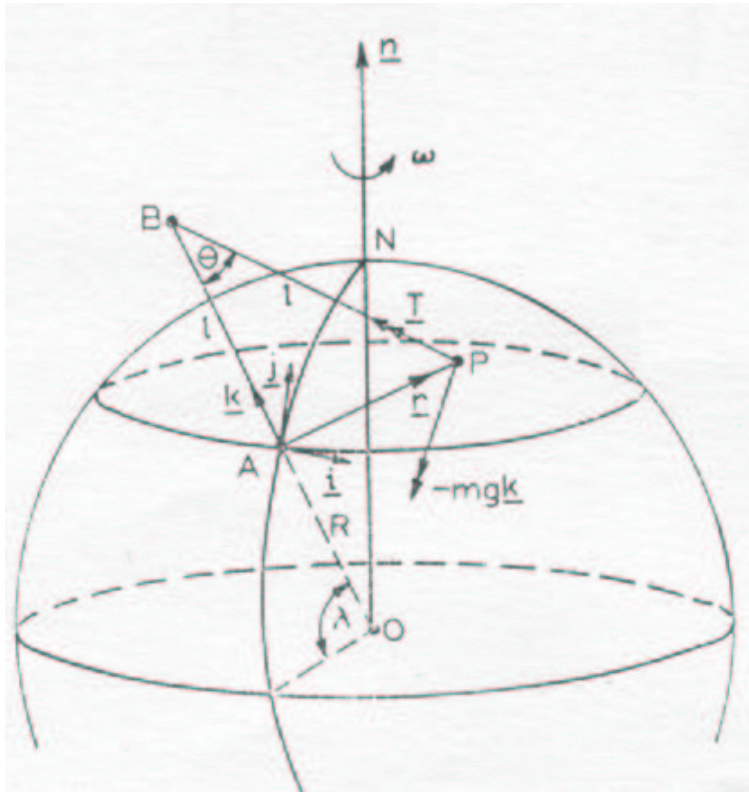
$$\begin{cases} \omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{16\Omega^2}{25} \\ 9\omega_2^2 + 16\omega_3^2 = \frac{144\Omega^2}{25} \end{cases}$$

obtemos os resultados para ω_1 e ω_3 .

Portanto, como $t \rightarrow \infty$, $\text{th}\left(\frac{3\Omega t}{5}\right) \rightarrow 1$, e assim $\varphi/2 \rightarrow \pi/4$ ou $\varphi \rightarrow \pi/2$. Assim, $\omega_1 \rightarrow 0$, $\omega_2 \rightarrow (4/5)\Omega$, $\omega_3 \rightarrow 0$, mostrando que a rotação sobre o eixo de momento intermediário de inércia continua.

2.1.2 A Rotação da Terra

Se em problemas dinâmicos, nos referimos ao movimento de um corpo em relação ao conjunto de eixos fixos na Terra, então haveriam efeitos de pequenas rotações no movimento do corpo que seriam considerados. Tais efeitos, podem, em muitos casos, ser detectados experimentalmente quando medidas suficientemente exatas são feitas e de fato comprovam a existência de rotação na Terra. Agora, vamos desenvolver a teoria do Pêndulo de Foucault - uma invenção normalmente usada para demonstrar a rotação na Terra. a figura



mostra um pêndulo simples de comprimento ℓ e prumo P de massa m suspenso livremente de B, um ponto verticalmente acima de A na superfície da Terra onde o ângulo de latitude é λ . A Terra rota com velocidade angular constante ω sob um eixo específico por um vetor unitário \vec{n} . Em t , $\angle PBA = \theta$, com θ pequeno.

Em A, tome os vetores mutuamente ortogonais \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , ao longo do círculo de latitude, o círculo de longitude AN, e a vertical OAB respectivamente, tal que $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, ... Seja $\overline{AP} \equiv \vec{r}$, $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$.

Dos resultados sobre rotação de eixos discutidos anteriormente, temos

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}, \\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + 2\vec{\omega} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \\ &= \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + 2\vec{\omega} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}),\end{aligned}$$

onde $\vec{\omega}$ é um vetor constante. Esta aceleração de P relativa a A e assim a aceleração total de P é \vec{f} onde

$$\vec{f} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + 2\vec{\omega} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) + \vec{f}_A.$$

Agora ω é pequeno ($= 2\pi$ rad por 24 horas) e vamos negligenciar termos de ordem ω^2 . Assim, $|\vec{f}_A| = O(\omega^2)$, para a primeira ordem, temos

$$\vec{f} \approx \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + 2\vec{\omega} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}.$$

Denotando por \vec{T} a tensão de fio PB, temos para o movimento do prumo

$$\vec{T} - mg\vec{k} \approx m \left[\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + 2\vec{\omega} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right], \quad LAOP \text{ é pequeno}$$

para a primeira ordem.

Seja (x, y, z) as coordenadas cartesianas de P para $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ e assim

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \quad \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}.$$

Agora, $\vec{\omega} = \omega\vec{n} = \omega(\cos\lambda\vec{j} + \sin\lambda\vec{k})$ e assim

$$\begin{aligned}\vec{\omega} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} &= \omega \begin{vmatrix} 0 & \cos\lambda & \sin\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \\ &= \omega [(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda)\vec{i} + \dot{x}\sin\lambda\vec{j} - \dot{x}\cos\lambda\vec{k}].\end{aligned}$$

$$\vec{T} - mg\vec{k} = m \{ [\ddot{x} + 2\omega(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda)]\vec{i} + [\ddot{y} + 2\omega\dot{x}\sin\lambda]\vec{j} + [\ddot{z} - 2\omega\dot{x}\cos\lambda]\vec{k} \}$$

assim, obtemos que

$$\begin{aligned}\vec{T} \cdot \vec{i} &= m[\ddot{x} + 2\omega(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda)] \\ \vec{T} \cdot \vec{j} &= m[\ddot{y} + 2\omega\dot{x}\sin\lambda] \\ \vec{T} \cdot \vec{k} &= mg + m[\ddot{z} - 2\omega\dot{x}\cos\lambda]\end{aligned} \tag{2.6}$$

Agora, para primeira ordem temos

$$\vec{T} \cdot \vec{i} = -\frac{Tx}{\ell};$$

$$\vec{T} \cdot \vec{j} = -\frac{Ty}{\ell};$$

$$\vec{T} \cdot \vec{k} = T.$$

Portanto, negligenciando \dot{z} , simplificamos (2.6) para

$$m[\ddot{x} - 2\omega\dot{y} \operatorname{sen}\lambda] = -\frac{Tx}{\ell} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} - 2\omega\dot{y} \operatorname{sen}\lambda = -\frac{Tx}{m\ell}$$

$$m[\ddot{y} + 2\omega\dot{x} \operatorname{sen}\lambda] = -\frac{Ty}{\ell} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{y} + 2\omega\dot{x} \operatorname{sen}\lambda = -\frac{Ty}{m\ell}$$

$$mg - m[2\omega\dot{x} \operatorname{cos}\lambda] = T \quad \Leftrightarrow \quad m(g - 2\omega\dot{x} \operatorname{cos}\lambda) = T \quad \Leftrightarrow \quad -2\omega\dot{x} \operatorname{cos}\lambda = -g + \frac{T}{m}$$

Eliminando T, para a primeira ordem, fica

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} \operatorname{sen}\lambda = -\frac{gx}{\ell} \quad (2.7)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} \operatorname{sen}\lambda = -\frac{gy}{\ell} \quad (2.8)$$

Negligenciando os termos pequenos $\omega\dot{x}$, $\omega\dot{y}$. Multiplicando a equação (2.8) por i e somando à equação (2.7), temos

$$\frac{d^2}{dt^2}(x + iy) + 2i\omega \operatorname{sen}\lambda \frac{d}{dt}(y - ix) + \frac{g}{\ell}(x + iy) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\omega \operatorname{sen}\lambda \frac{d}{dt} + \frac{g}{\ell} \right] (x + iy) = 0$$

fazendo $\zeta = x + iy$,

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\omega i \operatorname{sen}\lambda \frac{d}{dt} + \frac{g}{\ell} \right] \zeta = 0$$

e pondo $D = \frac{d}{dt}$,

$$\left[D^2 + 2\omega i \operatorname{sen}\lambda D + \frac{g}{\ell} \right] \zeta = 0$$

com $g/\ell = n^2$, a equação pode ser reescrita como segue

$$\left[D^2 + 2\omega i \operatorname{sen}\lambda D + n^2 \right] \zeta = 0$$

ou

$$\left[(D + \omega i \operatorname{sen}\lambda)^2 + \mu^2 \right] \zeta = 0 \quad , \quad \text{onde } \mu^2 = \omega^2 \operatorname{sen}^2\lambda + n^2$$

A solução geral, portanto, é dada por

$$\zeta = e^{-i\omega \text{sen } \lambda t} [A \cos \mu t + B \text{sen } \mu t]$$

onde A e B são constantes complexas de integração. Escreva, $Z = \zeta e^{-i\omega \text{sen } \lambda t} = X + iY$

$$A = \alpha + i\beta, \quad B = \gamma + i\delta$$

onde X, Y, α , β , γ , δ são reais. Então,

$$\begin{cases} \alpha \cos \mu t + \gamma \text{sen } \mu t = X \\ \beta \cos \mu t + \delta \text{sen } \mu t = Y \end{cases}$$

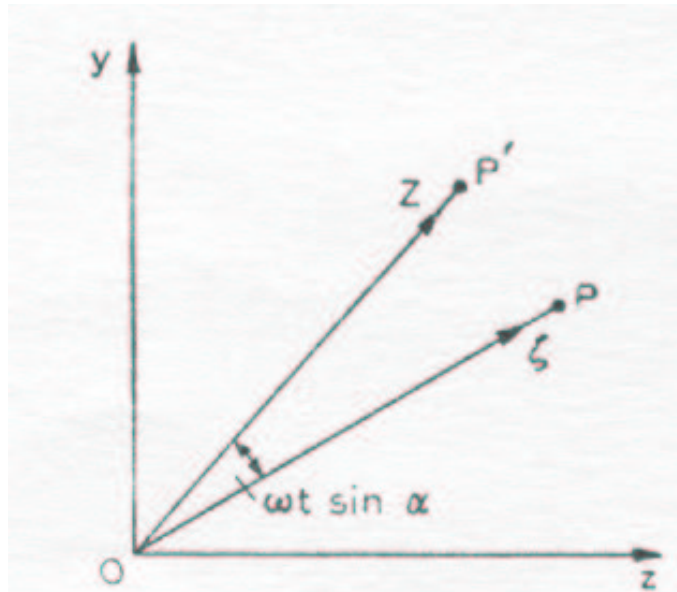
Assim,

$$\frac{\cos \mu t}{(X\delta - Y\gamma)} = \frac{\text{sen } \mu t}{(\alpha Y - \beta X)} = \frac{1}{(\alpha\delta - \beta\gamma)}$$

e assim eliminando t resulta

$$(\delta X - \gamma Y)^2 + (\alpha Y - \beta X)^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

podemos ver que esta equação é uma elipse, centro $X = 0$ e $Y = 0$.



Esta figura mostra o diagrama de Argand para o número complexo $\overline{OP} \equiv \zeta$, $\overline{OP'} \equiv Z$. Então,

$$\arg Z = \arg \zeta + \omega t \text{ sen } \lambda, \quad |Z| = |\zeta|,$$

e assim $\angle POP' = \omega t \operatorname{sen} \lambda$, $OP' = OP$. Observando, então, que o local de Z é uma elipse com centro em O. Então ζ está ocultado sob Z à uma distância angular de $\omega t \operatorname{sen} \lambda$, o local de ζ é uma elipse cuja revolução ao redor do eixo normal do plano Argand com velocidade angular $-\omega \operatorname{sen} \lambda$. Então o local de projeção do prumo do pêndulo de Foucault no plano horizontal sob A na figura seguinte é uma elipse de revolução ao redor do eixo vertical com velocidade angular $-\omega \operatorname{sen} \lambda$. Portanto, existe movimento relativo entre o plano vertical de movimento do prumo do pêndulo e a Terra. Pode-se medir a variação angular executada pelo plano de movimento sobre o período de alguns dias, confirmando que a Terra girou.

Na prática, ℓ é muito grande e x, y muito pequeno. O pêndulo de Foucault está em vários museus de ciência no mundo, veja no apêndice as informações de Smithsonian Institution.

2.2 Coordenadas Generalizadas

2.2.1 Noções Preliminares

Um sistema dinâmico é constituído de partículas; pode também incluir corpos rígidos, pois estes são feitos de partículas. Vamos supor um sistema composto por N partículas de massas $m_i (i = 1, 2, \dots, N)$ e que em algum tempo t a posição de cada partícula pode ser especificada por n variáveis independentes $q_j (j = 1, 2, \dots, n)$. Estas variáveis são as chamadas coordenadas generalizadas do sistema e, em número, são iguais ao número de graus de liberdade do sistema.

Para ilustrar estes movimentos, considere o movimento de duas partículas do sistema. Três coordenadas cartesianas especificam a posição de uma partícula, o que também vale para as outras partículas, formando um total de 6. Este sistema com seis graus de liberdade requer 6 coordenadas generalizadas.

2.2.2 Velocidades Generalizadas

Supondo um sistema composto por N partículas de massas $m_i (i = 1, 2, \dots, N)$ em t e a posição de cada partícula é especificada pela n coordenada generalizada $q_j (j = 1, 2, \dots, n)$. então as n quantidades

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

são chamadas de velocidades generalizadas do sistema.

Seja \vec{r}_i o vetor posição de m_i no tempo t tal que

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t).$$

Então,

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}.$$

Agora temos as novas variáveis independentes como $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t$. Então

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

2.2.3 Trabalhos Virtuais e Forças Generalizadas

Suponha que as partículas de um sistema dinâmico passam por um pequeno deslocamento instantâneo independente do tempo, consistentes com o limite do sistema e tal que todas as forças internas e externas não se alteram em magnitude e direção durante o deslocamento. Tal deslocamento é dito virtual devido a sua natureza hipotética, embora puramente fictícia. A noção convencional de deslocamento virtual é essencial para a elucidação dos princípios da análise dinâmica.

Seja a i -ésima partícula m_i na posição \vec{r}_i em t sob um deslocamento virtual para a posição $\vec{r}_i + \delta\vec{r}_i$. Sejam \vec{F}_i, \vec{F}'_i as forças externas e internas que agem sob m_i . Então o trabalho virtual feito em m_i no deslocamento é

$$(\vec{F}_i + \vec{F}'_i) \cdot \delta\vec{r}_i$$

e assim o trabalho virtual total feito em todas as partículas do sistema quando deslocamentos similares são feitos é

$$\delta W = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{F}'_i) \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}'_i \cdot \delta\vec{r}_i.$$

Agora $\sum_{i=1}^N \vec{F}'_i \cdot \delta\vec{r}_i$ é o trabalho total feito pelas forças internas do sistema. Em muitos casos é zero, por exemplo, quando as partículas do sistema são conectadas por rígidas restrições. No futuro, a não ser que seja dito o contrário, assumiremos que as forças internas $\vec{F}'_i (i = 1, 2, \dots, n)$ não realizam trabalho no deslocamento, embora possamos encontrar casos (tais como conexões elásticas) onde as forças internas, iguais e opostas, realizam trabalho no deslocamento. Quando as forças internas não realizam trabalho em um deslocamento virtual,

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N (X_i \cdot \delta x_i + Y_i \cdot \delta y_i + Z_i \cdot \delta z_i),$$

onde $\vec{F}_i = [X_i, Y_i, Z_i]$, $\delta\vec{r}_i = [\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i]$, δW é a chamada função trabalho virtual e observamos que os coeficientes nesta função $\delta x_i, \delta y_i, \dots$ são as componentes das forças externas X_i, Y_i, \dots

Agora vamos supor que o sistema é holonômico e especificado pela n -ésima coordenada generalizada $q_j (j = 1, \dots, n)$. Então pudemos mudar q_j por $q_j + \delta q_j$ fazendo mudanças nas outras $(n - 1)$ coordenadas. Este deslocamento virtual faz efeitos instantâneos e suponha que o trabalho feito instantaneamente no sistema dinâmico é $Q_j \cdot \delta q_j$. Então,

$$Q_j \cdot \delta q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i.$$

Se agora fizermos variações similares em cada $q_j (j = 1, \dots, n)$, então

$$\delta W = \sum_{j=1}^N Q_j \cdot \delta q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i.$$

Esta última relação mostra que Q_j é o coeficiente de $\delta q_j (j = 1, \dots, n)$ na função do trabalho virtual δW construído com base nas forças externas que agem no sistema. Como o coeficiente de δx_i em δW é a força X_i , chamamos o coeficiente do deslocamento virtual generalizado δq_j , a força generalizada Q_j associado à coordenadas $q_j (j = 1, \dots, n)$.

2.2.4 Dedução da Equação de Lagrange para um Sistema Holonômico

Agora vamos estabelecer as Equações de Lagrange para um sistema dinâmico Holonômico na forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

onde T é a energia cinética do sistema em t quando o sistema é especificado pelas coordenadas generalizadas $q_j (j = 1, \dots, n)$ e $Q_j (j = 1, \dots, n)$ são as forças generalizadas.

⟨ **Prova:** A equação do movimento da i -ésima partícula de massa m_i é

$$\vec{F}_i + \vec{F}_i' = m_i \ddot{\vec{r}}_i, \quad (2.9)$$

Agora,

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left\{ \dot{\vec{r}}_i \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \right\} - \dot{\vec{r}}_i \cdot \left(\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

mostramos anteriormente que,

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

e assim,

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_j} \right\} - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^2}{\partial \dot{q}_j}. \quad (2.10)$$

Multiplicando escalarmente ambos os lados da equação (2.9) por $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ e usando a equação (2.10). Então,

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) = (\vec{F}_i + \vec{F}_i') \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (2.11)$$

Agora somando ambos os lados de (2.11) de $i = 1$ até N . A Energia Cinética total do sistema é $T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{r}}_i^2$, e assim

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{F}_i') \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (2.12)$$

quando todas as coordenadas generalizadas são constantes, a função trabalho virtual é

$$\delta W = Q_j \delta q_j = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{F}_i') \cdot \delta \vec{r}_i.$$

e assim,

$$Q_j = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{F}_i') \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Então (2.12) fica

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j.$$

Geramos o conjunto desejado de n equações de Lagrange permitindo a "j" variar de 1 até N .

2.2.5 Componentes Generalizadas do Momentum e do Impulso

Vamos introduzir a noção de impulsos generalizados e momentos para completar o processo que vem sendo desenvolvido para deslocamentos, velocidades e forças.

Para generalizar as noções de momentum, primeiro vamos considerar a translação de um corpo rígido sem rotação. Se o centróide está em (x, y, z) em t , então fazendo M ser massa,

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Definindo $p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}, \dots$, temos

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M\dot{x}; \quad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = M\dot{y}; \quad p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = M\dot{z}.$$

Portanto, $[p_x, p_y, p_z]$ são as componentes do momentum linear nas direções x , y e z .

Quando um corpo rígido rota sobre uma eixo ℓ ao redor de seu centróide (que é fixo), se I é o momento de inércia sobre ℓ e θ é o ângulo em t , então $T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$. Definindo $p_\theta = \partial T / \partial \dot{\theta}$, temos

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = I\dot{\theta},$$

ou seja, p_θ é o momentum angular sobre ℓ .

Agora, se tivermos um sistema holonomico especificado em coordenadas generalizadas $q_j (j = 1, \dots, n)$ em t , podemos avaliar a Energia Cinética

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t)$$

e então para as n quantidades

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Estas são as componentes generalizadas do momentum do sistema.

Agora suponha que $[X, Y, Z]$ são as coordenadas das forças que agem no corpo. Então os impulsos destas forças no intervalo de tempo $0 < t < \tau$ são

$$\int_0^\tau X dt, \quad \int_0^\tau Y dt, \quad \int_0^\tau Z dt.$$

Mais ainda, suponha que s forças $[X, Y, Z]$ ficam muito grandes num intervalo de tempo τ muito pequeno de modo que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau X dt = \underbrace{\mathcal{F}_x}_{\text{impulso}} = \text{finito}, \dots$$

Por analogia, se para forças generalizadas $Q_j (j = 1, \dots, n)$ de um sistema,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau Q_j dt = \mathcal{F}_j = \text{finito}, \quad (j = 1, \dots, n)$$

então as n quantidades $\mathcal{F}_j (j = 1, \dots, n)$ são os chamados impulsos generalizados. Assim,

$$\delta W = \sum_{j=1}^N Q_j \cdot \delta q_j$$

$$\int_0^{\tau} \delta W dt = \sum_{j=1}^N \left\{ \delta q_j \int_0^{\tau} Q_j dt \right\}$$

então se os limites duplos acima existirem,

$$\delta U = \sum_{j=1}^n \mathcal{F}_j \delta q_j,$$

onde δU é o impulso da função trabalho virtual dada por

$$\delta U = \lim_{Q_j \rightarrow \infty, \tau \rightarrow 0} \delta W,$$

δU é construído destes impulsos realizam trabalhos virtuais em um deslocamento virtual. Impulsos que não tem trabalho impulsivo não precisam ser incluídos em δU .

2.2.6 Equações de Lagrange para Forças Impulsivas

Como, $p_j = \partial T / \partial \dot{q}_j$, as equações de Lagrange para um sistema holonomico são

$$\frac{dp_j}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

Integrando estas equações de $t = 0$ até $t = \tau$ obtemos

$$p_j \Big|_{t=\tau} + p_j \Big|_{t=0} = \int_0^{\tau} \frac{\partial T}{\partial q_j} dt + \int_0^{\tau} Q_j dt \quad (j = 1, \dots, n).$$

Agora, seja $Q_j \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow 0$ de modo que $\int_0^{\tau} Q_j dt \rightarrow \mathcal{F}_j = \text{finito}$ ($j = 1, \dots, n$).

Como as coordenadas q_j não mudam abruptamente,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} \frac{\partial T}{\partial q_j} dt = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Escrevendo, $\Delta p_j = \lim_{\tau \rightarrow 0} [(p_j)_{t=\tau} - (p_j)_{t=0}]$, então obtemos as Equações de Lagrange em forma impulsiva:

$$\Delta_{p_j} = \mathcal{F}_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

A afirmação desta equação é: o incremento do momentum generalizado é igual à força impulsiva generalizada associada com cada coordenada generalizada.

2.2.7 Energia Cinética como uma Função Quadrática de Velocidades

Se em t a posição do vetor da i -ésima partícula (massa m_i) de um sistema holonômico é \vec{r}_i , então a E.C. é

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2,$$

onde N é o número de partículas. Suponha que o sistema seja holonômico e especificado pelas n -ésimas coordenadas generalizadas q_j ($j = 1, \dots, n$). Então, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(i = 1, \dots, N)$, e $\dot{\vec{r}}_i = \dot{q}_1 \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} + \dots + \dot{q}_n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$ ($i = 1, \dots, N$).

$$\begin{aligned} \therefore T &= \sum_{i=1}^n m_i \left(\dot{q}_1 \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} + \dots + \dot{q}_n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} [(a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + \dots + a_{nn}\dot{q}_n^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots) + 2(a_1\dot{q}_1 + a_2\dot{q}_2 + \dots + a_n\dot{q}_n) + a] \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} a_{rs} &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_r} \right) \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \right) \quad (s \geq r), \\ a_r &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_r} \right) \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right), \\ a &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2, \end{aligned}$$

Então vemos que T é uma função quadrática das velocidades generalizadas.

O caso em que t não é envolvido explicitamente é de considerável importância. Agora temos,

$$\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = 0, \quad (i = 1, \dots, N).$$

Então a E.C. assume a forma de uma função quadrática homogênea das velocidades generalizadas:

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + \cdots + a_{nn}\dot{q}_n^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \cdots).$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N \sum_{r=1}^N a_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s, \quad \text{onde } a_{rs} = a_{sr}.$$

Neste caso, usando o Teorema de Euler para Funções Homogêneas, temos

$$\dot{q}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} + \cdots + \dot{q}_n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = 2T$$

ou

$$\dot{q}_1 p_1 + \dot{q}_2 p_2 + \cdots + \dot{q}_n p_n = 2T.$$

2.3 Ângulos Eulerianos

A orientação no espaço de um corpo rígido é convenientemente descrita pelos três ângulos θ , ϕ , ψ que definiremos agora.

$OXYZ \leftrightarrow$ eixos fixos no espaço;

$OX'Y'Z' \leftrightarrow$ são eixos com a mesma origem que são fixas em um corpo;

$\theta =$ ângulo ZOZ' ;

$\phi =$ ângulo entre os planos XOZ e $Z'OZ$ medidos de $XOZ \rightarrow YOZ$;

$\psi =$ ângulo entre os planos XOZ e $Z'OZ$ medidos de $Z'OZ$ e $X'OZ'$, medidos na mesma direção que uma rotação de $X'OZ' \rightsquigarrow Y'OZ'$.

1º) Rotando os eixos $OXYZ$ sobre OZ com ângulo ϕ sobre eles coincide completamente com $OMLZ$;

2º) Rotando $OMLZ$ sobre OL com ângulo θ até coincidir com $OM'L'Z'$;

3º) Rotando $OM'L'Z'$ sobre OZ' com um ângulo ψ sobre ele até que coincida com $OX'Y'Z'$.

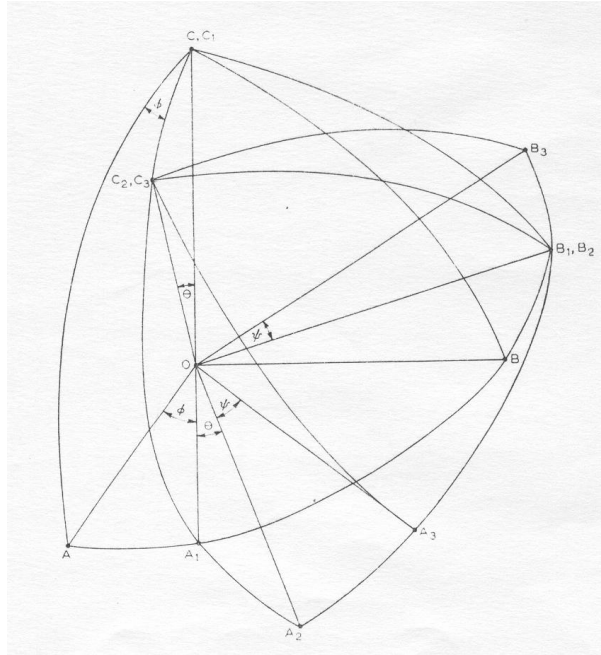
É bem conhecido que quando os eixos OXY são rotados com um ângulo ϕ as novas coordenadas no ponto (x, y) são

$$(x \cos \phi + y \sin \phi, y \cos \phi - x \sin \phi).$$

Usando a notação matricial,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Segue que as coordenadas do ponto (x, y, z) relativas aos eixos $OMLZ$ são



$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

$(x, y, z) \rightarrow (x', y', z') \Rightarrow 3$ rotações.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Então, por multiplicação de matrizes, temos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \sin\psi & -\cos\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\theta & \cos\psi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta\cos\phi - \sin\psi\sin\phi & \cos\psi\cos\theta\sin\phi + \sin\psi\cos\phi & -\cos\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\theta\cos\phi - \cos\psi\sin\phi & -\sin\psi\cos\theta\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

Os elementos desta matriz nos dão os cossenos diretores de OX' , OY' , OZ' em relação a OX , OY , OZ , e então, podemos observar que é uma matriz ortogonal. Se fizermos a

transposta desta matriz teremos os cossenos diretores de OX, OY, OZ em relação a OX', OY', OZ' .

Então os cossenos diretores de OL relacionados a OX', OY', OZ' são $(\text{sen}\psi, \text{cos}\psi, 0)$ seguindo que as velocidades angulares $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ sobre OX', OY', OZ' são equivalentes as velocidades angulares $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sobre OX', OY', OZ' , onde

$$\omega_1 = \dot{\theta}\text{sen}\psi - \dot{\phi}\text{cos}\psi\text{sen}\theta,$$

$$\omega_2 = \dot{\theta}\text{cos}\psi + \dot{\phi}\text{sen}\psi\text{sen}\theta,$$

$$\omega_3 = \dot{\phi}\text{cos}\theta + \dot{\psi}.$$

Considere, agora, um corpo rígido com cinética simétrica que é rotada sobre o ponto O . Escolha o eixo principal de O como o eixo OX', OY', OZ' movendo-se. Então a Energia Cinética T é dada por

$$2T = A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = A(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) + C(\dot{\phi}\text{cos}\theta + \dot{\psi})^2,$$

e as componentes do momento do momentum sobre OX', OY', OZ' são

$$h'_x = A\omega_1 = A$$

2.4 Movimento de um Pião Simétrico

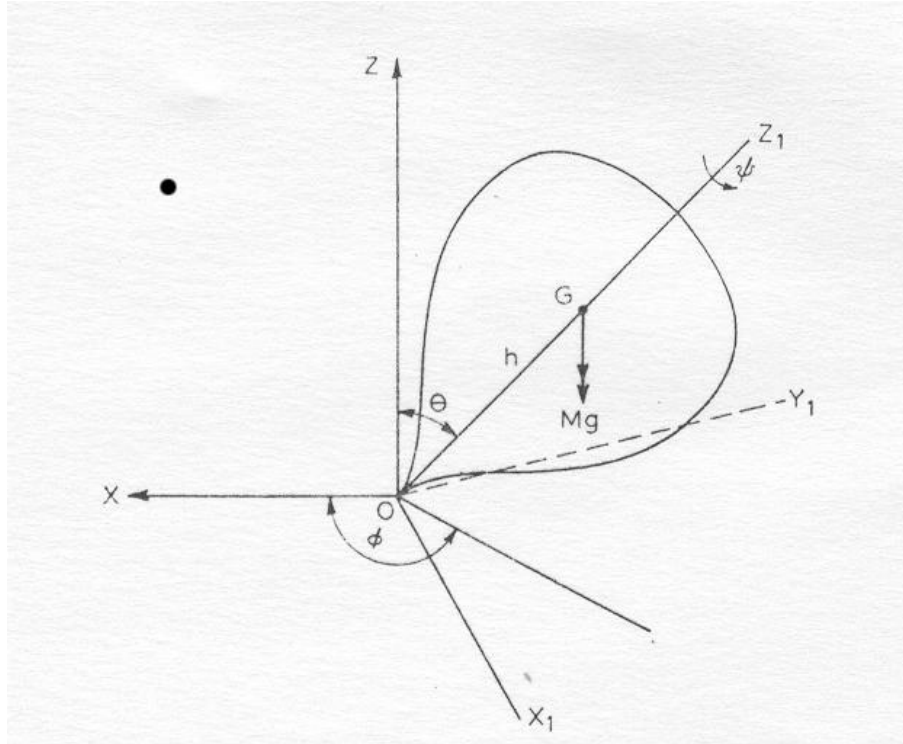
Um pião simétrico é um corpo rígido que é um sólido de revolução ao redor do seu eixo de simetria. A imagem acima mostra este pião rotacionando ao redor de um ponto fixo O sobre seu eixo de simetria OZ_1 . No instante t , suponha que OZ_1 fazendo um ângulo θ com o eixo vertical OZ , e seja φ o ângulo que o plano ZOZ_1 faz com a direção horizontal fixa OX . Além disso, seja ψ a rotação ao redor de OZ_1 . Então, θ, φ , e ψ são os ângulos Eulerianos deste sistema. Seja OX_1 dado no plano ZOZ_1 com ângulo reto em relação a OZ_1 e OY_1 perpendicular ao plano ZOZ_1 tal que os eixos móveis OX_1, OY_1 e OZ_1 formam um sistema orientado pela regra da mão direita. O sistema giratório compreende $\dot{\varphi}$ sobre $OZ, \dot{\theta}$ sobre $OY_1, \dot{\psi}$ sobre OZ_1 . Agora,

$$\dot{\varphi} \text{ sobre } OZ \equiv \dot{\varphi} \text{ cos } \theta \text{ sobre } OZ_1 - \dot{\varphi} \text{ sen } \theta \text{ sobre } OX_1$$

A componente de velocidade angular resultante sobre OX_1, OY_1, OZ_1 são

$$[-\dot{\varphi}\text{sen } \theta, \dot{\theta}, \dot{\psi} + \dot{\varphi}\text{cos } \theta]$$

Agora, OX_1, OY_1, OZ_1 são os eixos principais deste peão. A, A e C são os momentos de inércia correspondentes à eles. Então a E.C. é



$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}A(-\dot{\varphi} \operatorname{sen} \theta)^2 + \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 \\ &= \frac{1}{2}A(\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}C(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 \end{aligned}$$

A energia potencial do pião referente à horizontal sobre O como nível zero é

$$V = Mgh \cos \theta,$$

onde M é a massa do pião e h a distância do centro de massa G à O. Então,

$$L = \frac{1}{2}A(\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}C(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - Mgh \cos \theta.$$

Fazendo θ , φ , e ψ serem as coordenadas generalizadas, as equações de Lagrange são dadas por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \dots,$$

isto é,

$$A\ddot{\theta} - A\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C\dot{\varphi} \operatorname{sen} \theta (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) - Mgh \operatorname{sen} \theta = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{d}{dt}[A\dot{\varphi} \operatorname{sen}^2\theta + C \cos \theta(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)] = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{d}{dt}[C(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})] = 0. \quad (2.15)$$

Acrescido a isto, da lei da Conservação de Energia, $T + v = cte$, ou

$$\frac{1}{2}A(\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}C(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + Mgh \cos \theta = cte. \quad (2.16)$$

De (2.15), temos

$$\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta = n = cte. \quad (2.17)$$

(2.17) significa que a velocidade angular total n sobre o eixo de simetria constante. Fisicamente isto segue da constância do momentum angular sobre este eixo.

Integrando (3.12), temos

$$A\dot{\varphi} \operatorname{sen}^2\theta + Cn \cos \theta = D = cte. \quad (2.18)$$

Das equações (2.13), (2.16) podemos escrever

$$A\ddot{\theta} - A\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos \theta + Cn\dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta - Mgh \operatorname{sen}\theta = 0, \quad (2.19)$$

$$A\ddot{\theta} - A\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2Mgh \cos \theta = E = cte, \quad (2.20)$$

O movimento devido à variação em θ é chamado mutação e aquele devido a variação em φ , processão. O movimento geral do pião sobre seu ápice O é a combinação daqueles.

Observação 10. (2.18) expressa o momentum angular constante sobre OZ .

Caso do movimento permanente: quando o pião executa movimento permanente, $\theta = \alpha = \text{constante}$, $\dot{\varphi} = \Omega = \text{constante}$. Dado que $\theta \neq 0$, $(\times)'$ fornece

$$A\Omega^2 \cos \alpha - Cn\Omega + Mgh = 0,$$

que mostra que existe um par de velocidades precessionárias angulares reais e distintas, Ω_1, Ω_2 , desde que $C^2 n^2 > 4AMgh \cos \alpha$. Portanto para um giro "n" suficientemente grande sobre o eixo do simetria, o pião pode executar um movimento permanente $\theta = \alpha$ ao redor da vertical sob duas possíveis velocidades angulares precessionais Ω_1, Ω_2 .

Investigação da estabilidade: $(\times)'$ pode ser escrito $A\ddot{\theta} + f(\theta) = 0$, onde $f(\theta) = -A\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos \theta + Cn\dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta - Mgh \operatorname{sen}\theta$. como $f(\alpha) = 0$ da equação $A\Omega^2 \cos \alpha - Cn\Omega + Mgh = 0$, se colocarmos $\theta = \alpha + \varepsilon$ onde ε é pequeno, então $f(\theta) \simeq f'(\alpha)$ para primeira ordem tal que $((\times))'$ fica

$$A\ddot{\varepsilon} + \varepsilon f'(\alpha) = 0 \quad ((\times))''$$

Se pudermos mostrar $f'(\alpha) > 0$, esta equação se reduzirá à forma $\ddot{\varepsilon} + \omega^2\varepsilon = 0$ mostrando estabilidade sobre $\theta = \alpha$ para pequenas perturbações.

De (©), $\dot{\varphi} = (D - Cn\cos\theta)/A\text{sen}^2\theta$. Portanto,

$$Af(\theta)\text{sen}^3(\theta) = -\cos\theta(D - Cn\cos\theta)^2 + Cn\text{sen}^2\theta(D - Cn\cos\theta) - AMgh\text{sen}^4\theta.$$

Diferenciando ambos os membros, colocando $\theta = \alpha$ e usando $f(\alpha) = 0$,

$$\begin{aligned} Af'(\alpha)\text{sen}^3(\alpha) &= \text{sen}\alpha(D - Cn \cdot \cos\alpha)^2 - 2Cn \cdot \cos\alpha \cdot \text{sen}\alpha(D - Cn \cdot \cos\alpha) \\ &\quad + 2Cn \cdot \text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha(D - Cn \cdot \cos\alpha) + C^2n^2 \cdot \text{sen}^3\alpha - 4Mgh\text{sen}^3\alpha \cdot \cos\alpha \\ &= (D - Cn\cos\alpha)^2 \text{sen}\alpha + c^2n^2 \cdot \text{sen}^3\alpha - 4AMgh\text{sen}^3\alpha \cdot \cos\alpha. \end{aligned}$$

De (©), e considerando a equação $A\Omega^2\cos\alpha - Cn\Omega + Mgh = 0$,

$$\begin{aligned} D - Cn \cdot \cos\alpha &= A\Omega\text{sen}^2\alpha \\ Cn &= A\Omega\cos\alpha + Mgh/\Omega \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Af'(\alpha) &= A^2\Omega^2 \cdot \text{sen}^2\alpha + (A\Omega\cos\alpha + Mgh/\Omega)^2 - 4AMgh \cdot \cos\alpha \\ &= A^2\Omega^2 - 2AMgh \cdot \cos\alpha + (Mgh/\Omega)^2 \end{aligned}$$

Logo (κ'') fornece

$$\ddot{\varepsilon} + \left[\Omega^2 - 2\left(\frac{Mgh}{A}\right)\cos\alpha + \left(\frac{Mgh}{A\Omega}\right)^2 \right] \varepsilon = 0$$

Nesta última equação, o coeficiente ε satisfaz

$$\left[\Omega - \left(\frac{Mgh}{A\Omega}\right) \right]^2 + \left(\frac{Mgh}{A}\right)[1 - \cos\alpha] > 0$$

sempre que $\alpha \neq 0$.

Então, para $\alpha \neq 0$ o movimento é harmônico simples, mostrando que a posição $\theta = \alpha$ é estável.

2.5 Métodos Variacionais

2.5.1 O Cálculo das Variações

Suponha A, b são pontos fixos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ em coordenadas cartesianas no plano. Também suponha que $f(x, y, y')$ é um funcional de forma conhecida das variáveis $x, y, y' = (dy/dx)$. Então se C é uma curva de A a B e tem equação $y = y(x)$, a integral

$$I \equiv \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$$

tem um valor definido quando a função $y(x)$ é prescrita. O valor de I varia de acordo com as várias formas da curva C sobre A, B .

Seja a caminho \bar{C} uma caminho que torna I estacionária e tem equação $y = \bar{y}(x)$ e seja a equação da vizinhança da curva C dada por $y = \bar{y}(x) + \varepsilon\eta(x)$, onde ε é pequeno e $\eta(x)$ é uma função arbitrária de x contínua e diferenciável satisfazendo $\eta_1(x) = 0, \eta_2(x) = 0$, para assegurar que a curva passe sobre A e B . Então no diagrama $\bar{P}P = \varepsilon\eta(x)$. O valor de I ao longo de C é assim uma função de ε de forma

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \bar{y} + \varepsilon\eta, \bar{y}' + \varepsilon\eta') dx$$

Assim a curva \bar{C} , para a qual $\varepsilon = 0$, torna I estacionária, retornando a condição $I'(0) = 0$. Formalmente, diferenciando a equação acima com respeito a ε , resulta

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} [\eta f_y(x, \bar{y} + \varepsilon\eta, \bar{y}' + \varepsilon\eta') + \eta' f_{y'}(x, \bar{y} + \varepsilon\eta, \bar{y}' + \varepsilon\eta')] dx$$

onde $f_y(x, \bar{y} + \varepsilon\eta, \bar{y}' + \varepsilon\eta') = \partial/\partial y(f(x, y, y'))$ quando $y = \bar{y} + \varepsilon\eta, y' = \bar{y}' + \varepsilon\eta'$ com significado similar a $f_{y'}(x, \bar{y} + \varepsilon\eta, \bar{y}' + \varepsilon\eta') = \partial/\partial y'(f(x, y, y'))$. A condição estacionária $I'(0) = 0$, agora resulta

$$\int_{x_1}^{x_2} [\eta f_y(x, \bar{y}, \bar{y}') + \eta' f_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}')] dx = 0$$

Agora,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \eta' f_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}') dx &= [\eta f_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}')]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} f_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}') dx \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} f_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}') dx, \end{aligned}$$

Assim, $\eta(x)$ é arbitrário, sujeito a isto é diferenciável e desliza sobre A, B, então a equação acima implica que

$$f_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}') = 0.$$

Isto segue do seguinte resultado, se

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \varphi(x) dx = 0$$

para todas as funções $\eta(x)$ contínuas e diferenciáveis satisfazendo $\eta_1(x) = 0 = \eta_2(x)$, então $\varphi(x) = 0$ para todo x satisfazendo $x_1 < x < x_2$.

Estabelecemos que a equação diferencial $y = \bar{y}(x)$ de curva C ao longo da qual Ié estacionária é dada pela solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f(x, \bar{y}, \bar{y}')}{\partial y'} - \frac{\partial f(x, \bar{y}, \bar{y}')}{\partial y} = 0 \quad (\diamond)$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem para y e é conhecida como Equação de Euler-Lagrange. Esta pode ser reescrita de forma equivalente, por

$$y'' f_{y'y'} + y' f_{y'y} + f_{y'x} - f_y = 0,$$

denotando as equações diferenciais parciais. A curva correspondente \bar{C} determinada por esta equação é chamada de extremo.

O caso no qual a variável independente x desaparece explicitamente da forma de f , tal que $f = f_{y,y'}$, é de especial interesse na prática. Nestas circunstâncias, (\diamond) pode ser reescrita como

$$y' f_y - y' \frac{d}{dx} f_{y'} = 0,$$

ou

$$(y' f_y + y'' f_{y'}) - (y'' f_{y'} + y' \frac{d}{dx} f_{y'}) = 0.$$

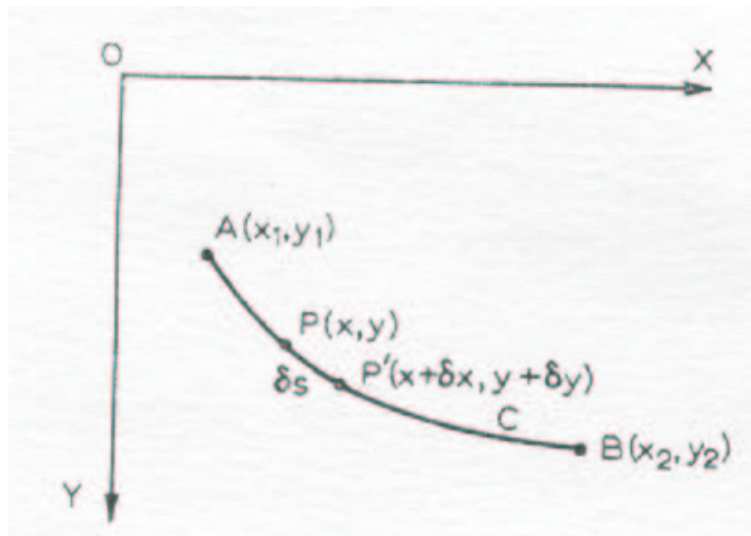
Integrando uma vez, resulta

$$f - y' f_{y'} = cte.$$

que a primeira integral da Equação de Euler neste caso especial: isto permite a integração de acordo com a natureza de f .

2.5.2 O problema Brachistochrone

Suponha que A e B são dois pontos no espaço mas não na mesma reta vertical. Suponha que são ligados por uma curva plana C e que A está em um nível superior a B.



O problema de encontrar a forma de C que assegura que o tempo de queda de uma partícula de A até B sob ação da gravidade é chamado de problema de Brachistochrone.

OX = eixo horizontal

OY = eixo vertical

OX , OY estão no plano de A e B tal que estes pontos tem coordenadas (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , respectivamente. Seja v a velocidade da partícula quando está a uma distância $P(x, y)$ em C entre A e B partindo do repouso em A. Então, fazendo m ser a massa da partícula, e a distância de A até B sendo $y - y_1$, temos

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(y - y_1),$$

em virtude do princípio de conservação da Energia. Assim, $v = \sqrt{2g(y - y_1)}$. Seja P' um ponto da vizinhança $(x + \delta x, y + \delta y)$ em C tal que o comprimento do arco PP' é δs . então o tempo de trânsito da partícula de P até P' é δt onde

$$\delta t = \frac{\delta s}{v} = \frac{1}{\sqrt{(y-y_1)}} \sqrt{1+y'^2} \frac{\delta x}{\sqrt{2g}},$$

assim $\delta s = \sqrt{1+(y')^2} \delta x$, para a primeira ordem. Assim, o tempo total do trânsito da partícula de A para B é T, onde

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{y-y_1}} \sqrt{1+y'^2} dx$$

Se precisamos escolher C que assegure que T seja mínimo, sujeito a passar por A e B, então o problema variacional é

$$\int_{x_1}^{x_2} f(y, y') dx = \text{estacionario},$$

onde $f(y, y') = (y-y_1)^{1/2}(1+(y')^2)^{1/2}$.

Então, x desaparece explicitamente da forma de f, e uma primeira integral é dada por

$$f - y' f_{y'} = \text{cte.}$$

Então,

$$\sqrt{1+y'^2} \sqrt{y-y_1} = A(\text{cte})$$

Escrevendo $y' = \tan \psi$, encontramos

$$\begin{cases} y - y_1 = \frac{1}{2}A^2(1 + \cos 2\psi) \\ x - B = -\frac{1}{2}A^2(2\psi + \sin 2\psi) \end{cases}$$

Estas são as equações paramétricas de um cicloide.

2.5.3 Extensões do Método Variacional

Suponha que n coordenadas $q_r (r = 1, \dots, n)$ são funções de uma variável t (cada uma) e que precisam da solução do problema variacional

$$I \equiv \int_{t_1}^{t_2} f(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t) dt = \text{estacionario},$$

onde a forma funcional é conhecida, t_1 e t_2 são fixos, e cada q_r é determinado.

Seguindo o procedimento de uma variável simples, fazemos a variação de forma

$$q_r = \bar{q} + \varepsilon_r \eta_r \quad (r = 1, \dots, n),$$

onde η_r são funções arbitrárias somente de t e vazias em $t = t_1$ e $t = t_2$. então I torna-se uma função de n variáveis $\varepsilon_r (r = 1, \dots, n)$ e queremos a solução das n equações

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \varepsilon_r} \right)_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = 0} = 0 \quad (r = 1, \dots, n)$$

resultando nas equações de Lagrange do problema variacional

$$\frac{\partial f}{\partial q_r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_r} = 0 \quad (r = 1, \dots, n)$$

para as n coordenadas $q_r (r = 1, \dots, n)$.

2.5.4 Princípio de Hamilton

Supondo que T e V são a Energia Cinética e a Energia Potencial de um sistema dinâmico holonômico conservativo definido por n coordenadas generalizadas $q_r (r = 1, \dots, n)$ no tempo t . Escrevendo $L = T - V$, reconhecemos que a Equação de Lagrange para o movimento do sistema são

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \quad (r = 1, \dots, n)$$

A seção anterior mostrou que estas são as n Equações de Euler-Lagrange que surgem do problema variacional,

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t) = \text{estacionario.}$$

onde t_1 e t_2 são fixos. Podemos, então, estabelecer que durante o movimento de um sistema conservativo dinâmico holonômico sob um um intervalo fixo de tempo, o tempo integral sob aquele intervalo de diferença entre a energia cinética e a energia potencial é estacionário. Este é o princípio de Hamilton.

2.5.5 Princípio da última Ação

A ação A de um sistema dinâmico sob um intervalo $t_1 < t < t_2$ é definido como

$$A = \int_{t_1}^{t_2} 2T dt,$$

onde T é a energia cinética.

do Princípio de Hamilton, temos que t_1 e t_2 são fixos. Agora, suponhamos que t não é mais a variável independente do movimento mas que o movimento depende de outras variáveis r que assumem valores fixos nos pontos extremos. Então,

$$A = \int_{t_1}^{t_2} 2T \frac{dt}{dr} dr, \quad (r_1, r_2 \text{ fixas}).$$

Poderíamos supor que pela Lei da Conservação de Energia

$$T + V = c(\text{cte}).$$

é válida e que T é independente do tempo. Então

$$L = T - V = 2T - c$$

e L também é independente do tempo.

Quando r está muito próximo de $r + \delta r$, A varia para $A + \delta A$ tal que

$$\delta A = \delta \int_{r_1}^{r_2} 2T \frac{dt}{dr} dr = \int_{r_1}^{r_2} \left[\delta(2T) \frac{dt}{dr} + 2T \delta \left(\frac{dt}{dr} \right) \right] dr.$$

Mas $\delta(dt/dr) = d(\delta t)/dr = (d(\delta t)/dt)(dt/dr)$, e $\delta(2T) = \delta L$. Assim,

$$\delta A = \int_{r_1}^{r_2} \left[\delta L + 2T \frac{d}{dt}(\delta t) \right] \frac{dt}{dr} dr.$$

Além disso,

$$\delta L = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \delta q_k + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta \dot{q}_k.$$

Agora denotando a diferenciação total com respeito a r por linha, temos

$$\begin{aligned}
\delta \dot{q}_k &= \delta \left(\frac{q'_k}{t'} \right) = \frac{\delta q'_k}{t'} - \left(\frac{q'_k}{t'^2} \right) \delta t' \\
&= \left(\frac{1}{t'} \right) \frac{d}{dr} (\delta q_k) - \left(\frac{q'_k}{t'^2} \right) \frac{d}{dr} (\delta t) \\
&= \frac{d}{dt} (\delta q_k) - \left(\frac{q'_k}{t'} \right) \frac{d}{dt} (\delta t) \\
&= \frac{d}{dt} (\delta q_k) - \dot{q}_k \frac{d}{dt} (\delta t)
\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta \dot{q}_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{d}{dt} (\delta q_k) - \sum_{k=1}^n \left(\dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{d}{dt} (\delta t)$$

Mas $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$ e assim T é uma função quadrática homogênea e as velocidades,

$$\sum_{k=1}^n \left(\dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{d}{dt} (\delta t) = \left(\sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{d}{dt} c = 2T \frac{d}{dt} (\delta t).$$

$$\begin{aligned}
\therefore \delta L &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \delta q_k + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta \dot{q}_k \\
&= \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \right) (\delta q_k) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{d}{dt} (\delta q_k) \right\} - 2T \frac{d}{dt} (\delta t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \delta A &= \int_{r_1}^{r_2} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \right) (\delta q_k) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{d}{dt} (\delta q_k) \right\} - \frac{dt}{dr} dr \\
&= \int_{r_1}^{r_2} \sum_{k=1}^n \left\{ \delta q_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} (\delta q_k) \right\} - \frac{dt}{dr} dr \\
&= \int_{r_1}^{r_2} \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left\{ \delta q_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right\} \frac{dt}{dr} dr \\
&= \left[\sum_{k=1}^n \delta q_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right]_{r_1}^{r_2}.
\end{aligned}$$

Se assumirmos que $\delta q_k = 0$ ($k = 1, \dots, n$) em cada ponto da extremidade $r = r_1$ e $r = r_2$, então $\delta A = 0$. Isto mostra que A é estacionário. Tal resultado é conhecido como o PRINCÍPIO DA ÚLTIMA AÇÃO. Aqui, apenas estabelecemos o caráter estacionário de A, mas podemos mostrar que é um mínimo.

Para uma simples partícula de massa m movendo-se ao longo de uma curva com velocidade v ,

$$A = \int_{t_1}^{t_2} mv^2 dt = \int_{s_1}^{s_2} mv ds,$$

assim, $ds = v dt$. Portanto o princípio de última ação fica

$$\int_{s_1}^{s_2} v ds.$$

Esta fórmula foi originalmente desenvolvida por Maupertuis.

2.5.6 Caso Não-Holonomico

No caso de um sistema dinâmico no qual as restrições são expressas em termos de formas diferenciais que não são completamente integráveis e em quais as equações de transformação das posições das partículas envolvem a'_1, \dots, a'_k (k graus de liberdade) dizemos que o sistema é não-holonomico.

Considere o caso no qual temos s relações diferenciáveis envolvendo as formas diferenciáveis θ^i (Pfaffians)

$$\theta^i = a_{i1}dq_1 + a_{i2}dq_2 + \dots + a_{in}dq_n = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

com a_{ik} funções de q_1, \dots, q_n .

θ^i , $i = 1, \dots, s$ é completamente integrável se e só se $d\theta^i \wedge \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^s \equiv 0$, $i = 1, \dots, s$. (O Teorema de Frobenius, veja o livro de Choquet-Bruhat, Dewitt-Morelle, Dillard-Bluih, cap IV, 6.)

Considere, por exemplo, um disco vertical rolando sobre um plano horizontal. A velocidade do centro do disco é $v = a\dot{\phi}$ na direção perpendicular o eixo do disco e se OXY seja o plano horizontal e θ o ângulo com a linha perpendicular ao disco passando no ponto de contato do plano faz com o eixo OY e x, y seja as coordenadas do ponto de contato

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \sin \theta = a \sin \theta \dot{\phi} \\ \dot{y} &= -v \cos \theta = -a \cos \theta \dot{\phi} \end{aligned}$$

isto é dizer

$$\begin{aligned} \theta^1 &= dx - a \sin \theta d\phi = 0 \\ \theta^2 &= dy + a \cos \theta d\phi = 0 \end{aligned}$$

Mas o sistema Pfaffiano (θ^1, θ^2) é não integrável. De fato

$$\begin{aligned} d\theta^1 \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 &= a \cos \theta d\theta \wedge d\varphi \wedge dx \wedge dy \neq 0 \\ d\theta^2 \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 &= -a \sin \theta d\theta \wedge d\varphi \wedge dx \wedge dy \neq 0 \end{aligned}$$

A primeira extensão das equações de Lagrange ao sistemas não holonômicos é devido a Ferrers Quart, J., Math XII 1873.

Considere um sistema não holonômico descrito pelas coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n . Suponha que a energia cinética é T e condições cinemáticas não holonômicas são satisfeitas:

$$\sum_{i=1}^n A_{ik} dq_i + T_k dt = 0, k = 1, \dots, n$$

Podemos pensar que o sistema é sujeito à ação de certas forças adicionais que forçam estas condições a ser satisfeitas.

Suponha que estas forças Q'_1, \dots, Q'_n faz trabalho no sistema $\delta W' = \sum_{i=1}^n \delta Q'_i \delta q_i$ sob um deslocamento $(\delta q_1, \dots, \delta q_n)$ arbitrário, e suponha que $\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$ é o trabalho feito pelas forças originais externas Q_i .

Com a adição das forças adicionais o sistema é holonômico e portanto as equações de Lagrange são satisfeitas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + Q'_i \quad r = 1, \dots, n$$

As forças Q'_i são caracterizadas pelo fato que sob deslocamentos consistentes com as condições cinemáticas não holonômicas instantâneas

$$\delta W' = \sum_{i=1}^n Q'_i dq_i = 0$$

Assim, escrevendo $A = (A_{ik})$

$$\langle Q'_i, dq_i \rangle = 0 \text{ quando } A(dq_i) = 0$$

O que implica que

$$Q'_r = \sum_{j=1}^n \lambda_j A_{rj} \quad r = 1, \dots, n$$

Segue-se que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r + \lambda_1 A_{r1} + \dots + \lambda_n A_{rn} \quad r = 1, 2, \dots, n$$

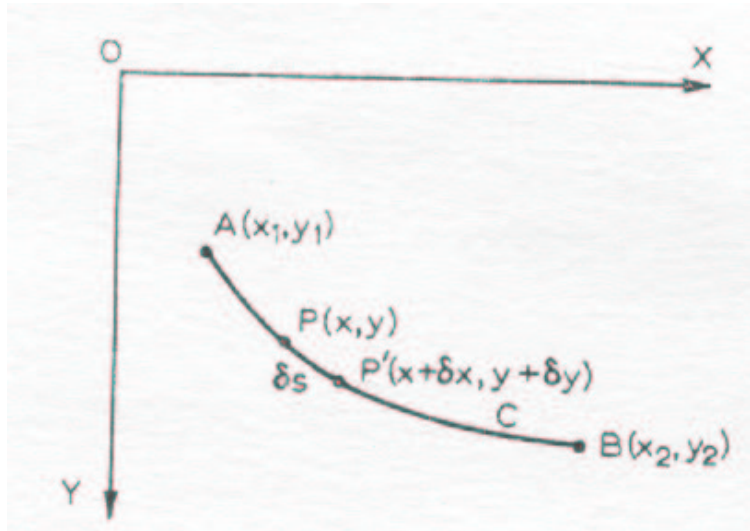
$$A_{ik} \dot{q}_1 + \dots + A_{nk} \dot{q}_n + T_k = 0 \quad k = 1, \dots, n$$

equações que em principio são suficientes determinar $(q_1, \dots, q_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alternativo método tem sido dado P. Appell em 1899 (Comptes Rendus).

2.5.7 Diferenças entre o Princípio de Hamilton e o Princípio de Última Ação

No princípio de Hamilton um intervalo de tempo $t_2 - t_1$ foi previamente estabelecido. No princípio da última Ação, no entanto, o intervalo de tempo não possui configuração restrita. No último caso, escolhemos um intervalo de tempo fixo e os pontos $r = r_1$ e $r = r_2$ escolhemos pontos fixos e prescrevemos a energia total do sistema ($T + V$).

Para ilustrar os dois princípios, considere o movimento da partícula sob ação da gravidade como na seguinte figura



Então, em $P(x, y)$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad V = -mgy,$$

se fizermos OX como o ponto zero da Energia Potencial. Então,

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy.$$

O Princípio de Hamilton requer que $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ seja estacionário e produz as seguintes Equações de Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0, \\ \ddot{y} - g = 0. \end{cases}$$

Estas são as equações do movimento de um projétil movendo-se no vácuo sob ação da gravidade. Não há restrições impostas ao longo do caminho e o princípio de conservação de energia é usado. Tais equações sempre valem sobre algum intervalo de tempo prescrito.

Quando A e B são soltos em uma curva lisa, a lei da conservação da energia é respeitada e do princípio de última ação de Maupertuis segue

$$\int_A^B v ds = \text{estacionario};$$

ou, se $(1/2)mv^2 = mg(y - y_1)$ e $ds = (1 + y'^2)^{1/2}dx$,

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{y - y_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = \text{estacionario}.$$

Neste caso, x desaparece explicitamente do integrando e é facilmente verificado que a solução para y é uma trajetória parabólica sobre os pontos extremos.

2.6

2.6.1 A Função de Ação

Em geral as equações de Hamilton (6) pode ser integrado e a solução expressa-se na forma

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(c_1, c_2, \dots, c_{2n}, t) \\ p_i &= p_i(c_1, c_2, \dots, c_{2n}, t) \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.21)$$

Onde c_1, c_2, \dots, c_{2n} são $2n$ constantes de integração. Se estes valores são substituídos em \mathcal{H} , então \mathcal{H} vira uma função de t e as $2n$ constantes de integração. Isto é dizer que

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(c_1, \dots, c_{2n}, t) \quad (2.22)$$

Da teoria de equações diferenciais ordinárias não lineares, sob diversas condições é possível estabelecer a diferenciabilidade de \mathcal{H} em termos de c_j

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_k} &= \sum_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial c_k} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial c_k} \\ &= \sum_i q_i' \frac{\partial p_i}{\partial c_k} - \sum_i p_i' \frac{\partial q_i}{\partial c_k} \quad \text{das equações de Hamilton} \\ &= \frac{\partial}{\partial c_k} \sum_i p_i q_i' - \frac{d}{dt} \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial c_k} \quad \text{identidade}\end{aligned}$$

$$\text{Mas } \frac{\partial}{\partial c_k} \sum_i p_i q_i' - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_k} = \frac{\partial}{\partial c_k} (T - U)$$

obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial c_k} (T - U) = \frac{d}{dt} \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial c_k} \quad (2.23)$$

integrando

$$\frac{\partial}{\partial c_k} \int_{t_0}^t \mathcal{L} dt = \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial c_k} - \sum_i p_{i0} \frac{\partial q_{i0}}{\partial c_k} \quad (2.24)$$

com $p_{i0} = p_i(t_0)$, $q_{i0} = q_i(t_0)$, a função

$$S = \int_{t_0}^t (T - U) dt \quad (2.25)$$

foi chamado por Hamilton a função principal do sistema.

2.6.2 A equação de Hamilton-Jacobi

Da definição de S , podemos considerar S e as coordenadas como funções de t e as constantes de integrais c_1, \dots, c_{2n} . Denominaremos variações em termos destas constantes por δ , então

$$\delta S = \sum \frac{\partial S}{\partial c_k} \delta c_k \quad \delta q_i = \sum \frac{\partial q_i}{\partial c_k} \delta c_k$$

Multiplicando por (11) δc_k e somando

$$\delta S = \sum_i p_i \delta a_i - \sum_i p_{i0} \delta q_{i0} \quad (2.26)$$

Resolvendo por c em termos de q e q_0

$$S = S(q_1, \dots, q_n, q_{10}, \dots, q_{n0}, t) \quad (2.27)$$

e

$$\delta S = \sum \frac{\partial S}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial S}{\partial q_{i0}} \delta q_{i0} \quad (2.28)$$

Comparando (2.26) e (2.27)

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \quad e \quad \frac{\partial S}{\partial q_{i0}} = -p_{i0} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.29)$$

(2.29) formam um conjunto de soluções das equações de Hamilton. Vamos derivar (2.27) com respeito a t

$$\begin{aligned} S' &= \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} q'_i \\ &= \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i q'_i \end{aligned}$$

e dado que por definição $S' = T - U = \mathcal{L}$ e $\sum p_i q'_i = \mathcal{L} + \mathcal{H}$, segue-se que

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(t, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = 0$$

e utilizando (2.29)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(t, q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}) = 0 \quad (2.30)$$

Jacobi estendeu o argumento de Hamilton na seguinte maneira. Chamamos uma solução completa de (2.30) uma função $S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$ contendo $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ constantes arbitrárias que substituída em (2.30) satisfaz identicamente. Existe uma independência funcional no sentido que

$$\left| \frac{\partial(\frac{\partial S}{\partial q_i})}{\partial \alpha_i} \right| \neq 0$$

Suponha que existem constantes $\beta_i, i = 1, \dots, n$ e consideramos soluções de

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.31)$$

onde S é a solução completa de (2.30).

Então, diferenciando $\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ com respeito a t

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t} + \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j} q'_j = 0 \quad (2.32)$$

e derivando (2.30) com respeito a α_i

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t} + \sum_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i} = 0$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t} + \sum_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i} = 0 \quad (2.33)$$

De (2.32) e (2.33) obtemos que

$$\sum_j \left(q'_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (2.34)$$

Mas por hipótese $\left| \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i} \right| \neq 0$ e de (2.34)

$$q_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \quad (2.35)$$

Agora vamos derivar $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ com respeito a t para obter

$$\begin{aligned} p'_i &= \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} + \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} q'_j \\ &= \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} + \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \end{aligned} \quad (2.36)$$

usando (2.35). Derivando a equação (2.30) com respeito q_i

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \quad (2.37)$$

e substituindo (2.37) em (2.36)

$$p'_i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad (2.38)$$

(2.35) e (2.38) são as equações de Hamilton.

Observação 11. Se o tempo não entra explicitamente em \mathcal{H} é possível tomar

$$S = -\alpha_1 t + S_1(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (2.39)$$

e a equação de Hamilton-Jacobi é

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_1}{\partial q_n}) = \alpha_1$$

Neste caso é suficiente encontrar uma função $S_1(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ contendo $n - 1$ novas constantes $\alpha_2, \dots, \alpha_n$. O conjunto de integrais nestas situações tem a forma:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1} - t & \beta_i &= \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_i} \\ p_1 &= \frac{\partial S}{\partial q_1} & p_i &= \frac{\partial S_1}{\partial q_i} \quad i = 2, \dots, n \end{aligned}$$

e tomando $\beta_1 = -t_0$, $t - t_0 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$. Nesta situação ocorre quando o sistema é conservativo e

$$\mathcal{H} = T + U$$

$$e \quad \mathcal{H}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \alpha_1 = \text{constante de energia}$$

2.6.3 Relações entre Mecânica clássica e Mecânica Quântica

O caminho dos raios de luz são trajetórias ortogonais às superfícies de onda. Desprezando o fenômeno de difração, podemos calcular o caminho dos raios em função do princípio de Fermat:

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} n ds = \delta \int_{P_0}^{P_1} \frac{1}{u} ds = 0 \quad (2.40)$$

onde u é a velocidade de fase (fazendo o índice de refração como uma função de posição). Entretanto, se o objeto em análise for da ordem de magnitude de uma onda de luz, o uso de ótica geométrica simples é inadequada e o fenômeno relacionado com difração não poderá mais ser descrito em termos de raios de luz.

Um princípio extremal similar (Hamilton) é aplicado para os caminhos de partículas que obedecem à Mecânica Clássica. A analogia com a ótica torna-se particularmente evidente se restringimos as órbitas de comparação àquelas com a mesma energia total. Isso é equivalente a passar do Princípio de Hamilton para o de Maupertuis. Do Princípio de Hamilton para uma partícula, temos

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} (2T - E) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} 2T = \delta \int_{t_0}^{t_1} mv^2 dt \quad (2.41)$$

Introduzindo o caminho da partícula como uma variável de integração no lugar do tempo, obtemos

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} mv \frac{ds}{dt} dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} mv ds = \delta \int_{t_0}^{t_1} v ds \quad (2.42)$$

pois $m = \text{constante}$

Comparando (1) e (2), percebemos que se quisermos associar ondas com partículas movendo-se com as leis da Mecânica do mesmo modo que as ondas de luz estão associadas com os raios de luz, precisamos fazer $u \propto \frac{1}{v}$ de modo que o Princípio de Fermat seja válido para as ondas de matéria. No que segue, continua-se a discussão feita em Joos [2] (pag. 693-696).

Seja U a energia potencial, T a energia cinética e E a energia total, então a relação

$$E - U = T = \frac{1}{2}mv^2 \quad v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)} \quad (2.43)$$

Além disso,

$$u = \frac{1}{v} = \frac{\sqrt{\frac{m}{2}}}{\sqrt{E - U}} = \frac{C}{\sqrt{E - U}} \Rightarrow u = \frac{C}{\sqrt{E - U}} \quad (2.44)$$

onde $C = \sqrt{\frac{m}{2}}$.

Em 1924, de Broglie sugeriu que a distribuição de partículas como os elétrons deveriam ser calculados por uma teoria ondulatória. A energia de um fóton é igual a $\hbar\nu$ e a massa m é dada por $\hbar\nu = mc^2$, onde c é a velocidade da luz. A velocidade de um fóton é igual a c e seu momento é $mc = \lambda\nu/c$. O comprimento de onda λ das ondas associadas com o fóton é igual a c/ν . A proposta de de Broglie é que relações semelhantes são validas para elétrons e ondas associadas. Desta forma, procuramos introduzir uma frequência $E = \hbar\omega$ onde $\hbar = 1,05459 \cdot 10^{-27}$ é a constante de Planck e ω é a frequência de onda. Dessa forma,

$$u = \frac{C}{\sqrt{\hbar\omega - U}} \quad (2.45)$$

Isso significa que a velocidade de fase u depende de ω , logo, existe dispersão quando ondas são introduzidas. Num meio de dispersão é necessário distinguir entre a velocidade de fase u e a velocidade de grupo $u_g = v$. Portanto, recordamos a noção de velocidade de grupo. Considere a onda dada por $\psi = \text{sen} \frac{2\pi}{\lambda}(x - ut)$, λ sendo o comprimento da onda e u a velocidade da onda. Coloque $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = \frac{2\pi u}{\lambda} = 2\pi\nu$. Suponha que examinamos a interferência de ψ com ψ' , correspondendo a k' , ω' :

$$\psi + \psi' = \text{sen} \left(\frac{k+k'}{2}x - \frac{\omega+\omega'}{2}t \right) \cos \left(\frac{k-k'}{2}x - \frac{\omega-\omega'}{2}t \right)$$

e pondo $\delta k = k - k'$, $\delta\omega = \omega - \omega'$

$$\psi + \psi' = \cos \left(\frac{\delta k}{2}x - \frac{\delta\omega}{2}t \right) \text{sen} (kx - \omega t), \quad \delta k, \delta\omega \ll 1.$$

Definimos a velocidade de grupo $u_g = \frac{\delta\omega}{\delta k}$ ou

$$\begin{aligned} u_g &\sim \frac{d\left(\frac{u}{\lambda}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{\frac{du}{d\lambda}}{\lambda d\frac{1}{\lambda}} + u = -\lambda \frac{du}{d\lambda} + u \\ &= \frac{dv}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{dh\nu}{d\left(\frac{h}{\lambda}\right)}. \end{aligned}$$

Assim temos,

$$\frac{1}{u_g} = \frac{d\left(\frac{\omega}{u}\right)}{d\omega} = \frac{1}{v} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}} \Rightarrow \frac{\omega}{u} = \int \frac{d\omega}{\sqrt{\frac{2}{m}(\hbar\omega - U)}} \quad (2.46)$$

Resolvendo a integral, obtemos

$$\frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(\hbar\omega - U)} \Rightarrow u = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2m(\hbar\omega - U)}} \quad (2.47)$$

O comprimento de onda da matéria é dada por

$$\lambda = \frac{u}{\omega} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(\hbar\omega - U)}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E - U)}} \quad (2.48)$$

e numa região livre de forças (gravitacionais), temos

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}} = \frac{\hbar}{mv} \quad (2.49)$$

pois

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = \frac{2E}{m} \Rightarrow 2mE = (mv)^2 \Rightarrow \sqrt{2mE} = mv \quad (2.50)$$

Passando de uma região onde $U = 0$ para uma onde o potencial U existe, corresponde a entrar na região cujo índice de refração é

$$n = \sqrt{\frac{E - U}{E}} \quad (2.51)$$

Se u é uma função de posição, temos um meio com índice de refração variável na qual as trajetórias ortogonais das superfícies de onda são curvas.

Se o comprimento da onda de Broglie de um elétron que é atravessado por uma diferença de potencial V é calculado por (2.49), obtemos com Wilson [3] (pag. 96)

$$Ve = m_0c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} - 1 \right\} \quad (2.52)$$

onde m é dada por $m = m_0 + \frac{Ve}{c^2}$, m_0 é a massa de um elétron em repouso e v é a velocidade do elétron. Substituindo (2.49) em (2.52) e fazendo algumas simplificações, obtemos

$$\lambda = \frac{\hbar c}{\sqrt{Ve(2m_0c^2 + Ve)}} \quad (2.53)$$

Notar que quando $\frac{Ve}{2m_0c^2}$ é pequeno, teremos

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2Vem_0}} \simeq 10^{-8} \sqrt{\frac{150}{V}} \quad (2.54)$$

Isso mostra que os elétrons cuja velocidade é de centenas de volts ou milhares de volts estão associados com os comprimentos de ondas dos raios-x.

Se quisermos modelar o fenômeno de difração em ótica, devemos usar a equação diferencial de onda

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = u^2 \Delta \Psi \quad (2.55)$$

onde

$$u = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2m(\hbar\omega - U)}} = \frac{E}{\sqrt{2m(E - U)}} \quad (2.56)$$

Resolvendo (2.55), temos

$$\Psi = \psi e^{2\pi i \left(\frac{E}{\hbar}\right)t} \quad (2.57)$$

Substituindo (2.57) em (2.55), obtemos a famosa equação de Schrödinger

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0 \quad (2.58)$$

Essa equação tem o mesmo significado em mecânica atômica que tem a equação de Hamilton-Jacobi

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_k}, q_k\right) = E \quad (2.59)$$

em mecânica celeste.

Deveria ser enfatizado que o princípio de correspondência evidente aqui tem que ser aplicado com cuidado. De fato, problemas podem ser encontradas com os operadores introduzidos (veja, por exemplo, o livro de Abraham & Marsden [1], seção 5.4 onde onde é encontrado uma discussão do artigo de Van Hove, *Sur certaines representations unitaires de un groupe infini de transformations*, *Mem de l'Acad, Roy de Belgique* (Classe des Sci) t. XXVI 61-102.

Referências Bibliográficas

- [1] Abraham, R., Marsden, J.E., *Foundations of Mechanics*, 2 Ed., Massachusetts, 1978.
- [2] Joos, G., Freeman, I.M., *Theoretical Physics*, Blackie & Son Limited, London, 1958.
- [3] Wilson, H.A., *Modern Physics*, 4 Ed., Blackie & Son, London, 1959

Capítulo 3

PARTE III

3.1 Enunciado do Problema de Controle Ótimo

Para enunciar este teorema vamos convencionar as notações que seguem. Seja U um conjunto fechado de E^m ; t, x, u variáveis em E^1, E^n e E^m , respectivamente; $f(t, x, u)$ uma função vetorial

$$f : E^1 \times E^n \times E^m \longrightarrow E^n \quad (3.1)$$

contínua com derivada parcial de primeira ordem contínua com respeito as coordenadas de x . Seja $\phi(t_0, t_1, x_0, x_1)$ a função vetorial

$$\phi : E^1 \times E^1 \times E^n \times E^n \longrightarrow E^k \quad (3.2)$$

que é de classe C^1 .

Seja \mathcal{U} um conjunto de funções contínuas (por partes) $u(t)$ com valores em U , cada função de $u(t)$ sendo definida no mesmo intervalo $[t_0, t_1]$, que difere para diferentes elementos de \mathcal{U} . Um função $u(t)$ em \mathcal{U} pode ser chamada controle. O conjunto \mathcal{U} de controles tem a seguinte propriedade:

- Se $u(t)$ definido em $t_0 \leq t \leq t_1$ está em \mathcal{U} e para $i = 1, \dots, p, v_i \in U$ e $\tau_i - h_i < t \leq \tau_i$ são não sobrepostos nos intervalos de intersecção de $[t_0, t_1]$ então

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} v_i & \text{se } \tau_i - h_i < t \leq \tau_i \\ u(t) & \text{se } t \in [t_0, t_1] \text{ e } \notin \text{ a um dos intervalos } \tau_i - h_i < t \leq \tau_i \end{cases} \quad (3.3)$$

está em \mathcal{U} .

Para um controle $u(t)$ definido em $[t_0, t_1]$ a solução em $x(t)$ da equação diferencial

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \quad (3.4)$$

no intervalo $[t_0, t_1]$ com condição inicial $x(t_0) = x_0$ será chamada de trajetória correspondente ao controle $u(t)$ e condição inicial x_0 . O valor de $x(t)$ no tempo t é chamado de

estado do sistema no tempo t . A equação (3.4) é chamada a equação do movimento do sistema. Frequentemente nossas discussões envolverão o controle e suas correspondentes trajetórias. Se $x(t)$ aparece sem menção na fórmula, e entendido que o controle e sua condição inicial foram especificados e que $x(t)$ é a trajetória correspondente a $u(t)$ e x_0 sob (3.4).

A primeira componente de ϕ avaliada em $(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1))$, onde $x(t)$ é a solução de (3.4),

$$\phi_1(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) \quad (3.5)$$

é o índice de performance ou critério de performance do sistema. Para indicar a dependência da performance no estado inicial $x_0 = x(t_0)$ e controle $u(t)$ podemos denotar a performance por

$$J(x_0, u) = \phi_1(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)). \quad (3.6)$$

Os próximos $k - 1$ componentes de ϕ são definidos pelas equações

$$\phi_j(t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)) = 0 \quad j = 2, \dots, k \quad (3.7)$$

condições finais das trajetórias do sistema. Um par (x_0, u) , de uma condição inicial x_0 e um controle $u(t)$, pode ser dito admissível¹ se há uma solução $x(t)$ para (3.4) em $[t_0, t_1]$ com condição inicial $x(t_0) = x_0$ e condições finais de controle (3.7) satisfeitas por $x(t)$. \mathcal{F} denota a classe de pares admissíveis (x_0, u) .

O problema de controle ótimo é encontrar na classe \mathcal{F} um elemento (x_0, u) tal que o índice de performance correspondente ao indicado em (3.6) seja minimizado. Um par (x_0, u) de \mathcal{F} que alcance este mínimo pode ser chamado *condição inicial ótima* e um *controle ótimo*.

Note que a trajetória e o índice de performance indicada em (3.6) são inalterados se o controle $u(t)$ correspondente é alterado de modo a ser contínuo à esquerda. Então podemos assumir sem perda de generalidade que \mathcal{U} é uma classe de funções de controle contínuas à esquerda por pares. Para abreviar a notação e poderia ser usado para denotar $(2n + 2)$ "tuple" de pontos finais.

$$e = (t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)). \quad (3.8)$$

3.2 Enunciado do Princípio de Pontryagin

A derivação das condições necessárias para otimização do problema do controle ótimo, que é a prova do "Princípio de Pontryagin", é extremamente longa.

As condições do "Princípio de Pontryagin" reduzem a computação de um controle ótimo para a solução de um problema com dois pontos de fronteira para um conjunto de equações diferenciais juntamente com a minimização da condição dada. Em muitas

¹Note que um par *possível* também depende de t_0, t_1 e os pontos finais no intervalo $[t_0, t_1]$ nos quais o controle $u(t)$ é definido.

aplicações importantes o controle ótimo tem sido computado pela uso deste princípio. No entanto, na solução de exemplo complicados de problemas de valores de contorno com dois pontos podem ser dificultados. Métodos computacionais usados anteriormente fazem um ataque numérico direto na otimização dos problemas e continuam sendo amplamente utilizados, Kelly[1], Bryson Denham [1], McGill [1]. A teoria e o uso destes métodos numéricos diretos é uma importante parte do sugerido. No entanto, não será discutido aqui. Veja Falb deJong [1], Dyer McReynolds[1], Polak[1],[2] para uma discussão destas técnicas.

3.2.1 Teorema: Princípio de Pontryagin

A condição necessária para que $(x_0^*, u^*(t))$ sejam uma condição inicial ótima e controle ótimo para o problema de controle ótimo são a existência de um vetor não-nulo k -dimensional λ com $\lambda_1 \leq 0$ e uma função vetorial n -dimensional $P(t)$ tal que para $t \in [t_0, t_1]$:

$$\dot{P}(t)' = -P(t)' f_x(t, x^*(t), u^*(t)); \quad (3.9)$$

para $t \in (t_0, t_1)$ e $u \in U$

$$P(t)' [f_x(t, x^*(t), u) - f_x(t, x^*(t), u^*(t))] \leq 0; \quad (3.10)$$

$$P(t_1)' = \lambda' \phi_{x_1}(e); \quad (3.11)$$

$$P(t_0)' = -\lambda' \phi_{x_0}(e); \quad (3.12)$$

$$P(t_1)' f_x(t_1, x^*(t_1), u^*(t_1)) = -\lambda' \phi_{t_1}(e); \quad (3.13)$$

$$P(t_0)' f_x(t_0, x^*(t_0), u^*(t_0)) = -\lambda' \phi_{t_0}(e). \quad (3.14)$$

Se $f(t, x, u)$ tiver uma derivada parcial contínua $f_1(t, x, u)$, então a condição

$$P(t_0)' f_x(t, x^*(t), u^*(t)) = \lambda' \phi_{t_0}(t_0, t_1, x^*(t_0), x^*(t_1)) + \int_{t_0}^t P(s)' f_1(s, x^*(s), u^*(s)) ds \quad (3.15)$$

para cada $t \in [t_0, t_1]$.

A quantidade

$$H(t, x, u) = P(t)' f(t, x, u) \quad (3.16)$$

é geralmente chamada Hamiltoniano em analogia com a quantidade correspondente utilizada em mecânica clássica. A condição (3.11) pode ser expressa como

$$\max_{u \in U} \{H(t, x^*(t), u)\} = H(t, x^*(t), u^*(t)) \quad (3.17)$$

e é chamado princípio do máximo de Pontryagin. As condições (3.12) - (3.15) são generalizações das condições encontradas em cálculo de variações e problemas de controle ótimo Bliss[2], p.202, Pontryagin et. al.[1], p.49 chamadas *condições transversais*. As equações dadas no princípio de Pontryagin são chamadas *equações adjuntas*.

Um controle pode ser chamado **extremal** se (3.10) - (3.15) são satisfeitas e as trajetórias correspondentes satisfazem as condições finais (3.7). Assim, as condições do princípio de Pontryagin são condições necessárias para otimização (cada controle ótimo deve ser um extremo); no entanto, as condições não precisam ser suficientes para a otimização que aqui podem ser controles extremos, que não são ótimos.

Poderia ser visto na demonstração deste princípio que a condição (3.17) é uma implicação das condições (3.11) e (3.15). No entanto, verificar se a trajetória é extremal não necessário (3.17). A fórmula (3.17) implica $H(t, x^*(t), u^*(t))$ ser contínua embora o controle $u^*(t)$ possa ser descontínuo.

Observação 12. *Se no enunciado do Teorema para $P(t)$, $P(t)$ for substituído por $\tilde{P}(t) = \gamma P(t)$ e no lugar de λ colocarmos $\tilde{\lambda} = \gamma\lambda$ onde γ onde gama é um número real positivo, então as eq. (3.10) - (3.15) contínuas e válidas se puder ser determinado considerando que $\lambda_1 < 0$, então uma constante γ pode ser selecionada tal que $\lambda_1 = -1$. Por esta razão, no caso em que $\lambda_1 < 0$ podemos sem perda de generalidade assumir que $\lambda_1 = -1$.*

Existem problemas para os quais λ_1 deve ser nulo. Estes problemas são chamados **abnormais**. Suponha que um controle $u(t)$ é um controle extremal com $\lambda_1 = 0$. Note, de (3.10) - (3.17), se o problema de controle original é substituído por um problema de controle com as mesmas equações do movimento, conjunto de controle, condições finais, e por algum outro índice de performance $\phi_1(e)$, que o mesmo controle é extremo para o novo problema. Deste modo, para um problema abnormal as condições necessárias do princípio de Pontryagin não envolvem o índice de performance, mas já estão especificadas pelas equações do movimento, conjunto de controle, e condições finais.

3.3 Enunciado do Problema de Aterrissagem na Lua

Considere o problema de uma espaçonave tentar aterrissar na Lua usando uma quantidade mínima de combustível. Para definir uma versão simplificada deste problema, seja m a massa, h e v denotam a altitude e a velocidade vertical da espaçonave sobre a Lua, e u denota o empuxo do motor. M denota a massa da nave sem combustível, h_0 e v_0 a altitude e a velocidade vertical iniciais da espaçonave. F é a quantidade inicial de combustível, α a propulsão máxima atingível pelos motores da espaçonave, k uma constante, e g a aceleração gravitacional da Lua. A aceleração gravitacional g pode ser considerada constante próxima à Lua. Assim, as equações do movimento da espaçonave são

$$\begin{cases} \dot{h} = v \\ \dot{v} = -g + \frac{1}{m}u \\ \dot{m} = -ku \end{cases} \quad (3.18)$$

O empuxo do motor da espaçonave é o controle do problema. Suponha que a classe \mathcal{U} das funções de controle são todas funções contínuas, por partes, $u(t)$ definidas no intervalo $[t_0, t_1]$ tal que

$$0 \leq u(t) \leq \alpha \quad (3.19)$$

É natural usar para tempo inicial, $t_0 = 0$, e tempo final t_1 (primeiro tempo ao atingir a Lua). As condições que devem ser satisfeitas em t_0 e t_1 são

$$h(0) - h_0 = 0, \quad v(0) - v_0 = 0, \quad m(0) - M - F = 0, \quad h(t_1) = 0, \quad v(t_1) = 0. \quad (3.20)$$

O problema é aterrissar usando uma quantidade mínima de combustível ou, equivalentemente, minimizar $-m(t_1)$ sob a classe \mathcal{U}

3.3.1 Extremais para o Problema de Aterrissagem na Lua

Vamos aplicar o princípio de Pontryagin para calcular o controle extremo do problema de aterrissagem na lua. Este problema foi primeriamente resolvido por Miele[1], [2]. Nossa discussão está fechada pela de Meditch[1]. O cálculo é longo e complicado, no entanto, esta bem ilustrada por muitas das características envolvidas na computação do controle "extremal".

Referente ao enunciado do problema de aterrissagem lunar logo acima seja $(x_1, x_2, x_3)' = (h, v, m)'$. Fixando $t_0 = 0$ e $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})' = (h_0, v_0, M + F)'$. Os valores finais de h e v são nulos, tal que $x_{11} = 0, x_{12} = 0$. A função vetorial f da equação do movimento é

$$f(t, x, u) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -g + x_3^{-1}u \\ -ku \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Assim, as equações do Teorema do Princípio de Pontryagin são

$$(\dot{P}_1(t), \dot{P}_2(t), \dot{P}_3(t)) = -(P_1(t), P_2(t), P_3(t)) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3(t)^2 u(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

ou

$$\dot{P}_1(t) = 0, \quad \dot{P}_2(t) = -P_1(t), \quad \dot{P}_3(t) = P_2(t)x_3(t)^{-2}u(t) = P_2(t)\frac{u(t)}{x_3^2(t)}. \quad (3.23)$$

A inequação ($P'(t) = [f(t, x^*(t), u) - f(t, x^*(t), u^*(t))] \leq 0$) na forma $(\max_{u \in U} \{H(t, x^*(t), u)\} = H(t, x^*, u^*))$ é

$$\begin{aligned} & \max_{u \in U} \{P_1(t)x_2(t) + P_2(t)\left(\frac{u}{x_3(t)} - g\right) - P_3(t)ku\} \\ & = P_1(t)x_2(t) + P_2(t)\left(\frac{u(t)}{x_3(t)} - g\right) - P_3(t)ku(t). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Definindo a função vetorial $\phi(t_0, t_1, x_{01}, x_{02}, x_{11}, x_{12}, x_{13})$ correspondendo para a função performance $\phi_1(t_0, t_1, x_{t_0}, x_{t_1})$ e as condições finais

$$\phi_j(t_0, t_1, x_{t_0}, x_{t_1}) = 0 \quad (j = 2, \dots, k), \quad (3.25)$$

temos

$$\phi(t_0, t_1, x_{01}, x_{02}, x_{11}, x_{12}, x_{13}) = \begin{pmatrix} -x_{13} \\ t_0 \\ x_{01} - h_0 \\ x_{02} - v_0 \\ x_{03} - M - F \\ x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Conseqüentemente, as condições necessárias que tornam (x_0^*, u_0^*) uma condição inicial do controle ótimo para o problema de controle ótimo são dadas por

$$(P_1(t_1), P_2(t_1), P_3(t_1)) = (\lambda_6, \lambda_7, -\lambda_1) \quad (3.27)$$

$$(P_1(0), P_2(0), P_3(0)) = -(\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \quad (3.28)$$

$$P_1(t_1)x_2(t_1) + P_2(t_1)\left[\frac{u(t_1)}{x_3(t_1)} - g\right] - P_3(t_1)ku(t_1) = 0 \quad (3.29)$$

$$P_1(0)x_2(0) + P_2(0)\left[\frac{u(0)}{x_3(0)} - g\right] - P_3(0)ku(0) = \lambda_2 \quad (3.30)$$

$$P_1(t)x_2(t) + P_2(t)\left[\frac{u(t)}{x_3(t)} - g\right] - P_3(t)ku(t) = \text{constante} \quad (3.31)$$

para todo $t \in [0, t_1]$. Observando as equações (3.29) e (3.30) vemos que a constante em (3.31) é λ_2 , e que $\lambda_2 = 0$.

As condições (3.24) e (3.18) implicam que um controle externo $u(t)$ deve satisfazer

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{P_2(t)}{x_3(t)} - kP_3(t) < 0 \\ \alpha & \text{se } \frac{P_2(t)}{x_3(t)} - kP_3(t) > 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Primeramente vamos mostrar que um controle para o qual $u(t)$ é nulo sobre um intervalo inicial e então alterna para α sobre um intervalo final apropriadamente escolhido é extremal.

Em um intervalo $[\tau, \bar{\tau}]$ no qual $u(t) = 0$ as soluções de (3.18) são

$$\begin{aligned} h(t) &= -\frac{g(t-\tau)^2}{2} + v(t)(t-\tau) + h(\tau) \\ v(t) &= -g(t-\tau) + v(\tau) \\ m(t) &= m(\tau). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Em um intervalo $[\tau, \bar{\tau}]$ no qual $u(t) = \alpha$ soluções de (3.18) são

$$\begin{aligned}
h(t) &= -\frac{1}{2}g(t-\tau)^2 + \frac{m(\tau) - k\alpha(t-\tau)}{m(\tau)} + \frac{t-\tau}{k} + v(\tau)(t-\tau) + h(\tau) \\
v(t) &= -g(t-\tau) - \frac{1}{k} \ln \frac{m(\tau) - k\alpha(t-\tau)}{m(\tau)} + v(\tau) \\
m(t) &= -k\alpha(t-\tau) + m(\tau).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Vamos determinar os locais geométricos dos pontos, (h, v) os quais podem ser pontos finais de um segmento no qual $u(t) = \alpha$ e $h = 0, v = 0$ é satisfeito no tempo. Considerando

$$h(\bar{\tau}) = 0, \quad v(\bar{\tau}) = 0, \quad h(\tau) = h, \quad v(\tau) = v, \quad m(\tau) = m = M + F, \quad \bar{\tau} - \tau = s$$

e substituindo na equação logo anterior, resulta

$$\begin{aligned}
h &= \frac{1}{2}gs^2 - \frac{m - k\alpha s}{k^2\alpha} \ln \frac{m - k\alpha s}{m} - \frac{s}{k} - vs \\
v &= gs + \frac{1}{k} \ln \frac{m - k\alpha s}{m}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, obtemos

$$\begin{aligned}
h &= -\frac{1}{2}gs^2 - \frac{m}{k^2\alpha} \ln \frac{m - k\alpha s}{m} - \frac{s}{k} \\
v &= gs + \frac{1}{k} \ln \frac{m - k\alpha s}{m}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Isto descreve a altitude inicial e a velocidade com a qual a ocorre a aterrissagem $h = 0$ e $v = 0$ são possíveis pelo uso do empuxo total α no tempo s .

Para o problema ser real a relação que segue deve ser válida.

$$\frac{\alpha}{M + F} > g. \tag{3.37}$$

Isto implica que a propulsão inicia com taxa máxima, a propulsão para a razão de massa inicial é maior que a aceleração gravitacional tal que ocorra desaceleração.

Se a espaçonave queima combustível com uma taxa $k\alpha$ a quantidade total de total de combustível poderia ser queimada em tempo $F/k\alpha$. Plotando as equações (3.35) e (3.36) sob a condição acima, isto é, $(\alpha/M + F) < g$ para $0 \leq s \leq F/k\alpha$ resulta numa curva no segundo quadrante do plano (v, h) conforme a figura a seguir.

Esta curva poderia ser chamada de curvade ajuste. Para a construção desta curva, sua interpretação é a seguinte: se a espaçonave está em um ponto (v, h) na curva correspondente ao parâmetro s e se isto resultaa máxima taxa α então podemos atingir $v = 0, h = 0$ em um tempo s .

Se a espaçonave está livre ela poderia seguir (3.34). se em $t = 0$ ela está em v_0, h_0 e a trajetória é livre, a primeira das duas equações de (3.34) implica que segue a parábola

$$h = h_0 - \frac{1}{2g}(v^2 - v_0^2) \quad (3.38)$$

na direção de decaimento de v para (v_0, h_0) .

Se (v_0, h_0) é um ponto plano (v, h) tal que esta parábola intercepta a curva de atualizações em um ponto (v, h) parametrizado para um valor s para o qual $0 \leq s \leq F/k\alpha$. Seja τ denotando o tempo que a espaçonave levaria em uma trajetória livre. Poderíamos mostrar que o controle

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t \leq \tau \\ \alpha, & \text{se } \tau < t \leq \tau + s \end{cases} \quad (3.39)$$

é um controle extremo. Isto seria correto se for mostrado que podemos escolher λ tal que (3.23), (3.24), (3.27) - (3.31) sejam respeitadas.

Observando a figura anterior vemos que a velocidade da espaçonave no tempo τ usando o controle $u(t)$ citado é negativo e é dado por $v_0 - g\tau$. As condições (3.23), (3.27) e (3.28) são satisfeitas por

$$\begin{aligned} P_1(t) &= -\lambda_3 = \lambda_6 \\ P_2(t) &= \lambda_3 t - \lambda_4 = \lambda_6(t_1 - t) + \lambda_7 \\ P_3(t) &= \begin{cases} -\lambda_5, & \text{se } t_0 \leq t \leq t_1 \\ -\lambda_5 + \int_{\tau}^t \frac{(\lambda_3 \tilde{t} - \lambda_4)\alpha}{m(\tilde{t})} d\tilde{t}, & \text{se } \tau \leq t_1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Definindo $r(t)$ por

$$r(t) = P_2(t) \frac{1}{x_3(t)} - kP_3(t) \quad (3.41)$$

Das equações iniciais do movimento da espaçonave, (3.23) e (3.28),

$$\dot{r}(t) = \lambda_3 \frac{1}{x_3(t)} \quad (3.42)$$

Da equação (3.40) e (3.32), temos

$$r(\tau) = (\lambda_3 \tau - \lambda_4) \frac{1}{M + F} + \lambda_5 k = 0 \quad (3.43)$$

De (3.30), (3.31), (3.29), e (3.39),

$$-\lambda_3 v_0 + \lambda_4 g = 0 \quad (17.1.23) \quad (3.44)$$

Destas duas últimas, obtemos

$$\lambda_3 = \lambda_5 \frac{kg(M+F)}{v_0 - g\tau}, \quad \lambda_4 = \lambda_5 \frac{kv_0(M+F)}{v_0 - g\tau} \quad (3.45)$$

Substituindo na equação (3.40)

$$P_3(t) = \lambda_5 \left[1 - \frac{k(M+F)}{v_0 - g\tau} \int_{\tau}^t \frac{(g\tilde{t} - v_0)}{m^2(\tilde{t})} \alpha d\tilde{t} \right], \quad \text{se } \tau \leq t \leq t_1 \quad (3.46)$$

Se escolhermos $\lambda_5 = -1$ e $\lambda_2 = 0$, λ_3 e λ_4 são feitos de acordo com (3.45), $P_1(t)$, $P_2(t)$ e $P_3(t)$, λ_6 e λ_7 dados por (3.40), então vemos que (3.23), (3.27), (3.28) e (3.30) são satisfeitas. Observe que o integrando em (3.46) é positivo e o coeficiente da integral é negativo pois $v_0 - g\tau < 0$. Assim, se $P_3(t_1) = -\lambda_1$ então $\lambda_1 < 0$. A escolha de $\lambda_5 = -1$ e (3.42) implica $\lambda_3 > 0$, logo $r(t)$ é estritamente crescente. Por (3.43), $r(\tau) = 0$ implicando que as condições de controle são satisfeitas por (3.23) e (3.30). Assim, temos que (3.39) é um controle extremo.

Agora, poderíamos mostrar que (3.30) é a única lei de controle extremo. Então poderíamos mostrar que uma lei de controle extremal pode ir mais de uma vez de zero até α e de α a zero.

Se $\lambda_3 \neq 0$, segue de (3.32) e de $\dot{r}(t) = \lambda_3 x_3^{-1}(t)$ que neste caso (3.41) implica que $r(t)$ é estritamente monotônica. Se $\lambda_3 = 0$, $\dot{r}(t) = \lambda_3/x_3(t)$ o que implica que $r(t)$ é constante.

De (3.32) poderíamos observar que, se $r(t) \neq 0$ em (3.32) implica que $u(t)$ é constante. Então, apenas precisamos mostrar que $\lambda_3 = 0$ e $r(t) = 0$ não podem ocorrer mutuamente. Se $\lambda_3 = 0$, por (3.23) e (3.28), $P_1(t) = 0$. Se $P_1(t) = 0$ e $r(t) = 0$, de (3.31), $P_2(t) = 0$. Se $P_2(t) = 0$ e $r(t) = 0$, (3.40) implica que $P_3(t) = 0$. Assim, $(P_1(t), P_2(t), P_3(t))$ é o vetor nulo. Isto implica a (3.23) que seu vetor é identicamente nulo e a (3.27) - (3.30) que $\lambda = 0$, contradizendo $\lambda \neq 0$.

O próximo passo é mostrar que se v_0 e h_0 estão na curva um controle para o qual $u(t) = \alpha$ e então $u(t) = 0$ não pode satisfazer as condições finais. Se há tal controle, o segmento da trajetória sob a qual $u(t) = 0$ tem a forma (3.33). Esta trajetória tem $v(t) = 0$ somente no tempo

$$t = \frac{v(\tau)}{g} + \tau.$$

Se $h(t) = 0$ neste tempo de relação

$$h(\tau) = -\frac{v^2(\tau)}{2g}$$

deve ser satisfeito. Não é difícil mostrar, que para a altitude e velocidade iniciais sob a curva, a trajetória é de forma (3.34), na qual $u(t) = \alpha$, sob a superfície da Lua. Mas não significa que as condições finais sejam satisfeitas. Assim se a altitude e a velocidade iniciais estão sob a curva de controle (3.39) é a única forma para satisfazer as condições finais.

Observação 13. *Se inicialmente a espaçonave te altitude e velocidade (h_0, v_0) abaixo daquela curva constantemente atualizada uma aterrissagem suave não é possível, devido ao consumo de combustível em toda a trajetória ter impacto na Lua com velocidade não nula.*

Se a altitude e velocidade iniciais estão acima da curva (3.35), (3.36), mas tal que a parábola (3.38) intercepte esta curva em (h, s) correspondente ao valor de s maior do que $F/k\alpha$, uma curva constantemente ajustada não pode ser arquivada.

Se é possível ter uma curva constantemente ajustada para todos os pontos, então existe um controle que faça a espaçonave seguir esta curva e consumir um mínimo de combustível.

Tal controle deve ser um extremal, logo deve ter a forma (3.39). Para as condições para as quais a parábola (3.38) intercepta a curva ajustada no ponto correspondente a um valor s maior do que $F/k\alpha$ da espaçonave usando um controle do tipo (3.39). Deste modo, há um intervalo final de consumo nulo contradizendo que o controle tem a forma (3.39).

3.4 Resultados Preliminares

Teorema 3.4.1. *Seja $A(t)$ uma matriz $n \times n$, $G(t)$ um vetor de dimensão n de função contínua por partes definida em um intervalo $[t_0, t_1]$, e y_0 um vetor de dimensão n . Então se $\tau \in [t_0, t_1]$ tem solução única igualmente contínua por partes e diferenciável da equação diferencial*

$$\dot{y} = A(t)y + G(t) \quad (3.47)$$

no intervalo $[t_0, t_1]$ satisfazendo a condição

$$y(\tau) = y_0 \quad (3.48)$$

O sistema do vetor de equações diferenciais

$$\dot{P} = -A(t)'P \quad (3.49)$$

é chamado sistema de equações diferenciais adjuntas das equações (3.47) ou mais especificamente, equações adjuntas. Pelo teorema (3.47) existe uma única solução para uma dada condição de contorno. se $y(t)$ é uma solução de (3.47) e $P(t)$ uma solução de (3.49),

$$\frac{d}{dt}P(t)'y(t) = -P(t)'A(t)y(t) + P(t)'A(t)y(t) + P(t)'G(t). \quad (3.50)$$

Para dois tempos τ_1 e τ_2 uma integração de τ_1 a τ_2 em (3.50) estabelece uma fórmula importante

$$P(\tau_2)'y(\tau_2) - P(\tau_1)'y(\tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} P(t)'G(t)dt. \quad (3.51)$$

Os próximos teoremas expressam a dependência das trajetórias correspondentes nos parâmetros de várias transformações.

Teorema 3.4.2. *Seja $f_u(t, x, u)$ contínuo. Para $0 \leq \varepsilon \leq \eta$, $x^\varepsilon(t)$ as soluções de*

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$$

correspondentes aos controles $u(t) + \varepsilon v(t)$ com a mesma condição inicial $x^\varepsilon(t_0) = x_0$. Então,

$$x^\varepsilon(t) = x(t) + \varepsilon \delta x(t) + o(t, \varepsilon) \quad (3.52)$$

onde $\delta x(t)$ é a solução de

$$\delta \dot{x}(t) = f_x(t, x(t), u(t))\delta x(t) + f_u(t, x(t), u(t))v(t) \quad (3.53)$$

em $[t_0, t_1]$ com condição inicial

$$\delta x(t_0) = 0. \quad (3.54)$$

Teorema 3.4.3. *Para uma variável real ε , seja $x^\varepsilon(t)$ a solução de $\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$ em $[t_0, t_1]$ correspondente ao controle de $u(t)$ com condição inicial*

$$x^\varepsilon(t_0) = x_0 + \varepsilon y_0 + o(\varepsilon). \quad (3.55)$$

Então

$$x^\varepsilon(t) = x(t) + \varepsilon \delta x(t) + o(t, \varepsilon) \quad (3.56)$$

onde $\delta x(t)$ é a solução de

$$\delta \dot{x}(t) = f_x(t, x(t), u(t))\delta x(t) \quad (3.57)$$

em $[t_0, t_1]$ com condição inicial

$$\delta x(t_0) = y_0. \quad (3.58)$$

Uma versão de dimensão n do Teorema acima é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 3.4.4. *ρ denota um vetor variável em E^n , M uma matriz $n \times n$, e $x^\rho(t)$ a solução de $\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$ e em $[t_0, t_1]$ correspondente ao controle $u(t)$ com condição inicial*

$$x^\rho(t_0) = x_0 + M\rho + o(\rho). \quad (3.59)$$

Então

$$x^p(t) = x(t) + \delta x(t)\rho + o(t, \rho) \quad (3.60)$$

onde $\delta x(t)$ é a matriz $n \times n$ que é a solução de

$$\delta \dot{x}(t) = f_x(t, x(t), u(t))\delta x(t) \quad (3.61)$$

em $[t_0, t_1]$ com condição inicial

$$\delta x(t_0) = M. \quad (3.62)$$

3.5 Apêndice Parte III

3.6 O Problema dos “n-Corpos” de Newton: Uma Abordagem Clássica e seus Modernos Desenvolvimentos

O mais famoso dos problemas dinâmicos é o problema de três corpos. Este problema vem sendo estudado ao longo dos séculos por gerações de matemáticos em diversas áreas como, por exemplo, Mecânica e Astronomia. Na prática, podemos citar as aplicações em Mecânica Celeste, onde os corpos do sistema solar atraem-se mutuamente sujeitos às Leis de Newton e é usual considerar o problema da determinação de seus movimentos em uma forma “ideal”, na qual tais corpos são comparados à partículas de massas iguais às dos respectivos corpos e ocupando a mesma posição de seus centros de massa. Esta aproximação é válida pois os corpos celestes possuem forma aproximada à de esferas cujas dimensões são muito pequenas quando comparadas à distância entre eles.

Este problema teve início com a obra-prima de Isaac Newton, o livro “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”, no ano de 1687 e é enunciado da seguinte forma:

”Três partículas atraem-se mutuamente de acordo com as Leis de Newton tal que entre cada par de partículas existe uma força de atração proporcional ao produto das massas das partículas e ao inverso do quadrado de suas distâncias; são livres em seu movimento no espaço e estão, à princípio, em qualquer estado de movimento dado para determinar seu subsequente movimento.”

O problema dos três corpos não pode ser resolvido em termos finitos por meio de qualquer função até o presente conhecimento da Análise. Este aspecto estimulou a pesquisa em torno do tema ao longo dos últimos 300 anos nos quais as gerações de matemáticos vêm explorando novos métodos de investigação. Aqui, vale lembrar que, junto com outros problemas em Mecânica Celeste, o ponto de partida no desenvolvimento de muitas idéias tais como a teoria das equações diferenciais e áreas relacionadas. Em meio à grande quantidade de trabalhos dedicados ao assunto desde o século XVIII, muitos dos quais ostentam nomes de grandes matemáticos da História. Ainda hoje encontramos vários que mantêm seu valor. As pesquisas do século XVIII legaram-nos as soluções parciais de

Euler e Lagrange, bem como o Método da Variação de Parâmetros. Já no século XIX temos a idéia da representação de soluções em termos de séries de potências e de séries trigonométricas. Ainda hoje astrônomos determinam órbitas de corpos celestes usando freqüentemente métodos obtidos naquele século. Culminando o século XIX, temos as notáveis pesquisas de Poincaré e o famoso Teorema de Sundmann. No século XX o foco transfere-se para a análise qualitativa dos problemas. Trabalhos que na maioria dos casos relacionam-se à Mecânica Celeste e a teoria qualitativa das equações diferenciais podem ser encontrados em Poincaré, Birkhoff e Siegel.

Neste ponto, chamamos a atenção para uma citação de A. Wintner que cada geração formula e resolve suas próprias "questões fundamentais no problema dos três corpos". Imbuídos neste espírito, saímos a campo na tentativa de abordar a formulação e solução do Problema dos Três Corpos na atual geração. Este será o objetivo primário do presente trabalho. Outro objetivo, nominalmente secundário, mas igualmente importante, é a apresentação de alguns aspectos clássicos relativos ao tópico. Tomando por base a redução do problema dos Três Corpos a um problema dinâmico com um menor número de graus de liberdade, não apenas estaremos tratando das técnicas usadas por nomes como Hamilton, Lagrange, Jacobi, Poincaré e outros (e desta forma usando largamente os conhecimentos adquiridos nas aulas expositivas), mas também, ao final deste tópico, estaremos em condições de passarmos ao objetivo primário.

3.6.1 Abordagem Clássica do Problema dos Três Corpos

As Equações Diferenciais do Problema

Sejam P, Q, R, três partículas, m_1 , m_2 , m_3 suas massas e r_{23} , r_{31} , r_{12} suas distâncias mútuas. Vamos tomar um sistema de eixos coordenados $Oxyz$ onde (q_1, q_2, q_3) , (q_4, q_5, q_6) e (q_7, q_8, q_9) são as coordenadas de P, Q, R, respectivamente. A Energia Cinética do Sistema é

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2 + \dot{q}_6^2) + \frac{1}{2}m_3(\dot{q}_7^2 + \dot{q}_8^2 + \dot{q}_9^2).$$

A força de atração entre m_1 e m_2 é $k^2 m_1 m_2 r_{12}^{-2}$, onde k^2 é a constante de atração. Vamos supor que as unidades escolhidas sejam tais que $k^2 = 1$, então a força de atração será $m_1 m_2 r_{12}^{-2}$ e o termo correspondente na Energia Potencial é $-m_1 m_2 r_{12}^{-1}$. Desta forma a Energia Potencial do sistema é

$$\begin{aligned} V &= -\frac{m_2 m_3}{r_{23}} - \frac{m_3 m_1}{r_{31}} - \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \\ &= -m_2 m_3 \{(q_4 - q_7)^2 + (q_5 - q_8)^2 + (q_6 - q_9)^2\}^{1/2} \\ &\quad - m_3 m_1 \{(q_7 - q_1)^2 + (q_8 - q_2)^2 + (q_9 - q_3)^2\}^{1/2} \\ &\quad - m_1 m_2 \{(q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 + (q_3 - q_6)^2\}^{1/2} \end{aligned}$$

As equações do movimento do sistema são dadas por

$$m_k \ddot{q}_r = -\frac{\partial V}{\partial q_r}, \quad r = 1, 2, \dots, 9,$$

onde k denota a parte inteira de $(1/3)(r+2)$. Este sistema é constituído por nove equações diferenciais de segunda ordem, logo, o sistema é de ordem 18. Reescrevendo o sistema da seguinte forma:

$$m_k \dot{q}_r = p_r, \quad r = 1, 2, \dots, 9$$

e

$$H = \sum_{r=1}^9 \frac{p_r^2}{2m_k} + V,$$

obtemos a forma Hamiltoniana,

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}; \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}; \quad r = 1, 2, \dots, 9,$$

e este é o conjunto de 18 equações diferenciais, cada um de primeira ordem, para a determinação das variáveis $q_1, q_2, \dots, q_9, p_1, p_2, \dots, p_9$.

Lagrange mostrou que este sistema pode ser reduzido a um sistema de 6ª ordem. Em primeiro lugar, dado que nenhuma força age sobre o sistema, exceto as forças de atração mútuas entre as partículas, o centro de gravidade do sistema move-se em linha reta com velocidade uniforme. Este fato é expresso pelas seguintes integrais

$$\begin{cases} p_1 + p_4 + p_7 = a_1 \\ p_2 + p_5 + p_8 = a_3 \\ p_3 + p_6 + p_9 = a_5 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} m_1 q_1 + m_2 q_4 + m_3 q_7 - (p_1 + p_4 + p_7)t = a_2 \\ m_1 q_2 + m_2 q_5 + m_3 q_8 - (p_2 + p_5 + p_8)t = a_4 \\ m_1 q_3 + m_2 q_6 + m_3 q_9 - (p_3 + p_6 + p_9)t = a_6 \end{cases}$$

onde a_1, a_2, \dots, a_6 são constantes. Espera-se que o uso destas integrais permita a redução da ordem das equações do movimento de 18ª para 12ª ordem.

Em segundo lugar, o momentum angular dos três corpos ao redor de cada eixo coordenado é constante para todo movimento. Este fato é analiticamente demonstrado pelas seguintes equações

$$\begin{cases} q_1 p_2 - q_2 p_1 + q_4 p_5 - q_5 p_4 + q_7 p_8 - q_8 p_7 = a_7 \\ q_2 p_3 - q_3 p_2 + q_5 p_6 - q_6 p_5 + q_8 p_9 - q_9 p_8 = a_8 \\ q_3 p_1 - q_1 p_3 + q_6 p_4 - q_4 p_6 + q_9 p_7 - q_7 p_9 = a_9 \end{cases} ,$$

onde a_7, a_8, a_9 são constantes. Usando estas três integrais podemos esperar uma nova redução na ordem do problema (12ª para 9ª ordem). Mas quando uma das coordenadas que define a posição é colocada como sendo o azimutal ϕ de um dos corpos com respeito a algum eixo coordenado (digamos eixo z) e as outras coordenadas definem a posição do sistema relativo ao plano deste azimutal, a coordenada ϕ pode ser ignorada e portanto integral correspondente (que é uma das integrais de momentum angular citadas acima) pode ser usada para reduzir o sistema (ordem 8). Este fato, embora implicitamente contido nos trabalhos de Lagrange, foi estabelecido por Jacobi em 1843 e é geralmente referido como **Eliminação dos Nodos**.

Podemos reduzir ainda mais a ordem das equações utilizando a integral da energia e eliminando o tempo, reduzindo a ordem do sistema para 6.

Equações de Jacobi

Jacobi, considerando o movimento de qualquer número de partículas livres no espaço atraindo-se mutuamente conforme as Leis de Newton, introduziu a função

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{m_i m_j}{M} r_{ij}^2,$$

onde m_i, m_j são as massas das duas partículas típicas do sistema, r_{ij} a distância no tempo t entre elas, M a massa total do sistema e o somatório é estendido sobre todos os pares de partículas do sistema. Esta função, usada em pesquisas sobre estabilidade de sistemas, é a função de Jacobi, denotada por Φ .

Supor que o centro de gravidade do sistema está em repouso. Seja (x_i, y_i, z_i) as coordenadas da partícula m_i com referência aos eixos coordenados e centro de gravidade na origem. A energia cinética do sistema é

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

e conseqüentemente teremos

$$2MT = \left(\sum_i m_i \right) \times \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2).$$

Mas,

$$\left(\sum_i m_i \right) \times \sum_i m_i \dot{x}_i^2 - \left(\sum_i m_i \dot{x}_i \right)^2 = \sum_{i,j} m_i m_j (\dot{x}_i - \dot{x}_j)^2,$$

onde o somatório do lado direito é estendido sobre cada par de partículas do sistema, e temos que $\sum_i m_i \dot{x}_i = 0$ devido à propriedade do centro de gravidade.

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2M} \sum_{i,j} m_i m_j \{(\dot{x}_i - \dot{x}_j)^2 + (\dot{y}_i - \dot{y}_j)^2 + (\dot{z}_i - \dot{z}_j)^2\} \\
 &= \frac{1}{2M} \sum_{i,j} m_i m_j v_{ij}^2,
 \end{aligned}$$

onde v_{ij} denota a velocidade da partícula m_i relativa a m_j .

Da mesma forma pode-se mostrar que

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \Phi.$$

Agora se V denotar a Energia Potencial do sistema, a constante arbitrária em V é determinada pela condição $V = 0$. Quando as distâncias entre as partículas forem infinitamente grandes, tem-se

$$V = - \sum_{i,j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}.$$

As equações do movimento da partícula m_i são

$$m_i \ddot{x}_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i}; \quad m_i \ddot{y}_i = - \frac{\partial V}{\partial y_i}; \quad m_i \ddot{z}_i = - \frac{\partial V}{\partial z_i}.$$

Multiplicando estas equações por x_i , y_i , z_i , respectivamente; somando-as entre si e para todas as partículas do sistema; e desde que V é a homogeneidade de grau-1 nas variáveis, obteremos

$$\sum_i m_i (x_i \ddot{x}_i + y_i \ddot{y}_i + z_i \ddot{z}_i) = V$$

ou

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{2} \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - 2T = V$$

ou, ainda

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} = 2T + V,$$

que é a EQUAÇÃO DE JACOBI.

Redução à 12ª Ordem pelo uso das Integrais de Movimento do Centro de Gravidade

Tomando as equações do movimento do problema dos três corpos,

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}; \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \quad r = 1, 2, \dots, 9.$$

Primeiro reduz-se o sistema de ordem 18 para um sistema de ordem 12 pelo uso de integrais de movimento do centro de gravidade. Para tanto, será usada a transformação-contato (devido à Poincaré, 1896) definida pelas equações

$$q_r = \frac{\partial W}{\partial p_r}; \quad p'_r = \frac{\partial W}{\partial q'_r} \quad r = 1, 2, \dots, 9,$$

onde

$$W = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + p_3 q'_3 + p_5 q'_5 + p_6 q'_6 + (p_1 + p_4 + p_7) q'_7 + (p_2 + p_5 + p_8) q'_8 + (p_3 + p_6 + p_9) q'_9.$$

Interpreta-se esta equação da seguinte forma: (q'_1, q'_2, q'_3) são as coordenadas de m_1 com respeito a m_3 , (q'_4, q'_5, q'_6) são as coordenadas de m_2 relativas a m_3 , (q'_7, q'_8, q'_9) são as coordenadas de m_3 ; (p'_1, p'_2, p'_3) são as componentes de momentum de m_1 , (p'_4, p'_5, p'_6) são as componentes de momentum de m_2 e (p'_7, p'_8, p'_9) são as componentes de momentum do sistema. Logo, as equações diferenciais, ficam

$$\frac{dq'_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_r}, \quad \frac{dp'_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q'_r},$$

onde, substituindo por novas variáveis, tem-se

$$\begin{aligned} H = & \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3} \right) (p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2) + \left(\frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3} \right) (p_4'^2 + p_5'^2 + p_6'^2) + \\ & + \frac{1}{m_3} \left\{ p_1' p_4' + p_2' p_5' + p_3' p_6' + \frac{1}{2} p_7'^2 + \frac{1}{2} p_8'^2 + \frac{1}{2} p_9'^2 - p_7' (p_1' + p_4') - p_8' (p_2' + p_5') + \right. \\ & + \left. p_9' (p_3' + p_6') \right\} - m_2 m_3 \{ q_4'^2 + q_5'^2 + q_6'^2 \}^{-1/2} - m_3 m_1 \{ q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 \}^{-1/2} \\ & - m_1 m_2 \{ (q_1' - q_4')^2 + (q_2' - q_5')^2 + (q_3' - q_6')^2 \}^{-1/2}. \end{aligned}$$

Mas q'_7, q'_8, q'_9 são incógnitas por serem independentes de H e portanto suas integrais são constantes. Sem perda de generalidade, vamos supor estas constantes nulas, o que significa que o centro de gravidade do sistema está em repouso: o potencial cinético reduzido obtido da eliminação das coordenadas será, desta forma, a derivada do potencial cinético não-reduzido pela situação de p'_7, p'_8, p'_9 por zero, e o novo Hamiltoniano será derivado de H da mesma forma. O sistema de ordem 12, para o qual as equações de movimento do problema dos três corpos foram reduzidas, pode ser agora escrito como:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}; \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \quad r = 1, 2, \dots, 6,$$

onde

$$\begin{aligned} H = & \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3} \right) (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \left(\frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3} \right) (p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) + \\ & + \frac{1}{m_3} \{ p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 \} - m_2 m_3 \{ q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 \}^{-1/2} - m_3 m_1 \{ q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \}^{-1/2} \\ & - m_1 m_2 \{ (q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 + (q_3 - q_6)^2 \}^{-1/2}. \end{aligned}$$

Este sistema possui uma integral de energia $H=\text{constante}$ e três integrais de momento angular, a saber:

$$\begin{cases} q_2 p_3 - q_3 p_2 + q_5 p_6 - q_6 p_5 = A_1 \\ q_3 p_1 - q_1 p_3 + q_6 p_4 - q_4 p_6 = A_2 \\ q_1 p_2 - q_2 p_1 + q_4 p_5 - q_5 p_4 = A_3 \end{cases},$$

onde A_1 , A_2 e A_3 são constantes.

Redução para Ordem 8 pelo uso de Integrais de Momentum Angular e Diminuição de Nodos

O sistema de ordem 12 obtido anteriormente deve ser agora reduzido a ordem 8 da seguinte forma: aplicar às variáveis a transformação-contato definida pelas seguintes equações

$$q_r = \frac{\partial W}{\partial p_r} \quad \text{e} \quad p'_r = \frac{\partial W}{\partial q'_r} \quad r = 1, 2, \dots, 6,$$

onde,

$$\begin{aligned} W = & p_1 (q'_1 \cos q'_5 - q'_2 \cos q'_6 \sin q'_5) + p_2 (q'_1 \sin q'_5 + q'_2 \cos q'_6 \cos q'_5) + p_3 q'_2 \sin q'_6 \\ & + p_4 (q'_3 \cos q'_5 - q'_4 \cos q'_6 \sin q'_5) + p_5 (q'_3 \sin q'_5 + q'_4 \cos q'_6 \cos q'_5) + p_6 q'_4 \sin q'_6 \end{aligned}$$

A interpretação física das novas variáveis é a seguinte: aos eixos coordenados $Oxyz$, adicionar um conjunto de eixos móveis $Ox'y'z'$; Ox' é tal que seja a intersecção ou nodo do plano Oxy com o plano dos três corpos, Oy' é a reta perpendicular a isto no plano dos três corpos e Oz' é a normal ao plano dos três corpos. Então (q'_1, q'_2) são as coordenadas de m_1 relativas aos eixos traçados através de m_3 paralelo a Ox' , Oy' ; (q'_3, q'_4) são as coordenadas

de m_2 relativas aos mesmos eixos; q'_5 é o ângulo entre Ox' e Ox ; q'_6 é o ângulo entre Oz' e Oz ; p'_1 e p'_2 são as componentes do momentum de m_1 relativo aos eixos Ox' , Oy' ; p'_3 e p'_4 são as componentes do momentum de m_2 relativo aos mesmos eixos; p'_5 e p'_6 são os momentos angulares do sistema relativo aos eixos Oz e Ox' , respectivamente.

As equações do movimento em termos das novas variáveis são

$$\frac{dq'_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_r}; \quad \frac{dp'_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q'_r} \quad r = 1, 2, \dots, 6,$$

onde, pela substituição em H das novas variáveis, tem-se

$$\begin{aligned} H = & \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3} \right) \left[p_1'^2 + p_2'^2 + \frac{1}{(q_2'q_3' - q_1'q_4')^2} \left\{ (p_1'q_2' - p_2'q_1' + p_3'q_4' - p_4'q_3')q_4' \cot q'_6 + \right. \right. \\ & \left. \left. + p_5'q_4' \operatorname{cosec} q'_6 + p_6'q_3' \right\}^2 \right] + \\ & + \left(\frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3} \right) \left[p_3'^2 + p_4'^2 + \frac{1}{(q_2'q_3' - q_1'q_4')^2} \left\{ (p_1'q_2' - p_2'q_1' + p_3'q_4' - p_4'q_3')q_2' \cot q'_6 + \right. \right. \\ & \left. \left. + p_5'q_2' \operatorname{cosec} q'_6 + p_6'q_1' \right\}^2 \right] + \\ & + \frac{1}{m_3} \left[p_1'p_3' + p_2'p_4' - \frac{1}{(q_2'q_3' - q_1'q_4')^2} \left\{ (p_1'q_2' - p_2'q_1' + p_3'q_4' - p_4'q_3')q_4' \cot q'_6 + \right. \right. \\ & \left. \left. + p_5'q_4' \operatorname{cosec} q'_6 + p_6'q_3' \right\} \cdot \left\{ (p_1'q_2' - p_2'q_1' + p_3'q_4' - p_4'q_3')q_2' \cot q'_6 + p_5'q_2' \operatorname{cosec} q'_6 + p_6'q_1' \right\} \right] \\ & - m_2m_3(q_3'^2 + q_4'^2)^{-1/2} - m_3m_1(q_1'^2 + q_2'^2)^{-1/2} - m_1m_2 \left\{ (q_1' - q_3')^2 + (q_2' - q_4')^2 \right\}^{-1/2}. \end{aligned}$$

Agora, q'_5 não ocorre em H e é por isso um coordenada que pode ser ignorada. A integral correspondente é $p'_5 = K$, onde K é uma constante. a equação $dq'_5/dt = \partial H/\partial K$ pode ser integrada por uma quadratura simples quando o resto das equações do movimento tiverem sido integradas. Assim, as equações para q'_5 e p'_5 irão desaparecer do sistema, que reduz-se à um sistema de ordem 10

$$\frac{dq'_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_r}; \quad \frac{dp'_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q'_r} \quad r = 1, 2, 3, 4, 6,$$

onde p'_5 é substituído pela constante K sempre que aparecer em H.

Foi feito uso de uma das três integrais de momentum angular ($p'_5 = K$) e a eliminação de nodos. Quando as outras duas integrais de momentum angular forem expressas em termos das novas variáveis, tornar-se-ão em:

$$\begin{cases} (p'_2 q'_1 - p'_1 q'_2 p'_4 q'_3 - p'_3 q'_4) \operatorname{sen} q'_5 \operatorname{cosec} q'_6 - K \operatorname{sen} q'_5 \cot q'_6 + p'_6 \cos q'_5 = A_1 \\ -(p'_2 q'_1 - p'_1 q'_2 p'_4 q'_3 - p'_3 q'_4) \operatorname{sen} q'_5 \operatorname{cosec} q'_6 + K \cos q'_5 \cot q'_6 + p'_6 \operatorname{sen} q'_5 = A_2 \end{cases}$$

Os valores das constantes A_1 e A_2 dependem da posição dos eixos coordenados $Oxyz$. Escolhe-se o eixo Oz como a reta resultante do momentum angular do sistema tal que as constantes A_1 e A_2 sejam nulas. O plano-xy especial assim introduzido é chamado PLANO INVARIÁVEL do sistema. As duas últimas equações fornecem

$$\begin{cases} K \cos q'_6 = p'_2 q'_1 - p'_1 q'_2 p'_4 q'_3 - p'_3 q'_4, \\ p'_6 = 0. \end{cases}$$

Estas equações determinam q'_6 e p'_6 em termos das outras variáveis e tratadas como substitutas às equações

$$\frac{dq'_6}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_6}; \quad \frac{dp'_6}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q'_6} \quad \text{no sistema.}$$

Assim, o sistema toma a forma

$$\frac{dq'_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_r}; \quad \frac{dp'_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q'_r} \quad r = 1, 2, 3, 4$$

onde,

$$\begin{aligned} H = & \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3} \right) \left[p_1'^2 + p_2'^2 + \frac{q_4'^2}{(q_2' q_3' - q_1' q_4')^2} \{ (p_1' q_2' - p_2' q_1' + p_3' q_4' - p_4' q_3') \cot q'_6 \right. \\ & \left. + K \operatorname{cosec} q'_6 \right]^2 \\ & + \left(\frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3} \right) \left[p_3'^2 + p_4'^2 + \frac{q_2'^2}{(q_2' q_3' - q_1' q_4')^2} \{ (p_1' q_2' - p_2' q_1' + p_3' q_4' - p_4' q_3') \cot q'_6 \right. \\ & \left. + K \operatorname{cosec} q'_6 \right]^2 + \\ & + \frac{1}{m_3} \left[p_1' p_3' + p_2' p_4' - \frac{q_2' q_4'}{(q_2' q_3' - q_1' q_4')^2} \{ (p_1' q_2' - p_2' q_1' + p_3' q_4' - p_4' q_3') \cot q'_6 + K \operatorname{cosec} q'_6 \} \right]^2 - \\ & - m_2 m_3 (q_3'^2 + q_4'^2)^{-1/2} - m_3 m_1 (q_1'^2 + q_2'^2)^{-1/2} - m_1 m_2 \left\{ (q_1' - q_3')^2 + (q_2' - q_4')^2 \right\}^{-1/2}. \end{aligned}$$

e onde, após a formação das derivadas de H, q'_6 será substituída pelo seu valor encontrado da equação $K \cos q'_6 = p'_2 q'_1 - p'_1 q'_2 + p'_4 q'_3 - p'_3 q'_4$.

Agora, seja H a função obtida quando este valor de q'_6 é substituído em H. Então, se s denotar qualquer uma das variáveis $q'_1, q'_2, q'_3, q'_4, p'_1, p'_2, p'_3, p'_4$, tem-se

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial q'_6} \frac{\partial q'_6}{\partial s}.$$

Mas como $q'_6 = 0$, $\frac{\partial H}{\partial q'_6} = p'_6 = 0$ e então $\frac{\partial H'}{\partial s} = \frac{\partial H}{\partial s}$. Em outras palavras, pode-se substituir q'_6 em H antes da derivação de H e portanto, as equações do movimento do problema de três corpos são reduzidas ao sistema de ordem 8 que segue

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}; \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \quad r = 1, 2, 3, 4,$$

onde

$$\begin{aligned} H = & \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3} \right) (p_1^2 + p_2^2)^2 + \left(\frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3} \right) (p_3^2 + p_4^2) + \frac{1}{m_3} (p_1 p_3 + p_2 p_4) \\ & + (q_2 q_3 - q_1 q_4)^{-2} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3} \right) q_4^2 + \left(\frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3} \right) q_2^2 - \frac{q_2 q_4}{m_3} \right\} \cdot \left\{ K^2 - \right. \\ & \left. (p_2 q_1 - p_1 q_2 + p_4 q_3 - p_3 q_4)^2 \right\} - m_2 m_3 (q_3^2 + q_4^2)^{-1/2} - m_3 m_1 (q_1^2 + q_2^2)^{-1/2} - \\ & - m_1 m_2 \left\{ (q_1 - q_3)^2 + (q_2 - q_4)^2 \right\}^{-1/2}. \end{aligned}$$

Muitas das grandezas presentes em H possuem uma simples interpretação física: $(q_2 q_3 - q_1 q_4)$ é duas vezes a área do triângulo formado pelos corpos e

$$\frac{2m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \left\{ \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3} \right) q_4^2 + \left(\frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3} \right) q_2^2 - \frac{1}{m_3} q_2 q_4 \right\} \text{ é o momento de inércia}$$

dos três corpos sobre a reta na qual o plano dos corpos encontra o plano invariável através do seu centro de gravidade. Observar que este valor de H difere do valor de H quando $K=0$ por termos que não envolvem p_1, p_2, p_3, p_4 . estes termos em K podem ser tratados como parte da energia potencial e pode ser dito que o sistema difere do correspondente com $K = 0$ por multiplicações na energia potencial. Pode-se mostrar que quando $K = 0$, o movimento dá-se em um plano.

Redução para Ordem 6

As equações do movimento podem ser, agora, reduzidas de equações de ordem 8 para equações de ordem 6 através da integral de energia $H=\text{constante}$ e eliminando-se o tempo. O sistema Hamiltoniano de ordem 6 assim obtido é, no estágio atual de nosso conhecimento, a última forma reduzida das equações do movimento do problema geral dos três corpos.

O problema dos Três Corpos no Plano

O movimento de três partículas pode dar-se em um plano ao invés de um espaço tridimensional. Evidentemente, tal ocorrerá se as direções das velocidades iniciais dos corpos estiverem no plano dos corpos. Este caso é conhecido como Problema dos Três Corpos no Plano. A seguir as equações do movimento serão reduzidas a um sistema Hamiltoniano da menor ordem possível.

Sejam (q_1, q_2) as coordenadas de m_1 , (q_3, q_4) as coordenadas de m_2 e (q_5, q_6) as coordenadas de m_3 , referentes a quaisquer eixos coordenados Ox, Oy no plano de movimento; seja também $p_r = m_k \dot{q}_r$, onde K denota o maior inteiro em $1/2(r+1)$. As equações de movimento são

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}; \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \quad r = 1, 2, \dots, 6$$

onde,

$$H = \frac{1}{2m_1}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2m_2}(p_3^2 + p_4^2) + \frac{1}{2m_3}(p_5^2 + p_6^2) - m_2 m_3 \{(q_3 - q_5)^2 + (q_4 - q_6)^2\}^{-1/2} \\ - m_3 m_1 \{(q_5 - q_1)^2 + (q_6 - q_2)^2\}^{-1/2} - m_1 m_2 \{(q_1 - q_3)^2 + (q_2 - q_4)^2\}^{-1/2}$$

Estas equações serão reduzidas da 12ª ordem para a 8ª ordem pelo uso de quatro integrais de movimento do centro de gravidade. Usando nas variáveis a transformação-contato definida pelas equações

$$q_r = \frac{\partial W}{\partial p_r}; \quad p'_r = \frac{\partial W}{\partial q'_r} \quad r = 1, 2, \dots, 6$$

onde,

$$W = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + p_3 q'_3 + p_4 q'_4 + (p_1 + p_3 + p_5) q'_5 + (p_2 + p_4 + p_6) q'_6.$$

Pode-se concluir que (q'_1, q'_2) são as coordenadas de m_1 relativas ao eixo paralelo aos eixos coordenados por m_3 , (q'_3, q'_4) são as coordenadas de m_2 em relação aos mesmos eixos, (q'_5, q'_6) são as coordenadas em relação aos eixos principais, (p'_1, p'_2) são as componentes de momentum de m_1 , (p'_3, p'_4) são as componentes de momentum de m_2 e (p'_5, p'_6) são as componentes de momentum do sistema.

As equações q'_5, q'_6, p'_5, p'_6 desaparecem do sistema e suprimindo os acentos nas novas variáveis, as equações de movimento são reduzidas a um sistema de ordem 8

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}; \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \quad r = 1, 2, 3, 4$$

onde,

$$W = p_1 q'_1 \cos q'_4 + p_2 q_1 \sin q'_4 + p_3 (q'_2 \cos q'_4 - q'_3 \sin q'_4) + p_4 (q'_2 \sin q'_4 + q'_3 \cos q'_4).$$

A interpretação física desta transformação é a seguinte: q'_1 é a distância $m_1 m_3$; q'_2 e q'_3 são as projeções de $m_2 m_3$ sobre a perpendicular a $m_1 m_3$; q'_4 é o ângulo entre $m_1 m_3$ e o eixo "x"; p'_1 é a componente do momentum de m_1 ao longo de $m_3 m_1$; p'_2 e p'_3 são as componentes de momentum de m_2 paralelo e perpendicular a $m_3 m_1$; p'_4 é o momentum angular do sistema.

As equações diferenciais, quando expressas em termos das novas variáveis, ficam

$$\frac{dq'_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_r}; \quad \frac{dp'_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q'_r}; \quad r = 1, 2, 3, 4$$

onde,

$$\begin{aligned} H = & \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) \left\{ p_1'^2 + \frac{1}{q_1'^2} (p_3' p_2' - p_2' p_3' - p_4')^2 \right\} + \left(\frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3} \right) (p_2' + p_3') + \\ & + \frac{1}{m_3} \left\{ p_1' p_2' - \frac{p_3'}{q_1'} (p_3' p_2' - p_2' p_3' - p_4') \right\} - m_2 m_3 (q_1'^2 + q_3'^2)^{-1/2} - m_3 m_1 q_1'^{-1} \\ & - m_1 m_2 \left\{ (q_1' - q_2')^2 + q_3'^2 \right\}^{-1/2}. \end{aligned}$$

Como q'_4 não está presente em H, é uma coordenada ignorável e a integral correspondente é $p'_4 = K = \text{constante}$, significando a integral do momentum angular do sistema. A equação $\dot{q}'_4 = \frac{\partial H}{\partial p'_4}$ pode ser integrada por quadratura quando o resto das equações tiverem sido integradas. Portanto, as equações para p'_4 e q'_4 desaparecem do sistema. Suprimindo os acentos nas novas variáveis, as equações ficam

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}; \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}; \quad r = 1, 2, 3$$

onde,

$$\begin{aligned}
H = & \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) \left\{ p_1^2 + \frac{1}{q_1^2} (p_3 p_2 - p_2 p_3 - K)^2 \right\} + \left(\frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3} \right) (p_2^2 + p_3^2) + \\
& + \frac{1}{m_3} \left\{ p_1 p_2 - \frac{p_3}{q_1} (p_3 p_2 - p_2 p_3 - K) \right\} - m_2 m_3 (q_1^2 + q_3^2)^{-1/2} - m_3 m_1 q_1^{-1} \\
& - m_1 m_2 \left\{ (q_1 - q_2)^2 + q_3^2 \right\}^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Este sistema é de 6ª ordem e pode ser reduzido para 4ª ordem fazendo-se uso da integral de energia e eliminando o tempo.

Extensão para "n"Corpos

Muitas transformações usadas anteriormente na redução do Problema dos Três Corpos podem ser estendidas para aplicação ao problema geral dos "n"corpos atraindo-se mutuamente de acordo com as Leis de Newton. Na sua forma geral, as equações de movimento dos "n"corpos constituem um sistema de ordem 6n que pode ser reduzido para a ordem (6n-12), usando as seis integrais de movimento do centro de gravidade, as três integrais de momentum angular, a integral de energia, a eliminação do tempo e a eliminação dos nodos.

O Problema Restrito dos Três Corpos: Modelos para Três Corpos

Um caso especial do problema dos três corpos que tem ocupado lugar de destaque em recentes pesquisas é o Problema Restrito dos Três Corpos, cujo enunciado segue:

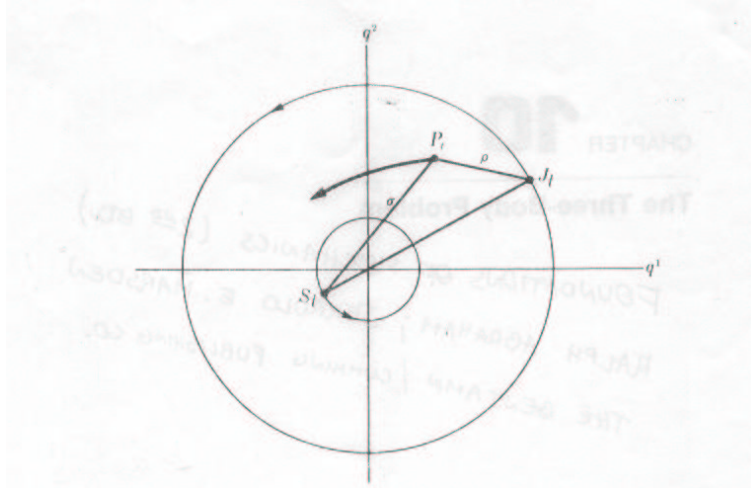
"Dois corpos S e J movem-se em círculos ao redor de seus centros de gravidade, O, sob a influência de suas atrações mútuas. Um terceiro corpo P, sem massa (i.é, tal que é atraído por S e J mas não influencia seus movimentos), move-se no mesmo plano que S e J. O Problema Restrito dos Três Corpos é determinar o movimento do corpo P, que é, em geral, chamado planetóide."

O domínio experimental pode ser, por exemplo, o Sol, Júpiter e um pequeno astróide, ou a Terra, a Lua e um veículo espacial, ... Serão omitidos aqueles pontos em que o potencial for singular. Portanto, será considerado o seguinte modelo (figura 1)

Definição:

Para $t \in \mathbb{R}$, $0 < \mu < 1$, seja

$$\begin{aligned}
S_t &= (-\mu \cos t, -\mu \sin t) \in \mathbb{R}^2, \\
S_* &= \cup \{(t, S_t) | t \in \mathbb{R}\}, \\
J_t &= ((1 - \mu) \cos t, (1 - \mu) \sin t) \in \mathbb{R}^2, \\
J_* &= \cup \{(t, J_t) | t \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$



O primeiro modelo Hamiltoniano para o problema restrito dos três corpos (3BIH) é um sistema (M, H, m, μ) onde:

- (i) $M \subset \mathbb{R} \times T^*\mathbb{R}^2$ (espaço fase) definido por $M = \mathbb{R} \times [\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2)^* \setminus (S_* \cup J_*) \times (\mathbb{R}^2)]$ com a estrutura de contato padrão
- (ii) $m \in M$ (condições iniciais)
- (iii) $\mu \in \mathbb{R}, 0 < \mu < 1$ (massa reduzida)
- (iv) $H \in \mathcal{F}(M)$, o Hamiltoniano, definido por

$$H(t, \vec{q}, \vec{p}) = \frac{\|\vec{p}\|^2}{2} - \frac{\mu}{\rho(t, \vec{q})} - \frac{1 - \mu}{\sigma(t, \vec{q})}$$

onde $\|\cdot\|$ indica a norma euclidiana, $\rho(t, \vec{q}) = \|\vec{q} - J_t\|$ e $\sigma(t, \vec{q}) = \|\vec{q} - S_t\|$.

A predição consiste na órbita de m no sistema Hamiltoniano \widetilde{X}_H dependente do tempo.

Para obter um Hamiltoniano regular $H \in \mathcal{F}(M)$, sacrificamos a integralidade de \widetilde{X}_H (colisões). As hipóteses de que os três corpos estão em um plano e que P não contribui para o potencial gravitacional são feitas para simplificar o problema (daí o termo "restrito"). Note que H não é invariante sob rotações e desta forma não há conservação de momentum angular. Uma importante observação é que sendo o modelo invariante em relação à "involução" $(q^1, q^2, \mu) \mapsto (-q^1, -q^2, 1 - \mu)$, pode-se substituir a hipótese $\mu \in (0, 1)$ por $\mu \in (0, 1/2]$, ou seja, assume-se que $M_S \geq M_J$.

Proposição:

Sejam M e H tais como em (2.8.1). Então existe uma transformação canônica $\mathcal{F} : M \rightarrow \mathbb{R} \times T^*W$, $W = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-\mu, 0), (1 - \mu, 0)\}$ tal que $H' = H \circ F^{-1} + K_{F^{-1}}$ é dada por:

$$H'(t, \vec{q}, \vec{p}) = \frac{\|\vec{p}\|^2}{2} + q^1 p_2 - q^2 p_1 - \frac{\mu}{\rho(\vec{q})} - \frac{1-\mu}{\sigma(\vec{q})}$$

onde $\rho(\vec{q}) = \|\vec{q} - (1-\mu, 0)\|$ e $\sigma(\vec{q}) = \|\vec{q} - (-\mu, 0)\|$.

Demonstração: Considerar o mapeamento rotativo horário $\mathcal{F} : M \mapsto \mathbb{R} \times T^*W = N : (t, q^1, q^2, p_1, p_2) \mapsto (t, x^1, x^2, y_1, y_2)$ onde

$$\begin{aligned} x^1 &= (q^1 \cos t + q^2 \sin t), & y^1 &= (p^1 \cos t + p^2 \sin t) \\ x^2 &= (-q^1 \sin t + q^2 \cos t), & y^2 &= (-p^1 \sin t + p^2 \cos t) \end{aligned}$$

Então,

$$F^* \tilde{\omega}_N = F^*(dx^1 \wedge dy_1 + dx^2 \wedge dy_2) = d(x^1 \circ F) \wedge d(y_1 \circ F) + d(x^2 \circ F) \wedge d(y_2 \circ F)$$

e por cálculo direto,

$$F^* \tilde{\omega}_N = \tilde{\omega}_M + d(q^1 p_2 - q^2 p_1) \wedge dt, \quad \text{C.Q.D.}$$

Portanto, $F_* \tilde{X}_H = \tilde{X}_H$.

Corolário:

Cada situação colinear tem uma família de parâmetro único de órbitas fechadas, junto com variedades estável e instável.

Segue do Teorema de Plummer(1901) para a instabilidade dos pontos colineares de Euler e do Teorema de Liapunov [1]. As órbitas fechadas ao redor das soluções colineares estão no centro de espaço e como há um autovalor restante e é positivo, estas órbitas são instáveis.

Para as soluções triangulares equilaterais m_4 e m_5 , vamos utilizar as expressões gerais sugeridas por Plummer [1] para V_{12} , V_{11} e V_{22} , resultando

$$m_4 = \left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) : \begin{cases} V_{11} = -\frac{3}{4}, \\ V_{22} = -\frac{9}{4}, \\ V_{12} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(2\mu - 1) \end{cases}$$

e em

$$m_5 = \left(\frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) : \begin{cases} V_{11} = -\frac{3}{4}, \\ V_{22} = -\frac{9}{4}, \\ V_{12} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}(2\mu - 1) \end{cases}$$

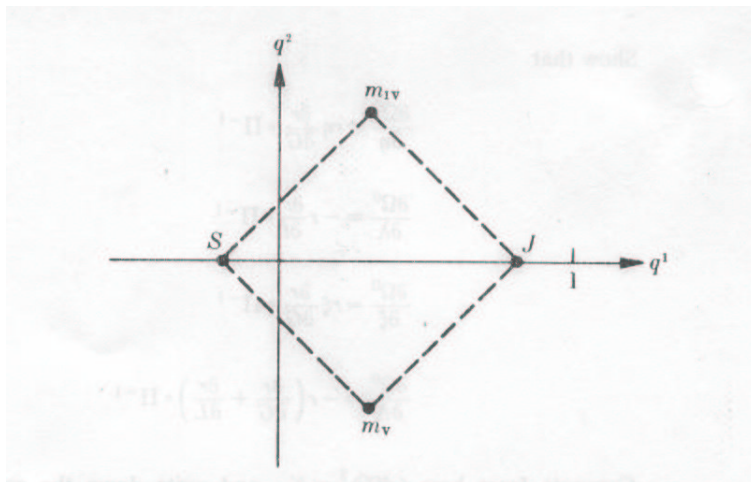
A matriz $\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$ tem $V_{11} < 0$ e determinante $\frac{27}{4}\mu(1-\mu) > 0$, então o potencial possui máximo nas soluções equilaterais. Isto significa que estes pontos são instáveis. Embora a função energia E seja energia cinética mais energia potencial V e portanto E tenha um ponto de sela nas soluções equilaterais (3 direções "estáveis" e uma "instável"), isto não implica instabilidade. Isto é, basicamente, o porquê os resultados devidos a Kolmogorov, Arnold e Moser desempenham fundamental importância: permitem mostrar estabilidade nestas situações. Para as soluções equilaterais a equação característica fica

$$P(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0,$$

logo,

$$\lambda^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}[1 - 27\mu(1-\mu)]^{1/2}.$$

As raízes serão puramente imaginárias se $1 - 27\mu(1-\mu) > 0$, ou seja, $0 < \mu < \mu_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} = 0.03852\dots$ (valor crítico de Routh). Temos $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$. Somente com $0 < \mu < 1$ poderia haver outro valor crítico em $\mu_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}$ acima do qual as raízes serão puramente imaginárias. A evolução dos autovalores de μ cruzando μ_1 é mostrada na figura que segue



Para $\mu_1 < \mu \leq \frac{1}{2}$ as soluções equilaterais são claramente instáveis. Para $0 < \mu < \mu_1$, Leontovich (1962) provou (usando resultados de Arnold(1961) que utilizou um TORI invariante de órbitas quase-periódicas) estabilidade para todo μ exceto, possivelmente, para aqueles em um conjunto de medida zero. Então, Deprit e Deprit-Bartholomé(1967), usando o aperfeiçoamento de Moser do Teorema de Arnold, mostrou estabilidade para todos, exceto três, valores de μ neste intervalo. Este fato é consistente com evidências experimentais: para os satélites do sistema Sol-Júpiter, foram observadas posições próximas às descritas (Van de Kamp(1964)). Por fim, a passagem de μ para μ_1 é uma bifurcação Hamiltoniana envolvendo perda de estabilidade.

3.6.2 Modernos Desenvolvimentos

Será demonstrado a seguir, baseado nos estudos de Zhihong Xia, Donald Saari, e outros, a solução de um problema em mecânica celeste proposto por Painlevé e Poincaré no século XIX. A questão, que diz respeito à natureza das singularidades no Problema dos n-Corpos, é se existe uma singularidade de não-colisão no problema newtoniano dos n-Corpos, ou ainda, se sem colisões o problema newtoniano dos n-Corpos de massas pontuais pode ejetar uma partícula ao infinito em tempo finito.

De fato, foi provado que exemplos tridimensionais existem para todo $n \geq 5$, ou seja, existem singularidades de não-colisão no problema dos 5 corpos. Mais ainda, pode-se afirmar que similar comportamento ocorre no problema plano dos $3n$ corpos, porém com "n" desconhecido e muito grande.

O tópico importante da discussão é caracterizar a natureza das singularidades nos sistemas de n-corpos. Uma singularidade é um valor de tempo $t = \tau$ onde a continuação analítica da solução falha. Seja a massa da i-ésima partícula $m_i > 0$, sua posição $\vec{q}_i \in \mathbb{R}^3$ e $\dot{\vec{q}}_i \in \mathbb{R}^3$ sua velocidade. Pelas Leis de Newton,

$$m_i \ddot{\vec{q}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{|\vec{q}_i - \vec{q}_j|^3} (\vec{q}_i - \vec{q}_j) = \frac{\partial U}{\partial \vec{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

onde $U = \sum_{j < i} (m_i m_j) / |\vec{q}_i - \vec{q}_j|$ é a energia potencial newtoniana negativa ou autopotencial. A questão básica em Mecânica Celeste é descrever as soluções do sistema acima. A solução do sistema de equações diferenciais, como já foi citada, é uma singularidade no tempo $\tau < \infty$ se a solução não puder ser analiticamente estendida além de τ . As equações de movimento são reais e analíticas em toda parte, exceto onde duas ou mais das partículas ocuparem o mesmo ponto no espaço físico. Mais precisamente, seja

$$\Delta_{ij} = \left\{ \vec{q} = (\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n) \in (\mathbb{R}^3)^n \mid_{\vec{q}_i = \vec{q}_j} \right\}$$

$$\Delta = \bigcup_{i < j} \Delta_{ij}$$

O autopotencial U é uma função real e analítica sobre $(\mathbb{R}^3)^n / \Delta$. A teoria da existência e unicidade das equações diferenciais ordinárias garante que uma solução sofre singularidade em τ se não for garantida pela citada teoria a extensão da solução. As singularidades da solução devem relacionar-se com as singularidades da função potencial U . De fato, o teorema clássico devido à Painlevé (1985) estabelece que a distância mínima entre todos os pares de partículas aproximam-se de zero em uma singularidade. Embora Painlevé nos tenha dito que uma singularidade requer que $\vec{q}(t) \rightarrow \Delta$, ainda não fica claro se as partículas colidem.

Esta consideração trouxe-nos a noção de que uma singularidade no tempo τ é uma colisão se existe $\vec{q} \in \Delta$ tal que $\vec{q}(t) \rightarrow \vec{q}^*$ (\vec{q}^* ponto pertencente a Δ) quando $t \rightarrow \tau$. Caso contrário, a singularidade é chamada de SINGULARIDADE DE NÃO COLISÃO. Enquanto a

existência de singde colisão é mais ou menos trivial, a questão da existência das singularidades de não-colisão permaneceu em aberto desde os tempos de Poinlevé, que também enunciou o teorema de que para $n = 3$, todas as singularidades são singularidades de colisão. Restou estabelecer se existem singularidades de não-colisão para $n \geq 4$, ou seja, se $\vec{q}(t)$ aproxima-se de Δ sem aproximar-se de qualquer ponto deste conjunto.

De fato, existem singularidades de não-colisão no problema dos 5 corpos, e com pequenas modificações, tal comportamento existe em sistemas de n corpos (para $n > 5$).

O objetivo de demonstrar a afirmativa acima começou a ser alcançado por um resultado importante obtido por Van Zeipel [3] em 1908. Afirma que uma singularidade de não-colisão pode ocorrer somente se o sistema de partículas tornar-se ilimitado em tempo finito. Mais precisamente, seja

$$I = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i |\vec{q}_i|^2$$

o momento de inércia que mede o tamanho do sistema. O argumento de Von Zeipel é baseado na observação que a lei dos inversos dos quadrados impõe uma aceleração desprezível em partículas muito distantes entre si. Conseqüentemente, em períodos de tempo curtos partículas distantes movem-se essencialmente ao longo de uma linha reta com variações minúsculas de velocidade. Assim, Von Zeipel separou a análise em o quanto partículas próximas interagem e o quanto aglomerados de partículas próximos dos outros. Mostrando que o argumento dos aglomerados contradizem a condição $I \rightarrow A < \infty$, $A \in [0, \infty)$, ele provou que uma singularidade de não-colisão ocorre em um tempo τ quando $t \rightarrow \tau$ (Chazy[4], Sperling [5] e Saari [6] estabeleceram provas que refinaram e estenderam partes do trabalho de Von Zeipel).

Basicamente o que foi demonstrado é que se singularidades de não-colisão existem, as leis de movimento de Newton deveriam permitir que singularidades de não-colisão só pudessem ocorrer se o sistema de partículas explodisse ao infinito em tempo finito. Este fato torna a existência de singularidades de não-colisão aparentemente impossíveis, pois uma partícula escapando ao infinito em tempo finito teria de adquirir uma quantidade infinita de Energia Cinética. Entretanto, como a energia Potencial U não é limitada abaixo, não há, a princípio, limite superior na Energia Cinética de uma partícula. De fato, trabalhos recentes (McGehee e Mather [6,7]) mostraram que para o problema colinear dos quatro corpos, colisões binárias podem acumular energia para ejetar partículas ao infinito em tempo finito. Isto não resolve o problema de Poinlevé (pois uma singularidade de não-colisão precisa primeiramente ser uma singularidade do sistema) mas indica fortemente que tal movimento existe. A construção de Mather-McGehee da explosão de singularidades de colisão é uma ferramenta importante na construção de singularidades de colisão, como veremos a seguir.

Uma colisão binária é um ponto algébrico onde a dinâmica imita uma colisão elástica. Entretanto, colisões triplas geralmente definem uma singularidade logaritmica que impede a solução de ser contínua. Alternativamente, analisa-se o que acontece próximo a uma tripla colisão. Para isso, McGehee[7] desenvolveu uma forma de "coordenadas

esféricas”onde o raio é definido por $q_{max}(t) = I^{1/2}$; com esta escala, as ”coordenadas angulares”representam a configuração $(1/q_{max})(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n)$ formada pelas partículas. Para esta construção, é importante que a lei de força seja homogênea, permitindo ao termo ”raio”fatorar as equações-chave e ser incorporado na variável independente para reescalonar o ”tempo”. O sistema resultante de ”coordenadas angulares”descreve alterações na configuração.

Matematicamente, o novo sistema reescalado é realmente definido para $q_{max}(t) = 0$ (o ponto zero em Δ). Esta ”explosão”cria uma variedade limite invariante C chamada ”variedade de colisão”. Porque o sistema dinâmico aumentado suavemente estende-se ao limite, o comportamento de triplas colisões próximas pode ser analisado usando a mais simples ”forma gradiente”do fluxo resultante em C .

O efeito em triplas colisões próximas para o problema newtoniano colinear dos três corpos é o seguinte: se uma condição inicial que leva a um completo colapso é ligeiramente alterada, uma partícula, m_3 , chega ligeiramente atrasada para a tripla colisão. O primeiro par de partículas, m_1 e m_2 formam uma colisão elástica onde a velocidade do ricocheteio é arbitrariamente grande quando medida próxima à colisão. Portanto, a partícula que ricocheteia aproxima-se de uma colisão com m_3 retardada e com momentum arbitrariamente grande. A nova colisão elástica deve causar a chegada atrasada de m_3 para deixar sua colisão com uma velocidade arbitrariamente grande. Embora a atual situação seja mais complexa, sua descrição captura o espírito das triplas colisões próximas.

Esta colisão do movimento próximo a uma tripla colisão (para o problema colinear) sugere que m_3 (figura acima) é ejetada além do binário m_1, m_2 com uma velocidade arbitrariamente elevada. Para manter m_3 sendo expelida ao infinito, é preciso um obstáculo, um quarto corpo. Então, se a velocidade de m_3 é suficientemente grande, ela alcança e tem uma colisão elástica com m_4 . Sendo a massa de m_3 suficientemente pequena, esta colisão força m_3 a ricochetear e voltar para m_1, m_2 onde, se chegar a tempo de formar outra tripla colisão, m_3 é novamente projetada. Com um corrente argumento de tempo (ou seja, com uma prova dinâmica simbólica apropriada), este cenário repete-se infinitamente em um período finito de tempo. Desta forma, Mather e McGehee mostraram que existe um conjunto de cantor de condições iniciais definindo este comportamento.

As coordenadas de McGehee tornaram-se padrão para analisar o comportamento de órbitas próximas a um total colapso para o problema colinear dos três corpos, o problema isósceles dos três corpos(onde as três partículas formam um triângulo isósceles para todo tempo e cujos propósito é entender o comportamento dinâmico daquelas soluções que passam próximo a triplas colisões) e o problema anisotrópico de Kepler. Desta forma, uma gama de comportamentos surpreendentemente caóticos surgiu. De forma similar mas em uma direção sutilmente diferente, usam-se estas coordenadas para estabelecer a existência de novos tipos de órbitas.

A demonstração da existência de singularidades de não-colisão em sistemas newtonianos requer a ”redução de velocidade”do movimento de Mather-McGehee tal que, apesar de ser rápido, dura para sempre. Similarmente, é necessário introduzir uma técnica para capturar as conseqüências dinâmicas onde, apesar das partículas interagirem arbitria-

mente próximas a uma tripla colisão, acontece "suficientemente tarde" tal que a partícula m_3 não é ricocheteada tão severamente. O argumento técnico de criar este atraso explora a complexa estrutura da variedade do conjunto de condições iniciais levando a uma tripla colisão.

Considerando cinco massas pontuais m_1, m_2, \dots, m_5 movendo-se em um espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Fazendo $m_1 = m_2, m_4 = m_5$. Escolhendo condições iniciais tais que m_3 sempre está no eixo Z , m_1 e m_2 são sempre simétricos um ao outro com referência ao eixo Z , m_4 e m_5 simétricos um ao outro com referência ao eixo Z . Se for fixo o centro de massa na origem, define-se um sistema dinâmico com seis graus de liberdade.

Este sistema admite uma integral de energia e uma integral de momentum angular. Restringe-se à hipersuperfície de momentum angular zero, uma variedade algébrica de dimensão 11. Seja Ω qualquer hipersuperfície de energia desta variedade tal que Ω é 10-dimensional.

É conhecido que colisões binárias podem ser regularizadas e aqui o fluxo será tratado como órbitas estendidas através de colisões binárias. A primeira construção de soluções ilimitadas tempo finito envolve a possibilidade de colisões binárias. Depois será mostrado que, entre estas soluções ilimitadas em tempo finito, existem órbitas nas quais não ocorrem colisões binárias. Desta forma, fica estabelecida a existência de singularidades de não-colisão.

As triplas colisões entre m_1, m_2, m_3 e m_3, m_4, m_5 são especialmente importantes. De várias formas diferentes m_1, m_2, m_3 podem entrar em tripla colisão. Resultados clássicos revelam que quando as partículas tendem a uma tripla colisão, elas devem tender a configurações especiais chamadas configurações centrais. Tratando especialmente com o problema dos 5 corpos, determinam-se três configurações para m_1, m_2, m_3 : uma é a configuração colinear com m_3 entre m_1 e m_2 e as outras duas são quando m_1, m_2 e m_3 formam triângulos equiláteros, um com m_3 abaixo de m_1 e m_2 denotada por E^+ e a outra com m_3 acima de m_1 e m_2 , E_- . Seja Σ_1 o subconjunto de Ω constituído de todas as condições iniciais tais que as correspondentes trajetórias terminem em triplas colisões entre 1ª, 2ª e 3ª partícula com a configuração-limite E^+ . Σ_1 é uma variedade imensa codimensional-2. Similarmente seja Σ_4 o subconjunto de Ω das condições iniciais tais que as correspondentes trajetórias terminem em triplas colisões entre a 3ª, 4ª e 5ª partículas que possuem configuração-limite similar àquela de E_- . Então Σ_4 também é uma subvariedade imensa codimensional-2.

O objetivo é provar os dois seguintes teoremas, lembrando que as colisões binárias são regularizadas.

Teorema 1: Existem massas positivas $m_1 = m_2, m_3$ e $m_4 = m_5$ tais que: para $x^* \in \Sigma_1$ seja t^* o tempo no qual a trajetória iniciando de x^* termina. Existem escolhas de x^* tais que $\vec{q}_4(x^*, t^*) = \vec{q}_5(x^*, t^*)$, isto é, para a trajetória partindo de x^* , quando m_1, m_2, m_3 colidem em t^* então m_4 e m_5 também tem uma colisão binária em t^* . Para alguma superfície hiperregular tridimensional Π em Ω cruzando Σ_1 em x^* existe um conjunto não enumerável Λ de pontos em Π com a seguinte propriedade: seja $x \in \Lambda$; existe $t_\infty > 0$, tal que a trajetória com a condição inicial x é definida para todo $0 \leq t < t_\infty < \infty$

(possivelmente com colisões binárias e satisfazendo $Z_1(t) = Z_2(t) \rightarrow \infty$, $Z_4(t) = Z_5(t) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow t_\infty$).

Enquanto o teorema anterior estabelece a existência de uma solução ilimitada em tempo finito, teorema seguinte assegura a existência de singularidades de não-colisão.

Teorema 2: Sejam x^* , Π , Λ tais como no Teorema 1. Então existe um subconjunto não enumerável Λ_0 de Λ tal que, para todo $x \in \Lambda_0$, $\vec{q}_1(t) \neq \vec{q}_2(t)$, $\vec{q}_4(t) \neq \vec{q}_5(t)$ para todo $0 \leq t < t_\infty$, isto é, as soluções partindo de Λ_0 sofrem singularidades de não-colisão.

O objetivo é mostrar a existência do movimento newtoniano para o problema dos cinco corpos que é ilimitado no espaço físico em tempo finito. É preciso mostrar que este movimento existe sem a vantagem de uma acumulação de infinitas colisões binárias. Considere um problema de cinco corpos constituído de quatro partículas em dois pares, as partículas em cada par tendo a mesma massa. As quatro partículas formam dois binários. Cada binário está em uma órbita altamente elíptica com plano de movimento paralelo ao plano xy . O que difere é que um binário está bem acima do plano xy com rotação em uma direção enquanto o outro está bem abaixo do plano xy com rotação na direção oposta. Esta diferença na rotação permite que os dois binários tenham arbitrariamente pequeno, mas não nulo, momentum angular.

Enquanto isso a quinta partícula está restrita ao eixo Z . A oscilação desta quinta partícula governa o sistema e cria o movimento ilimitado. Mais precisamente, imaginar que a partícula oscilatória passa através do plano de movimento definindo um binário exatamente quando as duas partículas no binário estão muito próximas. Devido ao fato da partículas no binário estarem quase no seu ponto mais próximo, elas também estarão muito próximas à quinta partícula. Deve-se destacar que, para certas razões de massa (por exemplo, se a quinta partícula é insignificamente mais pesada que as massas do binário), a proximidade acima entre as partículas impõe uma força considerável à 5ª partícula que é dirigida diretamente de volta ao plano de movimento do binário. Isto força a quinta partícula a retornar ao plano de movimento do binário quando o binário começa a separar-se. No retorno, isto permite à quinta partícula mover-se, a uma taxa muito rápida, em direção ao outro sistema binário. Neste instante, o efeito de ação-reação do sistema de 3 corpos força o binário original a mover-se para longe do plano xy .

O movimento é então obtido pela iteração deste cenário. Cada vez que a quinta partícula aproxima-se de um binário, a sincronização é tal que a aproximação destas partículas fornece à quinta partícula a força para acelerar de volta ao outro binário. A dificuldade é verificar que este cenário realmente ocorre. Interessante concluir que este comportamento ocorre razoavelmente com 5ªs partículas.

A seqüência de sincronização é obtida com argumento dinâmico simbólico mas antes de introduzir esta argumentação, é preciso estabelecer outros elementos sobre a dinâmica de iteração. Em particular, se este movimento deve tornar-se ilimitado em tempo finito, então claramente os efeitos da aceleração sobre a partícula oscilante tem que ser infinitamente grande. Conseqüentemente, as aproximações de cada binário precisam ser infinitamente pequeno. Mas a única forma na qual isto acontece é como resultado de interações de três corpos (problema isósceles dos 3 corpos: variedades de triplas colisões e órbitas

de colisões próximas).

As infinitesimalmente pequenas aproximações dos binários viram outra questão: tais binários colidem? A resposta é não, se o momentum angular dos binários é diferente de zero durante todo tempo. Para lidar com este fato, toma-se uma porção do problema evitando colisões e embutindo-o em nosso argumento dinâmico simbólico. Logo, a dinâmica simbólica necessita a inclusão de informações sobre a taxa de expulsão da 5ª partícula dos binários e o estudo do binário (rotacional e elíptico). Mas ainda precisamos conectar os dois problemas dos 3 corpos para mostrar que a 5ª partícula possa oscilar entre os dois binários. Os símbolos são caracterizados por regiões no espaço-fase chamadas cunhas, determinadas pela proximidade de diferentes órbitas com respeito a uma variedade estável em particular (correspondendo a uma tripla colisão) e pelo seu relacionamento com uma variedade instável. Pode-se imaginar tais cunhas para cada aproximação dos binários pois as cunhas necessitam corresponder a quando existe uma proximidade entre um particular binário e a partícula oscilante.

Começando com uma solução simétrica do problema dos 3 corpos onde o movimento de duas massas iguais, $m_1 = m_2$, sempre é paralelo ao plano xy e m_3 está restrito ao eixo z , conforme figuras abaixo:

Agora, tendo m_1 e m_2 órbitas circulares, a força de atração imposta sobre m_3 (determinada por $q_{13} = q_{23}$, distância) é baseada na distância entre m_3 e seu plano de movimento mas também no quanto próximo entre si estão m_1 e m_2 . Considerar o caso extremo, onde o binário é tão elíptico que tende a um movimento em linha reta quando os binários aproximam-se muito um do outro, quando então separam-se a uma distância segura. A partir desta construção, supor que m_3 passando através e no momento em que está um pouco acima do plano quando o binário está em sua aproximação mais efetiva. Se as partículas estiverem suficientemente próximas uma da outra (e com uma correta escolha de massas), o binário impõe um empuxo extremamente poderoso, descendente, sobre m_3 . De fato, esta força de atração pode ser feita tão forte quanto desejado ajustando-se as distâncias entre as partículas. Conseqüentemente, m_3 pode ser impulsionado descendente com velocidade arbitrariamente alta exatamente quando m_1 e m_2 começam a separar-se. Com esta sincronização adequada, o binário em separação perde qualquer efeito de frenagem sobre m_3 , permitindo a esta partícula ser lançada rapidamente, em sentido descendente, ao longo do eixo- z .

Para evitar que m_3 seja expelida ao infinito, necessita-se um obstáculo que não pode ser uma 4ª partícula ao longo do eixo- z pois isto causaria uma colisão. Então repete-se este cenário colocando-se um segundo binário com órbita altamente excêntrica das partículas m_4, m_5 bem abaixo e ortogonalmente ao eixo- z (conforme figura abaixo):

Com quase perfeita sincronização, onde o binário m_4, m_5 alcança uma suficientemente efetiva aproximação exatamente depois da partícula m_3 em deslocamento passa através de seu plano, a força resultante imposta na partícula em deslocamento m_3 bloqueia o movimento descendente de m_3 e expelle-a de volta ascendentemente com velocidade arbitrariamente alta.

Este cenário pode ser repetido indefinidamente em tempo finito. Como em uma

construção de um conjunto de cantor, onde em cada etapa é removido um "terço intermediário", desenvolve-se um processo no qual um conjunto de condições iniciais, as quais aproximadamente tomam forma de uma cunha, é determinado onde as soluções agem conforme desejado para pelo menos uma passagem das 3 partículas. Algumas soluções das condições iniciais nesta cunha permitem m_3 interagir como o binário da forma requerida e outras, não. Então são descartadas, em particular todas as órbitas onde m_3 falha em satisfazer a cuidadoso requerimento de sincronia com o próximo binário são eliminadas. Este processo é contrário e o que resta no limite é um conjunto de cantor de condições iniciais permitindo que este comportamento ocorra indefinidamente.

Uma tripla colisão define um ponto de equilíbrio $E^+ \in C$ com estrutura hiperbólica. Se x^* denotar o conjunto de condições iniciais que em tripla colisão, então x^* define uma variedade estável para E^+ . então pode-se obter uma órbita começando próxima a x^* sobre Γ (seção reta bidimensional transversa à variedade estável $\text{St}(E^+)$ em x^*) que permanecerá próxima até a órbita aproximar-se de C (lembrar que trata-se da variedade de colisão) e então começa a seguir a variedade instável de E^+ . Imediatamente após falhar a tripla colisão, o movimento começa a assumir a órbita sobre C próxima a E^+ .

Agora, se considerará um problema especial dos 5 corpos. Para este problema, constrói-se uma singularidade de não-colisão ou, como primeiro passo, uma solução ilimitada em tempo finito cujo principal resultado é o teorema (3) que em breve será enunciado.

Seja m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 cinco massas-pontuais movendo-se em um espaço euclidiano \mathbb{R}^3 e seja $\vec{q}_i, \dot{\vec{q}}_i \in \mathbb{R}^3$ os vetores posição e velocidade para $m_i, i = 1, \dots, 5$. Mais ainda, seja $m_1 = m_2$ e $m_4 = m_5$. Então escolhe-se condições iniciais tais que as seguintes simetrias são preservadas no movimento subsequente:

$$\begin{aligned}\vec{q}_1 &= (x_1, y_1, z_1) \\ \vec{q}_2 &= (-x_1, -y_1, z_1) \\ \vec{q}_3 &= (0, 0, z_3) \\ \vec{q}_4 &= (x_4, y_4, z_4) \\ \vec{q}_5 &= (-x_4, -y_4, z_4)\end{aligned}$$

Em outras palavras, para todo tempo, m_5 estará sobre o eixo $-z$. Ambas partículas m_1 e m_4 são, respectivamente, simétricas a m_2 e m_5 com respeito ao eixo- z . fixar o centro das massas na origem e então teremos a seguinte equação: $2m_1z_1 + 2m_4z_4 + m_3z_3 = 0$. O sistema resultante tem 6 graus de liberdade determinado por $q_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $q_4 = (x_4, y_4, z_4)$ e suas derivadas.

Sejam T e U as energias cinética e potencial, respectivamente. Com estas variáveis, as funções são:

$$T = m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + m_4(\dot{x}_4^2 + \dot{y}_4^2 + \dot{z}_4^2) + \frac{1}{2}m_3\left(\frac{2m_1\dot{z}_1}{m_3} + \frac{2m_4\dot{z}_4}{m_3}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
U = & \frac{m_1^2}{2(x_1^2 + y_1^2)^{1/2}} + \frac{m_4^2}{2(x_4^2 + y_4^2)^{1/2}} + \frac{2m_1m_4}{[(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2 + (z_1 - z_4)]^{1/2}} + \\
& + \frac{2m_1m_4}{[(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2 + (z_1 - z_4)]^{1/2}} + \frac{2m_1m_3}{[x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - z_3)^2]^{1/2}} + \\
& + \frac{2m_4m_3}{[x_4^2 + y_4^2 + (z_4 - z_3)^2]^{1/2}}.
\end{aligned}$$

Note que z_3 aparece na equação para U , mas é função de z_1 e z_4 . O Hamiltoniano para este sistema usa as variáveis

$$p_{x_1} = 2m_1\dot{x}_1, \quad p_{x_4} = 2m_4\dot{x}_4, \quad p_{y_1} = 2m_1\dot{y}_1, \quad p_{y_4} = 2m_4\dot{y}_4$$

$$p_{z_1} = 2m_1\dot{z}_1 + 2m_1\left(\frac{2m_1\dot{z}_1}{m_3} + \frac{2m_4\dot{z}_4}{m_3}\right);$$

$$p_{z_4} = 2m_4\dot{z}_4 + 2m_4\left(\frac{2m_1\dot{z}_1}{m_3} + \frac{2m_4\dot{z}_4}{m_3}\right);$$

Como a energia cinética T é expressa como função de $p_{x_i}, p_{y_i}, p_{z_i}$ ($i=1,3$), então $x_i, y_i, z_i, p_{x_i}, p_{y_i}, p_{z_i}$ ($i = 1, 3$) satisfaz a equação de Hamilton com Hamiltoniano $H(\vec{p}, \vec{q}) = T(\vec{p}) - U(\vec{q})$. Além da energia integral $H(\vec{p}, \vec{q}) = h$, o sistema também admite o momentum angular integral $c_{12} + c_{45} = c$, onde c_{12} e c_{45} são os momentum angulares de m_1, m_2 e m_4, m_5 respectivamente:

$$c_{12} = 2m_1(x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1) = x_1p_{y_1} - y_1p_{x_1}$$

$$c_{45} = 2m_4(x_4\dot{y}_4 - y_4\dot{x}_4) = x_4p_{y_4} - y_4p_{x_4}$$

Note que c_{12}, c_{45} não são constantes de movimento. O momentum angular é conservado sob o movimento, isto é, assume-se que $c = 0, c_{12} + c_{45} = 0$. Na análise subsequente, o sistema será considerado como tendo 3 componentes sempre que as três partículas m_1, m_2 e m_3 estão próximas umas das outras relativamente à distância das três partículas a m_4 e m_5 :

(i) O sistema isósceles dos três corpos m_1, m_2, m_3 ;

(ii) O sistema de dois corpos m_4 e m_5 ;

(iii) O sistema de dois corpos composto pelo centro de m_1, m_2, m_3 e o centro de m_4, m_5 ;

Quando m_3, m_4 e m_5 estão próximas, usa-se decomposição similar.

A variedade de tripla colisão M , anteriormente construída, persiste na presença de m_4 e m_5 , ou seja, algumas propriedades do problema dos três corpos persistem neste problema dos 5 corpos de forma que as análises discutidas anteriormente aplicam-se aqui. Assim, vamos estabelecer algumas definições para chegarmos a resultados que demonstrarão os Teoremas (1) e (2), nossos principais objetivos.

Seja T_0 definido da seguinte forma: $T_0 \subset \{v = v^+\}$ uma pequena e compacta vizinhança da intersecção de τ^+ com a seção $v = v^+$, onde τ^+ é a órbita da variável instável de E^+ e $v = v^+$ uma seção tridimensional em C em que v^+ é um número positivo, grande e que τ^+ intercepta $v = v^+$ transversalmente. A intersecção de $U_n(E^+)$ com T_0 é uma curva

pequena e suave se T_0 é pequeno. Pela escolha de $\omega^+ > 0$ pequeno (ω^+ é um número), pode-se assumir T_0 como um cilindro tal que na parte superior S^+ , tem-se $\omega_{12}^\infty = \omega^+$ e na parte inferior S^- , tem-se $\omega_{12}^\infty = -\omega^+$ e $|\omega_{12}^\infty| \leq \omega^+$ para todos os pontos eT_0 , onde $\omega_{12} = |h_{12}c_{12}|c_{12}$ é uma variável que fornece a excentricidade da órbita elíptica, h_{12} é a energia e c_{12} o momentum angular do binário m_1, m_2 , e ω_{12}^∞ é uma função contínua tal que o limite de ω_{12} para os pontos sobre $U_n(E^+)$ próximos de τ^+ possuem valor diferente de zero. Υ

Agora começamos a provar um dos dois teoremas principais, especificamente, o Teorema(1). Fixe um ponto $x^* \in \Sigma_1$. Existe um ponto $p \in S^1 \times \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^-$ tal que $x^* \in St(\{p\} \times \{E_+\})$, onde $St(\{p\} \times \{E_+\})$ é uma variedade estável do ponto de equilíbrio $\{p\} \times \{E_+\}$. Seja Γ uma superfície bidimensional suave que intercepta transversalmente Σ_1 em x^* . Seja $t^* > 0$ o tempo quando a órbita, começando de x^* , termina em uma tripla colisão de m_1, m_2 e m_3 . Sem perda de generalidade, assumir que $|z_4(x^*, t^*)| \geq 2B$. Para todo $x \in \Gamma$, seja

$$\begin{aligned}\tilde{t}_1(x) &= \inf\{t > 0 | z_3(x, t) = z_1(x, t)\} \\ t_1(x) &= \inf\{t > \tilde{t}_1(x) | \tilde{z}_3(x, t) = -A\} \\ \bar{t}_1(x) &= \inf\{t > t_1(x) | z_3(x, t) = 0\} \\ \tilde{t}_2(x) &= \inf\{t > \bar{t}_1(x) | z_3(x, t) = z_4(x, t)\} \\ &\vdots\end{aligned}$$

enquanto que para órbita de colisão x^* , seja

$$\tilde{t}_1(x^*) = t_1(x^*) = \bar{t}_1(x^*) = \tilde{t}_2(x^*) = \dots = t$$

Então, temos o seguinte Teorema:

Teorema (3): Seja Γ a superfície bidimensional acima definida. Considerar as soluções partindo de Γ . Existe uma cunha Δ com vértice em x^* e com fronteiras C^+ , C^- e C tal que o seguinte é válido:

(i) Para todo x na cunha, $\tilde{t}_1(x^*)$, $t_1(x^*)$, $\bar{t}_1(x^*)$ e $\tilde{t}_2(x^*)$ são funções contínuas bem definidas. Em particular, as funções citadas aproximam-se de t^* quando x na cunha aproxima-se de x^* . Em consequência, $\dot{z}_3(t_1)$ e $\dot{z}_3(\bar{t}_1) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow x^*$.

(ii) Para todo $x \in C^+$, $\frac{1}{4}\omega^+ \leq \omega_{12}(x, \tilde{t}_2) \leq 2\omega^+$ e para todo $x \in C^-$, $\frac{1}{4}\omega^+ \leq -\omega_{12}(x, \tilde{t}_2) \leq 2\omega^+$.

(iii) Existe $k > 1$, onde k depende somente das massas tal que para qualquer $\delta > 0$ e para todo $x \in \Delta$,

$$z_1(x, \tilde{t}_2) \geq kz_1(x, \tilde{t}_1) > 0 \quad \text{e} \quad |z_4(x, \tilde{t}_2) - z_4(x, \tilde{t}_1)| < \delta$$

A prova deste teorema esta em [8]. A respeito deste teorema, sejam as seguintes observações:

(1) A é uma constante pré-fixada cujo valor não muda, embora sua escolha seja arbitrária. De fato, pode-se escolher A arbitrariamente pequena e desta forma, B , cujo valor depende de A , pode ser feito arbitrariamente pequeno.

(2) As triplas colisões consideradas até agora são para a configuração central E^+ . De fato, as triplas colisões com configuração central limitada em E_- podem ser tratadas da mesma forma.

(3) Toda discussão anterior aplica-se também ao movimento de m_3 , m_4 e m_5 , com apropriadas mudanças de constantes.

Vamos agora construir infinitas soluções ilimitadas em tempo finito na hipersuperfície tridimensional Π . Seja $x^* \in \Sigma_1$ um ponto tal que a órbita de x^* termina em uma tripla colisão simultânea entre m_1, m_2, m_3 e a colisão binária entre m_4, m_5 . Seja Π uma pequena, genérica, hipersuperfície tridimensional no espaço-fase. A seção Π intercepta Σ_1 em uma curva ι tendo x^* em seu interior. Então existe uma cunha com vértice em ι tal que, para todas as órbitas começando da cunha W , m_3 dispara de m_1, m_2 e alcança m_4, m_5 em curto intervalo de tempo. Se fizermos W menor, o tempo para m_3 alcançar m_4, m_5 pode ser feito arbitrariamente pequeno. Mais ainda, dentro da cunha W existem infinitos pontos $x_1, x_2, \dots, x_i \rightarrow x^*$ tais que, para qualquer $i \in \mathbb{N}$, a órbita começando de x_i termina em tripla colisão de m_3, m_4, m_5 e colisão binária de m_1, m_2 .

Os dois lemas a seguir são essenciais para justificar o processo iterativo e o uso de dinâmica simbólica, resultando na demonstração do Teorema(1). a demonstração dos lemas está em [8].

Lema(1): Para a cunha $W \subset \Pi$ existe um conjunto fechado não-vazio $\iota_1 \in W$ contendo x^* tal que as órbitas começando de ι_1 terminam em triplas colisões entre m_3, m_4, m_5 em $\tilde{\iota}_2$. Mais ainda, o conjunto ι_1 é conexo e contém mais de uma ponte.

Lema(2): Seja $\iota_1 \in \Sigma_4$ a curva do lema Então existem pontos $x_1, x_2, \dots, x_i \in \iota_1, i \in \mathbb{N}, x_i \rightarrow x^*$ quando $i \rightarrow \infty$ tal que para as órbitas começando de x_i a solução termina simultaneamente dupla e triplas colisões.

Vamos agora provar o teorema(1), o primeiro de nossos principais resultados.

Começamos pela repetição do processo de construção da cunha W e encontrar os pontos x_1, x_2, \dots . Desta vez, no lugar de x^* , usaremos $x_i, i \in \mathbb{Z}$ e ι_1 ; em lugar da tripla colisão m_1, m_2, m_3 , usaremos a tripla colisão m_3, m_4, m_5 . Para cada x_i tomaremos uma pequena vizinhança de x_i , $\Pi_i \subset W \subset \Pi$ e considerar soluções começando da hipersuperfície Π_i . Assumimos que Π_i satisfaz a condição de transversabilidade imposta a Π . Isto é verdadeiro porque condições de transversalidade são condições genéricas, então podemos fazer pequena mudança arbitrária a Π tal que todas as condições de transversalidade sejam aceitas. Segue do Teorema(3) e dos Lemas (1) e (2) que, novamente, uma cunha W_i pode ser encontrada e W_i tem seu vértice em um sub-arco de ι_1 tendo x_i em seu interior. Note que W_i tem uma propriedade similar a W para órbitas começando de W_i , m_3 escapa de m_4 e m_5 com grande velocidade e atinge m_1 e m_2 em curto espaço de tempo. Seja $\tilde{\iota}_3(x), x \in W_i$ o tempo em que m_3 alcança o ponto médio entre m_1 e m_2 . A diferença $\tilde{\iota}_3(x) - \tilde{\iota}_2(x)$ pode ser feita arbitrariamente pequena pela restrição de x a uma cunha menos em W_i .

Novamente, para cada i podemos encontrar infinitos pontos na cunha W_i , $x_{ij}, j = 1, 2, \dots, x_{ij} \rightarrow x_i$ tal que a órbita de x_{ij} termina nas triplas colisões simultâneas de m_1, m_2, m_3 , e colisões binárias de m_4, m_5 . Para todo $j \in \mathbb{Z}$, x_{ij} possui propriedades similares

àquelas de x_i . Continuando desta forma e dada qualquer seqüência infinita de inteiros positivos $i_1 i_2 i_3 \dots$, podemos encontrar uma seqüência de cunhas $\dots \subset W_{i_1 i_2 i_3} \subset W_{i_1 i_2} \subset W_{i_1} \subset W$ e definir uma seqüência de tempo $\tilde{t}_1(x) < \tilde{t}_2(x) < \tilde{t}_3(x) < \dots$ para todos os pontos de $W \cap W_{i_1} \cap W_{i_1 i_2} \cap W_{i_1 i_2 i_3} \cap \dots$. Mais, $\tilde{t}_{i+1}(x) - \tilde{t}_i(x) \leq 2^{-i}$ sempre que $\tilde{t}_{i+1}(x)$ é definido.

Concluimos a prova do Teorema(1) pelo uso de dinâmica simbólica. Para a seqüência infinita de inteiros positivos $i_1 i_2 i_3 \dots$, pela construção acima, temos uma seqüência correspondente de cunhas

$$\dots \subset W_{i_1 i_2 i_3} \subset \overline{W}_{i_1 i_2 i_3} \subset W_{i_1 i_2} \subset \overline{W}_{i_1 i_2} \subset W_{i_1} \subset \overline{W}_{i_1} \subset W,$$

onde \overline{V} é o fecho do conjunto V . Esta seqüência encaixante tem intersecção não-vazia. Seja \vec{q}^* um ponto nesta intersecção. Então $q^* \in i_1 i_2 i_3 \dots$ e $\tilde{t}_i(\vec{q}^*)$ é definido para todo $i = 1, 2, 3, \dots$, $\tilde{t}_1(\vec{q}^*) < \tilde{t}_2(\vec{q}^*) < \tilde{t}_3(\vec{q}^*) < \dots$. Como $\tilde{t}_{i+1}(\vec{q}^*) - \tilde{t}_i(\vec{q}^*) \leq 2^{-i}$, a seqüência tem um limite t_∞ :

$$t_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{t}_i(\vec{q}^*) \leq \tilde{t}_1 + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} < \infty$$

Desta forma, para a órbita começando de \vec{q}^* , a solução é definida para todo t , $0 \leq t < t_\infty < \infty$. Para provar que

$$z_1(t) = z_2(t) \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad z_4(t) = z_5(t) \rightarrow -\infty \quad (3.63)$$

quando $t \rightarrow t_\infty$, para a solução partindo de \vec{q}^* podemos usar o Teorema de Von Zeipel. Como agora, $t_\infty < \infty$ é uma singularidade e, da construção, t_∞ não é uma singularidade de colisão, $\lim I \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow t_\infty$, onde I é o momento de inércia do sistema todo. Como as colisões binárias foram regularizadas em problema, o Teorema de Von Zeipel não pode ser aplicado diretamente, mas não é difícil estender o Teorema de Von Zeipel para permitir a regularização das colisões binárias e tratar soluções com colisões binárias como soluções regulares. Da 3ª propriedade Teorema(3), para cada seqüência de positivos $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ podemos fazer $W, W_i, W_{i_1 i_2}, \dots$ suficientemente pequenos tal que as propriedades seguintes são satisfeitas

$$\begin{aligned} z_1(\vec{q}^*, \tilde{t}_2) &\geq k z_1(\vec{q}^*, \tilde{t}_1) \\ z_1(\vec{q}^*, \tilde{t}_3) &\geq z_1(\vec{q}^*, \tilde{t}_2) - \varepsilon_1 \\ z_1(\vec{q}^*, \tilde{t}_4) &\geq k z_1(\vec{q}^*, \tilde{t}_3) \\ z_1(\vec{q}^*, \tilde{t}_5) &\geq z_1(\vec{q}^*, \tilde{t}_4) - \varepsilon_2 \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

onde $k > 1$ é constante. Para qualquer $1 < k_0 < k$, se $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ são suficientemente pequenos, então

$$z_1(\vec{q}^*, \tilde{t}_{2n+2}) \geq k_0 z_1(\vec{q}^*, \tilde{t}_{2n}) \geq k_0^n z_1(\vec{q}^*, \tilde{t}_2) \quad \text{para todo } n > 0$$

Desta forma,

$$z_1(\vec{q}^*, t) = z_2(\vec{q}^*, t) \rightarrow \infty \quad \text{quando } t \rightarrow t_\infty$$

Igualmente,

$$z_4(\vec{q}^*, t) = z_5(\vec{q}^*, t) \rightarrow -\infty \quad \text{quando } t \rightarrow t_\infty$$

Seja Λ uma coleção de todos estes pontos, isto é, para qualquer $\vec{q}^* \in \Lambda$ existe uma correspondente seqüência de números inteiros positivos i_1, i_2, \dots tal que

$$\vec{q}^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} W_{i_1 i_2 \dots i_n}.$$

As órbitas começando de Λ são soluções ilimitadas em tempo finito, e Λ é não-enumerável, completando a demonstração do Teorema(1), C.Q.D.

Agora vamos mostrar que, para algumas das soluções construídas acima, não há de fato colisões binárias envolvidas, ou seja, demonstrar o Teorema(2), através de uma série de Lemas que serão enunciados e cujas demonstrações estão em [8]. O Lema(3) estabelece que para $\vec{q}^* \in \Lambda$ e t_∞ o tempo em que a solução termina, então $\omega_{12}(\vec{q}^*(t)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow t_\infty$. Isto significa que as soluções dos binários estão próximas a um problema colinear Lema(4) garante que os eixos elípticos dos binários m_1, m_2 e m_4, m_5 também tem limites quando $t \rightarrow t_\infty$. Finalmente, o Lema(5) diz que se estes dois eixos-limite formarem um angulo diferente de $0, \pi/2, 3\pi/2$ ou π , então para todo t suficientemente próximo a t_∞ , o momentum angular de um par, digamos m_1, m_2 , é positivo e o momentum angular do outro par, m_4, m_5 , é negativo. Isto é, para t suficientemente próximo a t_∞ . Destes lemas, veremos que se escolhermos cuidadosamente as condições iniciais, teremos a singularidade de não-colisão.

Lema(3): Seja $\vec{q}^*(t)$ uma solução ilimitada em tempo finito, como construída anteriormente. Então $\omega_{12}(\vec{q}^*(t)) \rightarrow 0$ e $\omega_{45}(\vec{q}^*(t)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow t_\infty$, onde $t_\infty < \infty$ é o tempo quando a solução $\vec{q}^*(t)$ termina.

Lema(4): Seja $\vec{q}^*(t)$ uma solução ilimitada como construída anteriormente, e seja t_∞ o tempo no qual a solução $\vec{q}^*(t)$ termina. Então os limites de $\vec{p}_{12}(\vec{q}^*(t))$ e $\vec{p}_{45}(\vec{q}^*(t))$ existem e se $\lim(\vec{p}_{12}(\vec{q}^*(t))) = \vec{p}_{12}(\vec{q}^*)$ e $\lim(\vec{p}_{45}(\vec{q}^*(t))) = \vec{p}_{45}(\vec{q}^*)$ quando $t \rightarrow t_\infty$ então $|\vec{p}_{12}(\vec{q}^*)| = |\vec{p}_{45}(\vec{q}^*)| = 1$.

Lema(5): Seja $\vec{q}^*(t)$ uma solução ilimitada em tempo finito como construímos anteriormente e seja $\vec{p}_{12}^*, \vec{p}_{45}^*$ os mesmos do lema anterior. Se $\vec{p}_{12}^*, \vec{p}_{45}^*$ não são nem paralelos nem perpendiculares um ao outro, então existe um $t^a \rightarrow t_\infty$ tal que não existem colisões binárias entre m_1, m_2 e m_4, m_5 no intervalo de tempo (t^a, t_∞) .

Finalmente, provaremos a existência de singularidades de não colisão, oiseja, o Teorema(2). Do Teorema(1) e do Lema(5), sabe-se que precisamos mostrar que existe um subconjunto não-enumerável Λ_0 de Λ tal que para todo $x \in \Lambda_0$, \vec{p}_{12}^* e \vec{p}_{45}^* não são nem paralelos nem perpendiculares entre si. Seja x^* o ponto no Teorema(1) tal que $\text{sen}(2\theta(x^*, t^*)) \neq 0$, onde θ é o angulo entre $\vec{p}_{12}^*(x^*, t^*)$ e $\vec{p}_{45}^*(x^*, t^*)$. Do Lema(4) vem

a idéia de que para qualquer $\varepsilon > 0$ pode-se selecionar as cunhas $W, W_i, W_{ij}, W_{ijk}, \dots$ pequenos o bastante tais que para todo $x \in \Lambda_0 = W \cap W_i \cap W_{ij} \cap W_{ijk} \cap \dots$, $|\vec{p}_{12}^*(x^*, t^*) - \vec{p}_{12}^*(x, t)| < \varepsilon$ e $|\vec{p}_{45}^*(x^*, t^*) - \vec{p}_{45}^*(x, t)| < \varepsilon$ para todo t tal que $\tilde{t}_2 \leq t \leq t_\infty$. Desta forma podemos fazer $\varepsilon > 0$ pequeno o bastante tal que $\text{sen}(2\theta(x, t_\infty)) \neq 0$ para todo $x \in \Lambda_0$. Agora, teorema(3) segue do lema(5).

Conclusão

Apresentamos aqui como Xia, solucionou uma questão proposta há mais de um século por Poinlevé e Poincaré, cuja construção fez uso de várias contribuições descobertas por vários pesquisadores. Porém, várias questões permanecem e ainda serão, por muito tempo, objeto de pesquisas. Como sempre, o problema newtoniano dos n-corpos serve de fonte a estes intrigantes problemas.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden. *Foundations of mechanics. The Benjamin Cumming Publishing, Co., século XX.*
- [2] M. Born. *Einstein's theory of relativity. Dover Publications, Inc., Nova Iorque - 1962*
- [3] Burghes, D. N; Downs, A. M. *A modern Introduction to classical Mechanics and Control. John wiley - 1975*
- [4] J. Chazy. *Sur les singularité impossibles du problème des n corps. C. R. Acad. Sci. Paris Hebdomadaires des Séances 170, Paris - 1920*
- [5] F. Chorlton. *Textbook of dynamics. D. van Nostrand Company Ltd., Londres - 1963*
- [6] W. H. Fleming, R. W. Rishel. *Deterministic and stochastic optimal control. Springer Verlag, Berlim - 1975*
- [7] J. Mather, R. McGehee. *Solutions of the collinear four body problem which become unbounded in finite time. Lecture Notes in Physics 38, J. Moser, ed., Springer Verlag, 1975*
- [8] R. McGehee. *Triple collision in the collinear three-body problem. Invent. Math. 27, 1974*
- [9] Rutherford, D. E. : *Classical Mechanics. Oliver and Boyd, Edinburgh and London; second edition - New York, 1960.*
- [10] D. E. Rutherford. *Classical mechanics. Oliver and Boyd, Edimburgo - Second Edition, 1957*
- [11] D. G. Saari. *Singularities and collisions of Newtonian gravitational systems. Arch. Rational Mech. and Math. 181, 1973*
- [12] C. L. Siegel, J. Moser. *Lectures on celestial mechanics. Spinger Verlag, Nova Iorque, Heidelberg, Berlim - 1971*

- [13] *H. J. Sperling. On the real singularities of the n -body problem. J. Reine Angew. Math 245, 1970*
- [14] *H. Von Zeipel. Sur les singulités du problème des n corps . Arkiv für Mat., Astr. och Fysik 32, 1908*
- [15] *E. T. Whittaker A treatise on analytical dynamics of particles and rigid bodies . Cup. Cambridge, Cambridge - 1959*
- [16] *Z. Xia. The existence of non-collision singularities in Newtonian systems. Ann. Math, 1992*