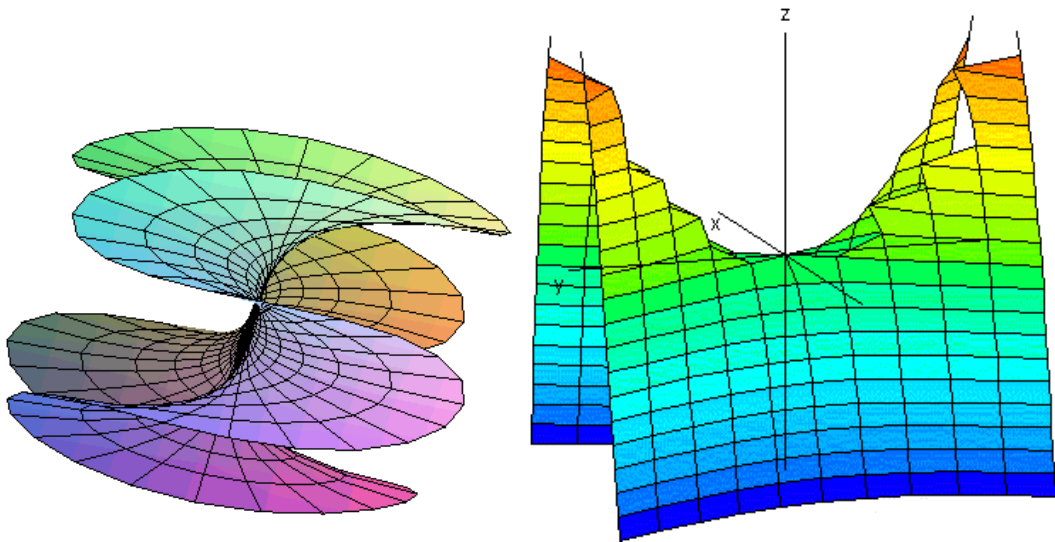


FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DA MECÂNICA DOS FLUIDOS



Dr. Mark Thompson

20 de Novembro de 2006

Conteúdo

1	Introdução à Dinâmica dos Fluidos	3
1.1	Cinemática dos Movimentos dos Fluidos	3
1.2	Linhas de Corrente	4
1.3	Derivada Material	4
1.4	Leis de Conservação no Fluido	5
1.4.1	Conservação de massa	5
1.4.2	Conservação do Movimento	6
1.4.3	Equação de Estado	8
1.4.4	Teorema de Transporte de Reynolds	9
1.4.5	Circulação e Teorema de Kelvin	10
1.4.6	Conservação de Energia	12
1.5	Fluidos ideais: consequências não-físicas.	19
1.5.1	O paradoxo de d'Alembert	21
1.5.2	Viscosidade em Gás	22
1.5.3	Fluxo simples laminar (Lei de Pouseuille)	23
	Bibliografia	25
2	Fluxos ideais bidimensionais	27
2.1	Função de corrente do Stokes	38
2.1.1	Movimentos axissimétricos	38
2.1.2	Função de corrente de Stokes	39
2.1.3	Fonte simples	41
2.1.4	Explosão submarina	42
2.1.5	Corrente uniforme	43
2.1.6	Fonte em uma corrente uniforme	43
2.2	Tensores em fluídos	45
2.2.1	Condições de fronteira para as equações de Navier - Stokes	49
	Bibliografia	51
3	Teoria de Jatos	53
3.1	O método do hodógrafo	53
3.2	Jato dentro de um bocal	55
3.3	Jatos sobre placas planas	57

3.4	Jatos convergentes	58
3.4.1	Fluxos simples; princípio de reflexão	58
3.4.2	W-diagramas de fluxos simples	60
3.4.3	Jatos convergentes	62
3.5	Jatos bifurcados	64
3.5.1	Clasificação geométrica de fluxos simples	64
3.5.2	Jatos bifurcados	66
3.6	Apêndice	69
3.6.1	Teorema da aplicação do Riemann	69
	Bibliografia	72
4	Soluções analíticas explícitas para fluxos ideais	75
4.1	Linearização das equações não lineares o método do Hodógrafo	77
4.2	Fluxos Transônicos	83
4.2.1	Apresentação e modelagem do problema	83
4.2.2	Soluções para o Problema	86
4.2.3	Teoremas de inexistência de soluções e fluxos transônicos	97
4.2.4	Considerações finais	101
	Bibliografia	102
5	Ondas na Água	105
5.1	Linearização do Problema	106
5.2	Interface entre dois fluidos	108
	Bibliografia	110
6	Choques e Explosões Fortes na Atmosfera	113
	Bibliografia	119
7	Conseqüências Físicas da Viscosidade	121
7.1	A Fórmula de Stokes	121
7.2	Algumas considerações matemáticas sobre cisalhamento.	125
7.2.1	Introdução	125
7.2.2	Princípios variacionais para limites de dissipação de energia.	127
7.2.3	Fluxo de cisalhamento fronteira-dirigido	129
7.2.4	Discussão	134
	Bibliografia	140
8	Teoria da Camada Limite Bidimensional	143
8.1	Introdução	143
8.2	Equações da camada limite para fluxo ao longo da superfície plana	143
8.3	Equações da camada limite para um fluxo ao longo da superfície curva	146
8.4	Condições de fronteira para um fluxo estacionário	148
8.5	Dissipação de energia, tensão e vorticidade em camadas limite.	148
8.6	Espessura da camada limite, energia de dissipação e skin friction	149

8.7	Equações de momento e da energia	151
8.8	Separação e formação de vórtice	154
8.9	O teorema de transposição de Prandtl	156
8.10	Transformações das equações do movimento estacionário	159
8.11	Analogia com a condução do calor para a camada limite estacionária	161
8.12	Fluxo numa placa plana de zero incidência numa corrente uniforme	163
8.13	Fluxo estacionário na camada limite ao longo do cilindro próximo de um ponto frontal de estagnação	167
8.14	A importância do sistema de coordenadas na teoria da camada limite	170
	Bibliografia	174
9	A formulação analítica do problema de Stokes	177
9.1	Introdução	177
9.2	As equações de Stokes e aspectos físicos	178
9.3	Problema Interior	180
9.4	Problema Exterior	189
	Bibliografia	199
10	O limite de Navier-Stokes da equação de Boltzmann	203
10.1	Introdução	203
10.2	A equação de Boltzmann	204
10.3	As equações de Navier-Stokes	208
10.4	O sistema Navier-Stokes-Fourier.	209
10.5	Principais resultados.	210
10.5.1	A equação de Boltzmann próximo ao Maxwellian uniforme.	211
10.5.2	Os teoremas limite.	212
10.5.3	O limite Navier-Stokes.	214
	Bibliografia	216

Lista de Figuras

2.1	Fluxo por um canal	29
2.2	Fluxo ao redor de um obstáculo	30
2.3	Fluxo ao redor de um cilindro circular, sem circulação	31
2.4	Fluxo ao redor de um cilindro com circulação fraca ($0 < K < 2av_0$)	32
2.5	$K = 2av_0$	33
2.6	Fluxo ao redor de um cilindro com circulação forte	34
2.7	Fluxo ao redor de um obstáculo	35
2.8	Fluxo ao redor de um aerofólio com e sem circulação	36
2.9	Auxiliar aplicação para construir (2.27)	37
2.10	Fluxo por um canal	38
2.11	Um problema de fronteira livre	39
2.12	Fluxo através da casca esférica	42
2.13	Fluxo através do círculo de rádio u	44
2.14	Movimento de corrente em presença de um corpo cilíndrico	44
3.1	Cavidade detrás de um berço	53
3.2	Jatos com linhas de corrente livre	55
3.3	a) Jato convergente sobre uma infinita placa plana, b) com um W -diagrama mas complicado e c) Hodógrafo é semicircular	57
3.4	Jatos simetricamente convergentes	59
3.5	Domínio parcialmente limitado	60
3.6	Fluxo sobre o círculo unidade	63
3.7	Fluxo num auxiliar t -plano	65
3.8	Ponto de estagnação interno duplo	66
3.9	Jato dividido por uma placa horizontal	67
6.1	Fotografia sucessiva da bola de fogo para $t = 0.1 \times 10^{-3}$ segundos em uma explosão de uma bomba atômica no Novo Mexico	117
6.2	Fotografia da bola de fogo a $t = 15 \times 10^{-3}$ segundos	118
6.3	Fotografia da explosão em $t = 127 \times 10^{-3}$ segundos	118

7.1	Fluido é cisalhado entre placas paralelas. A diferença de velocidade é mantida por uma força que opõe-se ao arraste viscoso e a taxa de dissipação de energia média é a força média gastado por esta força, i.e., o produto dos tempos das forças médias a velocidade U	126
7.2	Uma esfera que move a velocidade U por um fluido viscoso tem que ter uma força que age para manter seu movimento. A taxa de dissipação de energia no fluido é, em média, o produto dos tempos de força comuns a velocidade U	127
7.3	Placas de dimensão $L_x \times L_y$ estão separados por uma altura h na direção de z . A placa em $z=0$ é estacionária e em $z = h$ está movendo-se a velocidade U na direção de x . As condições de fronteira são periódicas nas direções de x e y	130
7.4	Perfil de fluxo de fundo $\phi(z)$. A linha direta é o fluxo planar de Couette. . .	133
7.5	Arraste viscoso e número de Reynolds. Linhas sólidas são os limites superiores e inferiores de Eq. (7.48).	135
8.1	Coordenadas para o fluxo da camada limite ao longo de uma superfície curva	146
8.2	As espessuras da camada limite em distribuição triangular	150
8.3	Separação da camada limite e formação de vórtice num cilindro circular S =ponto de separação.	154
8.4	Separação da camada limite.	156
8.5	Fluxo com completa separação da camada limite.	157
8.6	Trajectoria de vórtice de Kármán.	157
8.7	Linhas de corrente num sistema de coordenadas movendo-se com a trajetória do vórtice.	158
8.8	Fluxo ao redor de um aerofólio: a) 'sound' flow, b) flux sem separação . . .	158

Capítulo 1

Introdução à Dinâmica dos Fluidos

1.1 Cinemática dos Movimentos dos Fluidos

Suponha um fluido contido em uma região D com fronteira ∂D . Classicamente existem duas abordagens ao seu estudo:

1. **Descrição de Euler:** Consiste em fixar um ponto do espaço e equacionar os campos de velocidade sobre ele. Sobre o ponto $P = (x, y, z)$ especificam-se:

$u(x, y, z, t)$: campo de velocidades.

$\rho(x, y, z, t)$: densidade (massa específica) do fluido no ponto.

$f(x, y, z, t)$: resultante das forças externas que atuam sobre o fluido.

$\tau_{ij}(u)$: tensão no interior do fluido.

2. **Descrição de Lagrange:** Consiste em determinar um elemento de fluido e equacionar seu movimento. Sobre esse elemento de fluido, especificam-se:

$Y(x, y, z, t)$: caminho percorrido.

$Y(0) = (x_0, y_0, z_0, t_0)$: posição inicial.

A partir desses dados, chega-se ao seguinte sistema evolutivo de equações diferenciais ordinárias não-lineares:

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= u(Y, t) \\ Y(0) &= (x_0, y_0, z_0, t_0)\end{aligned}$$

Garante-se a existência e unicidade (local) de soluções sob condições de Lipschitz, isto é, se para uma região $\Omega \subset D$, existe $M > 0$ tal que

$$|u(r', t) - u(r, t)| \leq M|r' - r|, \quad \text{para todo } r', r \in \Omega.$$

Note que, para descrever uma propriedade H do fluido, podemos usar qualquer uma das duas descrições, pois

$$H(x, y, z, t) = H(Y(x, y, z, t), t)$$

1.2 Linhas de Corrente

Considere a descrição material - a do movimento -, isto é, a descrição Lagrangiana. Logo, o vetor posição da partícula x será dado por $x(Y, t)$. Derivando disto o campo vetorial u , dado por

$$u = \frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t)$$

Este campo é denominado campo de velocidades e suas trajetórias, soluções das três equações simultâneas $dx/ds = u$, onde ds denota o elemento de comprimento, são as linhas de corrente. O parâmetro s não pode ser confundido com o tempo, pois, nas equações para obtenção das linhas de corrente, o tempo é mantido fixo, de forma que as curvas resultantes são as linhas de corrente no instante t . Elas podem variar de instante para instante e, em geral, não coincidem com o caminho da partícula, já que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt}$$

o caminho coincide com as linhas de corrente apenas se $x = s$.

1.3 Derivada Material

A partir da descrição lagrangiana de um fluido, definimos

$$\frac{d}{dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_Y$$

(derivação com respeito ao tempo mantendo o caminho Y constante). Então a derivada material deve ser interpretada como a taxa de variação de uma propriedade observada ao acompanhar seu deslocamento sobre o caminho. Em particular, a derivada material da posição da partícula é sua velocidade. A relação da derivada material com a derivada parcial tradicional $\partial/\partial t$ idêntica à derivada com respeito ao tempo que mantém a posição é:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH(Y, t)}{dt} = \frac{\partial H(x(Y, t), t)}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} = u_i \frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{DH}{dt}$$

Finalmente,

$$\frac{DH}{dt} = u \cdot \nabla H + \frac{\partial H}{\partial t}$$

a aceleração do fluido é dada, por exemplo, por

$$a(x, y, z, t) = \frac{Du}{dt} = u \cdot \nabla u + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Em fluidos, para que se obtenha a variação de uma certa propriedade, utiliza-se a derivada material. Da análise vetorial, temos a identidade

$$\nabla(a \cdot b) = a \cdot \nabla b + b \cdot \nabla a + a \wedge (\nabla \wedge b) + b \wedge (\nabla \wedge a)$$

Assim, a pode ser reescrita, com

$$a = \frac{Du}{dt} = u \cdot \nabla u + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\nabla(u^2) - 2u \wedge (\nabla \wedge u)}{2} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Logo, definindo o vetor $w = \nabla \wedge u$, a vorticidade, temos

$$a = \frac{Du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\nabla(u^2)}{2} - u \wedge w$$

1.4 Leis de Conservação no Fluido

1.4.1 Conservação de massa

A dinâmica dos fluidos se preocupa com o estudo do movimento de fluidos. Como os fenômenos considerados em dinâmica dos fluidos são macroscópicos, o fluido é visto como um meio contínuo. Isso significa que qualquer pequeno elemento de volume no fluido é tão grande que ainda contém um grande número de moléculas. Portanto, as expressões “partícula de fluido” e “ponto em um fluido” devem ser compreendidas como fisicamente pequenas, mas isso não significa que, quando falamos em ponto, referimo-nos a uma única molécula.

Agora, entraremos na conservação de massa propriamente dita. Inicialmente, consideramos um volume do espaço V_o . A massa de fluido nesse volume será

$$\iiint_{V_o} \rho dv,$$

onde ρ é a densidade do fluido. Seja S a superfície de fronteira do V_o e considere ds um pequeno elemento dessa superfície. A massa de fluido que atravessa esse elemento de área por unidade de tempo é

$$\iint \rho u \cdot n ds.$$

Note que n é o vetor unitário normal exterior à superfície no ponto. Essa expressão pode ser reescrita como

$$\iint \rho u \cdot ds,$$

só que com ds como vetor. A massa total que flui através da superfície de V_o é então ò

$$\iint \rho u \cdot ds$$

Finalmente, a queda, por unidade de tempo, da massa de fluido em V_o pode ser escrita como

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho dv$$

Mas a perda de massa sem que haja uma fonte no interior de V_o se dá unicamente pela entrada ou saída de fluido devido a seu fluxo. Logo,

$$\iint \rho u \cdot ds = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho dv = -\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

Por outro lado, devido ao teorema de Gauss,

$$\iint \rho u \cdot ds = \iiint \operatorname{div}(\rho u) dv,$$

de forma que

$$\iiint \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) \right] dv = 0$$

Então,

$$(\partial \rho / \partial t) + \operatorname{div}(\rho u) = 0.$$

Expandindo $\operatorname{div}(\rho u)$, chegamos a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) + u \cdot \nabla \rho = 0$$

ou seja,

$$\frac{D\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\rho u) = 0$$

chamada **Equação da Conservação de Massa ou Equação da Continuidade**. Note que:

(i) No caso em que há uma fonte no interior de V_o , temos:

$$\frac{D\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} u = 4\pi\tau\rho$$

(ii) O Fluido é dito **Incompressível** se

$$\frac{D\rho}{dt} = 0.$$

1.4.2 Conservação do Movimento

Continuamos considerando um volume V_o do espaço limitado por uma superfície S . Em um ponto dessa superfície, agirá uma força $df = pds$, onde p é a pressão no ponto. A força total agindo no volume será

$$-\iint p \cdot ds = -\iint \nabla p \cdot dx$$

Mas, pela Segunda Lei de Newton, temos

$$F = m \cdot a = m \frac{du}{dt}.$$

Em nosso caso, $dm = \rho dx$, de forma que

$$F = \iiint \rho \frac{du}{dt} dx = - \iiint \nabla p dx \quad \text{de onde vem} \quad \rho \frac{du}{dt} = -\nabla p$$

Agora,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} = (\nabla u) \cdot u = u \nabla u$$

Assim,

$$\frac{du}{dt} + u \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

logo

$$\frac{Du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (\text{Equação de Euler})$$

Observe que:

- (i) Se houver uma força adicional, como em um campo gravitacional, por exemplo, a equação de Euler toma a forma

$$\frac{Du}{dt} = \frac{F}{\rho} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

onde F é a força determinada pelo campo.

- (ii) Ao derivar essas equações de movimento, não se levou em conta qualquer processo de dissipação de energia causado pela fricção interna (causada pela viscosidade) ou mesmo pelas trocas de calor no fluido.
- (iii) A ausência de trocas de calor entre o fluido e os corpos ao seu redor e mesmo no interior do próprio fluido indica que o movimento é adiabático no fluido. Podemos expressar esse fato matematicamente com $ds/dt = 0$, onde s é a entropia no fluido. Essa condição também pode ser expressa como

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \cdot \nabla s = 0$$

- (iv) Lembrando que

$$\frac{Du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 + \omega \wedge u$$

onde $w = \nabla \wedge u$ temos que, se a forma do corpo é conservada, isto é, existe K tal que $F = -\nabla K$ (equivalentemente, há um campo de forças), chegamos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 + \omega \wedge u = -\frac{\nabla K}{\rho} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.1)$$

1.4.3 Equação de Estado

As equações da dinâmica dos fluidos são muito simplificadas no caso de fluxos regulares. Por fluxos regulares, referimo-nos aos fluxos cuja velocidade é constante (independentemente do instante) em cada ponto do fluido.

Descrevemos agora a obtenção da equação de Bernoulli para um caso mais geral e depois particularizaremos. Seja o movimento do fluxo irrotacional, isto é, $\omega = \nabla \wedge u = 0$ e considere a região D que involucra o fluido simplesmente conexo. Logo, existe ϕ tal que $u = -\nabla\phi$. Tomando certas condições de regularidade, temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Obtemos conseqüentemente de (1.1)

$$\nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + K \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0$$

Finalmente,

$$\int_C \left[\nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + K \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p \right] dr = \Psi(t)$$

onde C é o caminho percorrido. Então,

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + K + \int \frac{1}{\rho} dp = \Psi(t)$$

chamada **Equação de Estado ou Equação de Bernoulli**.

Observe que:

- (i) Considere o caso em que ρ é constante e o movimento é estacionário (fluxo estável). Então,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

e a equação torna-se

$$\frac{u^2}{2} + K + \frac{p}{\rho} = \Psi$$

- (ii) Considere um movimento de um fluxo estável incompressível. Para aplicarmos a incompressibilidade, é necessário voltar a

$$\nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + K \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0$$

Tomando o produto interno dessa equação com u , obtém-se

$$u \frac{\nabla u^2}{2} + u \nabla K + \frac{1}{\rho} u \nabla p = 0$$

então

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{u^2}{2} + K + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

Integrando sob uma linha de corrente, chegamos a

$$\frac{u^2}{2} + K + \frac{p}{\rho} = \Psi$$

com Ψ constante na linha de corrente

1.4.4 Teorema de Transporte de Reynolds

Seja D uma região simplesmente conexa que contém uma região de volume V sob a ação de uma força $F(x, t)$. A força total agindo sobre este volume é

$$F(t) = \iiint_{V(t)} f(x, t) dv$$

pois as partículas que formam V se deslocam com o tempo. Podemos referir essa expressão ao elemento fixo

$$\iiint_V f(Y(t), t) J dv$$

onde $Y(t)$ é o caminho percorrido pelas partículas e J é o jacobiano

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial x} & \frac{\partial Y_2}{\partial x} & \frac{\partial Y_3}{\partial x} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial y} & \frac{\partial Y_2}{\partial y} & \frac{\partial Y_3}{\partial y} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial z} & \frac{\partial Y_2}{\partial z} & \frac{\partial Y_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} \iiint_V f(x, t) J dv = \iiint_V \left(\frac{df}{dt} J + f \frac{dJ}{dt} \right) dv$$

Note que

$$\frac{dJ}{dt} = (\nabla \cdot u) J$$

de forma que

$$\frac{d}{dt} F(t) = \iiint_V \left(\frac{df}{dt} + f \nabla \cdot u \right) J dv = \iiint_V \left(\frac{df}{dt} + f \nabla \cdot u \right) dv$$

Observe que

$$\frac{df}{dt} = \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \nabla f$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} F(t) = \iiint_V \left(\frac{df}{dt} + u \nabla f + f \cdot \text{div } u \right) dv$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}f(t) = \iiint \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f.u) \right) dv = \iiint \frac{\partial f}{\partial t} dv + \iint f.u.nds$$

pelo teorema de Gauss, onde S é a superfície que delimita V . Assim,

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint f(x, t) dv \right) = \iiint \frac{\partial f}{\partial t} dv + \iint f.u.nds$$

1.4.5 Circulação e Teorema de Kelvin

A integral $\Gamma = \int u dl$, tomada ao redor de um contorno fechado, é chamada de velocidade de circulação ao redor deste contorno. Consideremos um contorno fechado em um fluido. Supomos que o contorno seja formado por partículas de fluido. Ao longo do tempo, essas partículas movem-se, alterando a superfície de contorno. Analisaremos agora a variação da **velocidade de circulação** com o tempo:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int u dl \right)$$

Escrevemos aqui a derivação total com relação ao tempo, já que buscamos a variação da circulação em um contorno de fluido enquanto ele se move, não em uma região fixa do espaço. Mais precisamente, considere um contorno fechado C descrito por

$$s = s(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad s(0) = s(1),$$

$s(t)$ retificável e sua imagem $c(t) = \gamma(s(t), t)$. A circulação

$$\Gamma(t) = \int u ds = \int u(\gamma(s(t), t)) d\gamma(s(t), t)$$

Segue-se que

$$\frac{d}{dt}\Gamma(t) = \int \frac{d}{dt}u(\gamma, t) d\gamma + u(\gamma, t) d\left(\frac{d\gamma}{dt}(s(t), t)\right)$$

Mas por definição, $d\gamma/dt = u(\gamma, t)$ e segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Gamma(t) &= \int \frac{d}{dt}u(\gamma, t) d\gamma + u(\gamma, t) d\gamma(s(t), t) \\ &= \int \frac{d}{dt}u(\gamma, t) d\gamma + d(u^2(\gamma)) \\ &= \int \frac{d}{dt}u(\gamma, t) d\gamma(s(t), t) \end{aligned}$$

Suponha que o fluido seja ideal e barotrópico com forças externas conservativas, neste caso,

$$\frac{d}{dt}\Gamma(t) = - \int -\nabla(V + P) d\gamma(s(t), t) = 0 \quad \text{com} \quad P = \int dp/p$$

Sob as condições enunciadas acima é válido o Teorema de Kelvin. A circulação de uma curva fechada retificável movimentando-se com o fluido é constante. Como corolário deste resultado podemos afirmar:

Corolário 1.1. *Se o movimento é inicialmente irrotacional, então a circulação é zero para cada circuito fechado, permanecendo zero sobre circuitos que movimentam-se com o fluido.*

Corolário 1.2. *Os tubos de vorticidade e linhas de vorticidade movem-se com o fluido.*

EXEMPLO: (utilizando a equação de Bernoulli - explosões submarinas)
Lembre que se m é uma fonte de velocidade e v_r é a velocidade radial, então

$$4\pi r^2 v_r = 4\pi m, \quad \text{ou} \quad v_r = \frac{m}{r^2}$$

e se ϕ é o potencial de velocidade e Ψ de corrente, temos

$$v_r = \frac{m}{r^2} = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}$$

Segue-se que

$$\phi = \frac{m}{r} \quad \text{e} \quad \Psi = m \cos\theta = \frac{mx}{r}.$$

Agora considere uma cavidade esférica submarina de raio R_0 contendo gás em pressão p_0 que começa a expandir-se rapidamente no líquido infinito a sua volta. Suponha que R seja o raio da cavidade em tempo t , p a pressão do gás (supostamente expandindo-se adiabaticamente). Negligenciamos a energia do gás. Assim,

$$p = K\rho^\gamma \quad \text{e} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{R_0^{3\gamma}}{R^{3\gamma}}$$

Ignorando a força da gravidade e supondo que o movimento é radial e a velocidade da fronteira da cavidade satisfaz

$$\frac{dR}{dt} = R' = v_r$$

Suponha que exista um potencial ϕ . É natural tentar uma fonte de força m . Assim,

$$\phi \frac{m}{r} \quad \text{e} \quad -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{m}{r^2}$$

Em $r = R$

$$\frac{m}{R^2} = R' \quad \text{e} \quad \phi = \frac{R^2 R'}{r}$$

e

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{R^2 R'' + 2RR'^2}{r}$$

Aplicando a equação da Pressão de Bernoulli temos

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} \left[\frac{R^2 R'}{r^2} \right]^2 - \frac{R^2 R'' + 2RR'^2}{r} = F(t)$$

Se a pressão no infinito é negligenciável, $F(t) = 0$ ($r = \infty$, $p = 0$).

Pondo

$$r = R, \quad p = p \quad \text{e} \quad p = p_0 \left(\frac{R_0^3}{R^3} \right)^\gamma$$

Segue-se que

$$RR'' + \frac{3}{2}R'^2 = \frac{R_0^{3\gamma} p_0}{R^{3\gamma} \rho}$$

Multiplicando por $2R^2R'$ e pondo $c^2 = p_0/\rho$ temos

$$\frac{d}{dt}(R^3 R'^2) = 2c^2 \frac{R_0^{3\gamma} R'}{R^{3\gamma-2}}$$

e integrando, lembrando que $R' = 0$ em $R = R_0$

$$\frac{R'^2}{c^2} = \frac{2}{3(\gamma-1)} \left[\left(\frac{R_0}{R} \right)^3 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \right]$$

No caso que $\gamma = 4/3$, escrevendo $R = (1+n)R_0$,

$$\frac{ct}{R_0} = \left(1 + \frac{2n}{3} + \frac{2n^2}{2} \right) \sqrt{2n}$$

Por exemplo, no caso que $p_0 = 1000$ atmosferas e $R_0 = 50\text{cm}$, temos que

$$c = 3.16 \times 10^4 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

e o raio da cavidade dobra seu tamanho em 4×10^{-3} segundos e a aceleração inicial do raio é $2 \times 10^7 \text{cm/sec}^2$. Reabordamos este problema utilizando a teoria de choques a seguir.

1.4.6 Conservação de Energia

Até este momento nossa descrição de um fluido é dada em termos de \underline{u} , p e ρ e temos ignorado considerações termodinâmicas no fluido. Uma descrição mais completa de um sistema uni-fase que observamos é dada em termos de variáveis de estado tais como ρ , p a energia interna U e a entropia S

$$\rho \iff V \quad \text{volume}, \quad S \iff T \quad \text{temperatura}$$

As várias relações existentes entre essas variáveis são conhecidas como as equações de estado. A formulação de Gibbs expressa U como,

$$\begin{aligned} U &= U(S, V) \\ p &= -\frac{\partial U}{\partial V} \quad e \\ T &= \frac{\partial U}{\partial S} \end{aligned}$$

Claramente,

$$dU = TdS - pdV \implies TdS = dU + pdV$$

Se a fase muda reversivelmente com o tempo a quantidade de calor fornecida ao sistema $Q(t)$ é dada por $dQ = dU + pdV$. Definimos as capacidades caloríficas como

$$\begin{aligned} c_V &= \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V, & c_p &= \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p \\ c_V &= T \left(\frac{dS}{dT} \right)_V, & c_p &= T \left(\frac{dS}{dT} \right)_p \end{aligned}$$

É possível demonstrar que

$$\begin{aligned} \left(\frac{dU}{dV} \right)_T &= T \left(\frac{dp}{dT} \right)_V - p & e \\ c_p - c_V &= T \left(\frac{dp}{dT} \right)_V \left(\frac{dV}{dT} \right)_p \end{aligned}$$

Para um gás ideal,

$$\begin{aligned} pV &= RT \\ \left(\frac{dU}{dV} \right)_T &= 0 \\ c_p - c_V &= R \\ S &= \int c_V \frac{dT}{T} + R \log V \end{aligned}$$

No caso em que $c_V = \text{constante}$, temos

$$\begin{aligned} S &= c_V \log T + (c_p - c_V) \log V \\ &= c_V \log(T/V) + c_p \log V \\ &= c_V \log(T/V) + c_V \log V^\gamma \\ &= c_V \log(pV^\gamma) + \text{constante} && \text{ou} \\ p &= \exp(S/c_V) V^{-\gamma}, && \gamma > 1. \end{aligned}$$

Para sistemas com mais de uma fase, indexados por $\alpha = 1, 2, 4 \dots m$, com variáveis correspondentes $V_\alpha, T_\alpha, S_\alpha, U_\alpha, p_\alpha$,

$$S = \sum_\alpha S_\alpha, \quad V = \sum_\alpha V_\alpha, \quad U = \sum_\alpha U_\alpha.$$

Suponha que o sistema muda de um estado ao outro com gasto total de trabalho pelo sistema W e com fornecimento Q_α^e à fase de fontes externas ao sistema. Pela primeira lei da termodinâmica que diz

$$Q^e = \sum Q_\alpha^e = \Delta U + W$$

Levando à formulação diferencial,

$$dQ^e = dU + dW$$

A segunda lei da termodinâmica afirma que em geral,

$$dS \geq \sum_{\alpha} \frac{dQ_{\alpha}^e}{T_{\alpha}}$$

Seja \mathcal{F} a energia cinética de um volume material V :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_V \rho u^2 dx.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}}{dt} &= \frac{1}{2} \int_V \rho \frac{du^2}{dt} dx \\ &= \int_V \rho u \frac{du}{dt} dx \\ &= \int_V \rho \underline{f} \cdot \underline{u} dx + \int_V \rho \underline{u} \cdot \text{div } T dx \\ &= \int_V \rho \underline{f} \cdot \underline{u} dx + \int_S \underline{f} \cdot \underline{u} ds - \int_V e_{ij} \cdot \tau_{ij} dx \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

utilizando as simetrias de T , fluido não-polar. Postulamos então, **a equação de conservação de energia**,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathcal{F} + U) &= \int_V \rho \underline{f} \cdot \underline{u} dx + \int_S \underline{t} \cdot \underline{v} ds + \\ &\quad - \int_S \underline{q} \cdot \underline{n} ds + (\text{energia/area unitaria por unidade de tempo } MT^{-3}) \end{aligned}$$

Comparando esta equação com a equação anterior, observamos que

$$\rho \frac{dU}{dt} = \tau_{ij} e_{ij} - \text{div } \underline{q},$$

um resultado atribuído por Truesdell [12]. Por analogia, a segunda lei da termodinâmica pode ser postulada na forma

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho S dx \geq - \int_S \frac{\underline{q} \cdot \underline{n}}{T} ds$$

Para fluidos perfeitos, $T = -pI$, e em geral, $T = -pI + V$

$$\rho \frac{dU}{dt} + \rho \operatorname{div} u = v_{ij} \cdot e_{ij} - \operatorname{div} q$$

e utilizando $TdS = dU + pd(1/\rho)$ e $\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} u\rho = 0$, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\rho}{T} \frac{du}{dt} + \frac{\rho \operatorname{div} u}{T} &= \int_V \frac{V_{ij} e_{ij}}{T} - \frac{\operatorname{div} q}{T} \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho S dx &= \int_V \left(\frac{V_{ij} e_{ij}}{T} - \frac{\underline{q} \cdot \nabla T}{T^2} \right) dx - \int_S \frac{\underline{q} \cdot \underline{n}}{T} ds \end{aligned}$$

Isto é consistente com a segunda lei da termodinâmica se

$$v_{ij} e_{ij} - \frac{\underline{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0$$

Obviamente satisfeita se

$$v_{ij} e_{ij} \geq 0 \quad e \quad \frac{\underline{q} \cdot \nabla T}{T} \leq 0$$

O Gás Perfeito

Aqui temos que

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} u &= 0 \quad e \\ \rho \frac{du}{dt} &= \rho f - \nabla p \end{aligned}$$

Aqui é plausível supor que $\underline{q} = 0$ onde

$$\frac{dS}{dt} = 0 \quad e \quad p = p(\rho, S)$$

No caso em que o fluido é um gás ideal com c_p , c_v constantes, temos

$$p = e^{S/c_0} \rho^\gamma, \quad \gamma = \text{constante} > 1$$

Ondas de Choque em Fluidos Perfeitos

É conhecido experimentalmente que mudanças abruptas de pressão e massa específica podem acontecer através de superfícies em fluxos de gases. Matematicamente, uma onda de choque $\Sigma(t)$ é uma região no fluxo no qual uma ou mais das variáveis \underline{u} , ρ , p , S sofrem uma descontinuidade de salto. Alocamos os índices 1 e 2 a cada lado da superfície. Suponha que \underline{n} é a normal da superfície de choque, direcionado ao lado 2 e G a velocidade da superfície naquela direção. Ponha

$$V = \underline{u} \cdot \underline{n} - G$$

a velocidade normal relativa a $\Sigma(t)$, indicada por $[]$ um salto de variável.

Conservação de massa, momento, energia e a segunda lei da termodinâmica leva-nos às relações

$$\begin{aligned} [\rho V] &= 0 \\ [\rho V \underline{u} + p \underline{n}] &= 0 \\ \left[\rho V \left(\frac{1}{2} \underline{n}^2 + U \right) + p \underline{u} \cdot \underline{n} \right] &= 0 \\ [\rho V S] &\geq 0 \end{aligned}$$

A base destes resultados é a seguinte forma de um resultado conhecido:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V f dx &= \int_V \left(\frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \underline{u} \right) dx + \int_{\Sigma} [f V] ds \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho dx &= 0 \end{aligned}$$

Suponha que $V_1 > 0$, $V_2 > 0$. As equações acima podem ser reduzidas à forma

$$\begin{aligned} [\rho V] &= 0 \\ [\rho V^2 + p] &= 0, \quad [u_t] = 0 \\ \left[\frac{1}{2} V^2 + I \right] &= 0, \quad \text{onde } I = U + \left(\frac{p}{\rho} \right) \text{ a entalpia específica} \\ [S] &\geq 0 \end{aligned}$$

Introduz o fluxo de massa m através do choque $m = \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$. Então,

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= \rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2 \\ &= m(V_1 - V_2) \\ &= m^2(\tau_1 - \tau_2), \quad \tau_i = \frac{1}{\rho}, \quad i = 1, 2, \dots \\ &= V_1 V_2(\rho_2 - \rho_1), \end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} (p_2 - p_1)(\tau_2 + \tau_1) &= (V_1^2 - V_2^2) \\ \frac{p_2 - p_1}{\tau_2 - \tau_1} &= -m^2 \\ \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} &= V_1 V_2 \\ (p_2 - p_1)(\tau_2 + \tau_1) &= 2(I_2 - I_1) \quad (\text{devido a Hugoniot [6] e Rankine [13]}) \end{aligned}$$

Relações de Choque Para um Gás Ideal

Neste caso, temos

$$I = \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \tau$$

E da relação de Hugoniot obtemos que

$$\left(p_2 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} p_1 \right) \left(\tau_2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \tau_1 \right) = \frac{4\gamma}{(\gamma + 1)^2} p_1 \tau_1$$

Esta equação determina os estados que podem ser atingidos do estado inicial (p_1, τ_1) . Introduzindo os números de Mach

$$M_1 = \frac{V_1}{c_1}, \quad M_2 = \frac{V_2}{c_2}$$

as relações tomam a forma

$$\begin{aligned} \frac{V_2 - V_1}{V_1} &= \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1} = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{(1 - M_1^2)}{M_1^2} \\ \frac{p_1 - p_2}{p_2} &= \frac{2}{\gamma - 1} (M_1^2 - 1) \\ \frac{T_2 - T_1}{T_1} &= \frac{2(\gamma - 1)(\gamma M_1^2 + 1)(M_1^2 - 1)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \\ 1 - M_2^2 &= \frac{M_1^2 - 1}{1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1)} \end{aligned}$$

Das relações

$$\frac{p_2 - p_1}{\tau_2 - \tau_1} = -m^2 \quad e \quad m = \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$

temos

$$p_2 - p_1 = m^2(\tau_2 - \tau_1) = \gamma p_1 M_1^2 \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_1} \right)$$

É fácil eliminar $(p_1/p_2) - 1$ entre esta equação e a forma de relação de Hugoniot obtida acima para conseguir a primeira relação anterior. Agora lembre que a fórmula

$$p = \exp(S/c_0) \rho^\gamma$$

pode ser reescrita como

$$S = c_0 \log(p \tau^\gamma)$$

Segue que

$$\begin{aligned} \frac{S_2 - S_1}{c_V} &= \log \left(\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \right)^\gamma \right) \quad S_2 \geq S_1 \\ \implies p_2 \tau_2^\gamma &\geq p_1 \tau_1^\gamma \end{aligned}$$

Pela relação $p_2 - p_1 = m^2(\tau_2 - \tau_1)$

$$p_2 < p_1 \Rightarrow \tau_2 > \tau_1 \quad e$$

$$p_2 \tau_1^\gamma > p_1 \tau_1^\gamma = p_1 \tau_2^\gamma \quad \text{ou} \quad \tau_1 > \tau_2 \quad \text{uma contradição}$$

Segue-se que $p_2 \geq p_1$ e $\tau_2 \leq \tau_1$. Pela relação de Hugoniot

$$\tau_2 \geq \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tau_1 \quad e$$

$$\frac{(\gamma-1)}{\gamma+1} \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_1 \quad \text{ou} \quad \rho_1 \leq \rho_2 \leq \frac{(\gamma+1)}{\gamma-1} \rho_1$$

Mas

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1}, \quad V_2 \neq V_1,$$

chame

$$\tau_i = \tau_1^{\gamma-1} \quad e \quad p_2 = p_1$$

e assim

$$p_2 > p_1 \quad e \quad p_1 < p_2 < \frac{\gamma+1}{\gamma-1} p_1$$

De $\tau_2 < \tau_1$,

$$\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1} = \frac{2}{\gamma+1} \frac{(1 - M_1^2)}{M_1^2} \Rightarrow M_1 > 1 \Rightarrow V_1 > c_1$$

Isto equivale a dizer que a velocidade normal relativa do fluxo na frente de um choque é supersônica. Inversamente, $M_2 < 1$ e a velocidade normal relativa atrás da frente de choque é subsônica.

A Influência da Viscosidade

Vamos voltar ao fluxo unidimensional estacionário. As equações de Navier-Stokes tomam a forma em termos do tensor de tensões:

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0$$

$$\rho u \frac{du}{dx} = \frac{dT_{xx}}{dx}$$

$$\rho u \frac{dU}{dx} = T_{xx} \frac{dn}{dx} - \frac{dq}{dx}$$

$$T_{xx} = -p + (\lambda + 2\mu) \frac{du}{dx}$$

$$q = -x \frac{dT}{dx}$$

Integrando estas equações,

$$\rho u = m$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{du}{dx} = p + m(u - a)$$

$$x \frac{dT}{dx} = m \left(U - \frac{1}{2}(u - a^2) + b \right)$$

onde

$$p = f(\rho, T) \quad \text{e} \quad U = U(\rho, T)$$

são conhecidos. Uma solução

$$u = u(x), \quad T = T(x)$$

é chamada uma camada de choque se

$$(u, T) \rightarrow (u_1, T_1), \quad x \rightarrow -\infty$$

$$(u, T) \rightarrow (u_2, T_2), \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\text{com} \quad u_2 < u_1$$

Para que isto aconteça, é necessário que .

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = m$$

$$p_1 + m u_1 = p_2 + m u_2 = a m$$

$$U_1 - \frac{1}{2}(u_1 - a)^2 = U_2 - \frac{1}{2}(u_2 - a)^2 = b$$

Condições equivalentes as condições de Rankene-Hugoniot. Isto é dizer que uma camada de choque vinculada (u_1, T_1) , (u_2, T_2) pode acontecer somente se (u_1, T_1) e (u_2, T_2) são estados iniciais e finais de um choque normal de um fluido ideal tendo as mesmas equações de estado como o fluido correspondente se (u_1, T_1) e (u_2, T_2) satisfazem as condições de Rankene - Hugoniot. Para encontrar a camada de choque ligando (u_1, T_1) e (u_2, T_2) é necessário resolver as equações diferenciais acima com a , b e m determinados das equações de Rankene-Hogoniot.

1.5 Fluidos ideais: conseqüências não-físicas.

Lembre-se cinematicamente se $V(t)$ acompanha o fluído e F é expressa em termos Lan-grangiana

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F dx = \int_{V(t)} \left(\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} v \right) dx = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div}(Fv) \right) dx$$

e pelo teorema da divergência

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F dx = \int_{V(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dx + \int_{S(t)} F v \cdot n d\sigma \quad (1.2)$$

No fluido perfeito (ideal)

$$\underline{t} = -p \delta_{ij} \quad p \text{ é a pressão.}$$

A lei de conservação de momento

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho v dx = \int_{V(t)} \rho f dx + \int_{S(t)} -\rho \underline{n} d\sigma \quad (1.3)$$

onde f é a força externa, o que leva à equação

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho f - \nabla p$$

junto com a equação de conservação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = \frac{d\rho}{dt} + (\text{div } v)\rho = 0$$

De (1.3)

$$\int_{V(t)} \left\{ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v) \right\} dx = \int_{V(t)} \rho f dx + \int_{S(t)} -p n d\sigma$$

Se não há forças externas $f = 0$ e se o momento é estacionário $\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = 0$ ou

$$\int_{S(t)} (-pn - \rho v(v \cdot n)) d\sigma = 0$$

(pelo teorema de divergência).

Considere um fluido no exterior de um obstáculo, superfície σ e toma α dentro de uma superfície maior Σ .

No obstáculo σ , $v \cdot n = 0$ e portanto a força excedida pela pressão no σ é

$$\underline{F} = - \int_{\sigma} -p \underline{n}_1 dS = \int_{\Sigma} (-p \underline{n}_2 - \rho v v_1 n_2) dS$$

ou

$$\underline{F} = \int_{\sigma} p \underline{n}_1 dS_1 = \int_{\Sigma} (-p \underline{n}_2 + \rho \underline{v} \underline{v}_1 n_2) dS_2 \quad (1.4)$$

Considere agora fluidos potenciais e incompressíveis $v = \nabla \phi$ e $\text{div } v = 0$, então $\Delta \phi = 0$ no exterior de σ . Suponha também neste caso a velocidade \underline{v} do fluido ao infinito $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \underline{v} = \underline{U}$ em duas dimensões e o circulação $\Gamma = \int_C \underline{v} \cdot d\underline{S}$, C com σ é dada.

É possível demonstrar que

$$\begin{aligned} \phi &= U\lambda + C + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta + O(r^{-1}) \quad e \\ \underline{v} &= \underline{U} + \frac{\Gamma}{2\pi r^2}(-y, x) + O(r^{-2}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Em três dimensões

$$\begin{aligned} \phi &= U \cdot \lambda + C + O(r^{-2}) \quad e \\ v &= U + O(r^{-3}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Considere o caso $U = 0$.

Isto se segue da representação de Poisson (para mais detalhes ver [8])

$$v(x) = \int_{|y|=R} v(y) \frac{|x|^2 - R^2}{\psi \pi |x - y|^3} dS(y) \quad |x| > R.$$

Desta representação e o fato que $\text{div } v = 0$, segue-se que $v = O(r^{-2})$ e a integração estabelece que $\phi - c = O(r^{-1})$.

Observe-se que $\text{div } v = 0$

$$\int_{\sigma} v \cdot n_1 + \int_{|x|=R} v \cdot n_2 = \int_V \text{div } v dx, \quad v \cdot n_1 = 0 \quad \text{logo}$$

$$\int_{|x|=R} v \cdot n_2 = 0$$

utilizando o fato que

$$v = O(r^{-2}) \Rightarrow \int_{|x|=R} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \Lambda = 0.$$

ϕ também tem uma representação de Poisson e

$$\phi(x) - c = \frac{\Lambda}{4r\pi} + O(r^{-2}) = O(r^{-2}).$$

Agora diferencie a representação de Poisson de ϕ e estabeleça o resultado para \underline{v} . É mais fácil demonstrar (1.5) utilizando métodos de variáveis complexas.

1.5.1 O paradoxo de d'Alembert

Considere a força agindo em um corpo sólido σ movimentando-se com velocidade uniforme em um fluido ao resto ao infinito ou equivalentemente a ação de um fluxo uniforme em um corpo sólido fixo imerso no fluido. Se \underline{U} seja a velocidade do fluxo uniforme temos

$$\underline{v} = \underline{U} + O(r^{-3})$$

Pelo teorema de Bernoulli

$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2\rho}(U^2 - \underline{v}^2) = p_{\infty} + O(r^{-3}),$$

(supondo nenhuma força potencial).

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \int_{\sigma} p \underline{n}_1 dS_1 = - \int_{\Sigma} (p \underline{n}_2 + \rho \underline{v} \cdot \underline{v}_1 \cdot \underline{n}_2) dS_2 \\ &= - \int_{\Sigma} (p_0 \underline{n}_2 + \rho \underline{U} \cdot \underline{U} \cdot \underline{n}_2) dS_2 + O(R^{-1}) \\ &= 1 + O(R^{-1}) \end{aligned}$$

Mas \underline{F} é zero, utilizando o teorema de divergência.

No plano, ponha $\underline{U} = (U, 0)$ temos

$$p = p_{\infty} + \rho U(u - U) + O(r^{-2}).$$

A força na direção X é dada por

$$\begin{aligned} X &= - \int_{\Sigma} (p \cos(\theta) + \rho u \underline{v} \cdot \underline{n}) dS \\ X &= \rho \int_{\Sigma} \{ \rho(u - U) \cos(\theta) - (u - U) \underline{v} \cdot \underline{n} - U \underline{v} \cdot \underline{n} \} + O(R^{-1}) \\ \underline{v} \cdot \underline{n} &= n \cos(\theta) + v \sin(\theta) \end{aligned}$$

sendo

$$(I) \quad \rho(u - U) \cos \theta$$

$$(II) \quad -(u - U) \underline{v} \cdot \underline{n}$$

$$(III) \quad -U \underline{v} \cdot \underline{n}$$

$$(I) + (II) = O(R^{-2}), \quad (III) \quad \text{representa um fluxo igual a zero.}$$

Um cálculo para γ , leva a $\gamma = \rho \Gamma U$ obtido por Kutta e Joukowski.

1.5.2 Viscosidade em Gás

Efeitos devido à viscosidade acontecem quando diferentes partes do fluido estão em movimento relativo. "Shearing Stress" ϕ no plano no fluido experimentalmente satisfaz uma relação da forma

$$\begin{aligned} \phi &= \eta \frac{\partial u}{\partial z} \\ F &= \eta S \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}$$

Consideremos um gás em movimento paralelo ao eixo x de tal maneira que todas as moléculas em uma dada camada tem a mesma velocidade u . Vamos supor um gradiente de velocidade $\frac{\partial u}{\partial z}$ no eixo z .

A força F para duas áreas de superfície em contato no plano $z = 0$ é dada acima. Queremos dar um cálculo para η baseada na teoria cinética de gases. A segunda lei de Newton diz que a força que a camada superior exerce na camada inferior é igual à taxa de mudança de momento da última.

Propusemos calcular esta mudança de momentum na base de mecânica estatística. Devido à agitação termal as moléculas individuais passam da camada superior onde o fluxo de velocidade é maior que a inferior. Estas moléculas possuem momentum paralelo ao eixo- x correspondente aquele existente na camada onde elas experimentam seu último impacto. Na mesma maneira moléculas diferem de camada inferior a camada superior causa um decréscimo no momentum paralelo ao eixo- x .

Seja \bar{c} a velocidade média do gás e λ a trajetória média livre.

Supomos que as moléculas que contribuem vem de sua última colisão isto é dizer uma distância em média λ .

O número de moléculas que cruzam uma área unitária em um segundo na direção fazendo o ângulo θ com o eixo z é

$$(n\bar{c} \cos \theta) \times \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4\pi} = \frac{1}{2} n\bar{c} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

sendo

$$\frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4\pi} \quad \text{o elemento do ângulo sólido.}$$

Elas transportam momentum

$$m \left(u_0 + \lambda \cos \theta \frac{du}{dz} \right) \quad \text{através do plano } z_0$$

O total de momentum levado de acima por baixo em unidade de tempo por unidade de área do plano é

$$m \left(u_0 + \lambda \cos \theta \frac{du}{dz} \right) \frac{n\bar{c}}{2} \cos \theta \sin \theta d\theta \quad \text{entre } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

e

$$I = \frac{m\lambda n}{2} \frac{du}{dz} \int_0^\pi \cos^2 \theta (-d \cos \theta) = \frac{mn\lambda}{2} \frac{du}{dz} \left[\frac{-\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi = -\frac{mn\lambda}{3} \frac{du}{dz}$$

Integrando obtemos

$$\frac{mn\lambda\bar{c}}{3} \frac{du}{dz} \Big|_{z_0} = \phi = \eta \frac{du}{dz} \Big|_{z_0} \quad \text{ou} \quad \eta = \frac{1}{3} mn\lambda\bar{c}. \quad (1.7)$$

Para mas detalhes veja [7] ou [14].

1.5.3 Fluxo simples laminar (Lei de Pouseuille)

O termo laminar descreve um fluxo no qual o fluido pode ser dividido em camadas paralelas que passam um ao outro com velocidades diferentes. Com o resultado de fricionamento interno (viscosidade) a camada mais rápida tende a alastrar a mais lenta junto e assim causando aceleração. Reciprocamente a mais lenta tende a retardar a mais rápida.

Considere um fluido viscoso fluindo lentamente em um tubo cilíndrico circular. Sabemos que o fluido adere as paredes assim a velocidade deveria aumentar indo ao centro do tubo e dv/dr é negativo.

Suponha que $v = v(r)$

$$\begin{aligned} r \rightarrow F_1 &= -2\pi\eta l r \frac{dv}{dr} \\ r + dr \rightarrow F_2 &= -2\pi\eta l (r + dr) \left(\frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} dr \right) \end{aligned}$$

Força devida pressões $2\pi r dr(p_1 - p_0)$. No estado estacionário, balanço de forças significa que

$$2\pi\eta l r \frac{dv}{dr} + 2\pi\eta l r \frac{d^2v}{dr^2} = 2\pi\eta l r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -2\pi r(p_1 - p_2)$$

(primeira ordem de aproximação).

Integrando

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{(p_1 - p_0)r}{2\eta l} + \frac{C}{r}$$

e

$$v = -\frac{(p_1 - p_0)r^2}{2\eta l} \frac{r^2}{2} + C \log r + D$$

v deverá ser finito em $r = 0$ ou $C = 0$.

$$v = 0 \quad \text{em} \quad r = a \quad \text{e} \quad D = \frac{(p_1 - p_0)a^2}{4\eta l}.$$

A solução, portanto é

$$v = \frac{(p_1 - p_0)}{4\eta l} (a^2 - r^2).$$

O fluxo total w por segundo

$$w = \int_0^a \frac{(p_1 - p_0)}{4\eta l} (a^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{\pi(p_1 - p_0)}{8\eta l} a^4.$$

Bibliografia

- [1] Acheson, D.J.: *Elementary Fluid Dynamics*. Clarendon Press. Oxford, 1990.
- [2] Batchelor, G. K.: *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge Univ. Press, 1967.
- [3] Courant, R., and K. O. Friedrichs.: *Supersonic Flow and Shock Waves*. New York 1948.
- [4] Chorin, A.J., Marsden, J.E.: *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics* . Springer-Verlag, 1980.
- [5] Goldstein, S.: *Lectures on Fluid Mechanics*. American Mathematical Society. Providence, 1960.
- [6] Hugoniot, H.: *Sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits*. J. Ecole polytech. 58, 1-125(1889).
- [7] Jeans, J. H.: *The Dinamical Theory of Gases*. 4th ed. New York. Dover 1954.
- [8] Kellog, O. D.: *Foundations of potential theory*. Frederik Ungar Publishing Company, 1929.
- [9] Liepmann, H. W., and Roshko, A.: *Elements of Gasdynamics*. New York 1957.
- [10] Landau, L. D., Lifshitz, E.M.: *Mecánica de Fluidos*. Reverté. Barcelona, 1991.
- [11] Lamb, H.: *Hydrodynamic*. 6th ed., Cambridge 1957; also Dover 1945.
- [12] Milne-Thomson L. M.: *Theoretical Hydrodynamics*. 1st ed., New York, Macmillan, 1950.
- [13] Rankine, W. J. M.: *On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance*. Trans. Roy. Soc. Lond. 160, 277-288(1870).
- [14] Roberts, J. K., and Miller, A.: *Heat and thermodynamics*. Blackie 5th ed. Glasgow, 1960.
- [15] Truesdell, C.: *The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*. J. Rational Mech. Anal, 1(1952), pp. 125-171, 173-300

Capítulo 2

Fluxos ideais bidimensionais

Consideraremos fluxos de fluidos ideais (i.e. não-viscosos e incompressíveis) bidimensionais. Suponha que estes fluxos são irrotacionais e que não há fontes e sumidouros. Seja

$$\mathbf{q} := \mathbf{q}(x, y) := (q_1(x, y), q_2(x, y))$$

o vetor velocidade do fluxo num ponto (x, y) . A hipótese de que não há fontes e sumidouros significa que

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

A hipótese que o fluxo é irrotacional significa que

$$\operatorname{rot} \mathbf{q} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

A última relação implica que a diferencial

$$q_1(x, y)dx + q_2(x, y)dy$$

é exata. Por um resultado básico de análise vetorial isto significa que em todo domínio simplesmente conexo existe uma função $\phi : (x, y) \rightarrow \phi(x, y)$ tal que

$$\mathbf{q} = \operatorname{grad} \phi$$

o equivalentemente

$$q_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad q_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

(2.1) implica que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

é dizer o potencial ϕ é uma função harmônica.

Sob as hipóteses estabelecidas a determinação de um fluxo numa região D pode reduzir-se à determinação de uma só função escalar, o **fluxo de potencial** ϕ . A função ϕ esta sujeita às seguintes condições:

(1) No interior de D satisfaz a equação de Laplace

$$\Delta\phi = 0 \quad (2.3)$$

(2) Na fronteira Γ (assumindo que não há absorção de fluido pelas paredes) o fluxo circula numa direção tangencial. Se \mathbf{n} é um vetor perpendicular à parede, temos que $\mathbf{n} \cdot \text{grad } \phi = 0$ ou

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad (2.4)$$

(3) Além disso, em problemas de fluxos, existe usualmente algumas condições no infinito; por exemplo, se o problema é determinar o fluxo em presença de um obstáculo, o fluxo deve ser homogêneo no infinito

Condições (1) e (2) são convenientes para o seguinte método que a seguir descrevemos e que Henrici ([3]) chama o método de “trasplantation” conforme. Suponhamos que f aplica D sobre uma região modelo E e seja

$$\psi : w \rightarrow \phi(f^{-1}(w))$$

a função “transplante” ϕ . Então ψ satisfaz a equação de Laplace; de fato se a aplicação é também conforme sobre a fronteira de D , a direção perpendicular a Γ corresponde à direção perpendicular a ao fronteira de E e (2.4) é equivalente a

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad (2.5)$$

onde ψ é a função de corrente que discutiremos mais detalhadamente em capítulo 2.1.

O problema do fluxo pode reduzir-se a um problema em análise complexa, como segue. Denominaremos por G_z a região do fluxo limitado pelos segmentos sólidos Γ_k e as linhas de corrente livre Γ_{\pm} . Desde que o fluxo é irrotacional e incompressível, $v(z)$ e o gradiente de um potencial de velocidade real $\phi(z)$ definido em G_z que satisfaz $\nabla^2\phi = 0$. Pensemos em $v(z)$ como um escalar complexo, e seja ζ sua conjugada complexa, a variável hodógrafo,

$$\zeta(z) = \bar{v}(z) \quad (2.6)$$

Então ζ e a derivada complexa de um potencial de velocidade complexo $w(z) = \phi(z) + i\psi(z)$,

$$\zeta(z) = \frac{dw(z)}{dz}, \quad (2.7)$$

onde a função de corrente ψ e a conjugada harmônica de ϕ .

Naturalmente escolhemos a região modelo de tal maneira que a solução do problema modelo seja simples. Ilustraremos o método por vários exemplos.

• **EXEMPLO 1 Fluxo através de um canal de seção transversal variável**

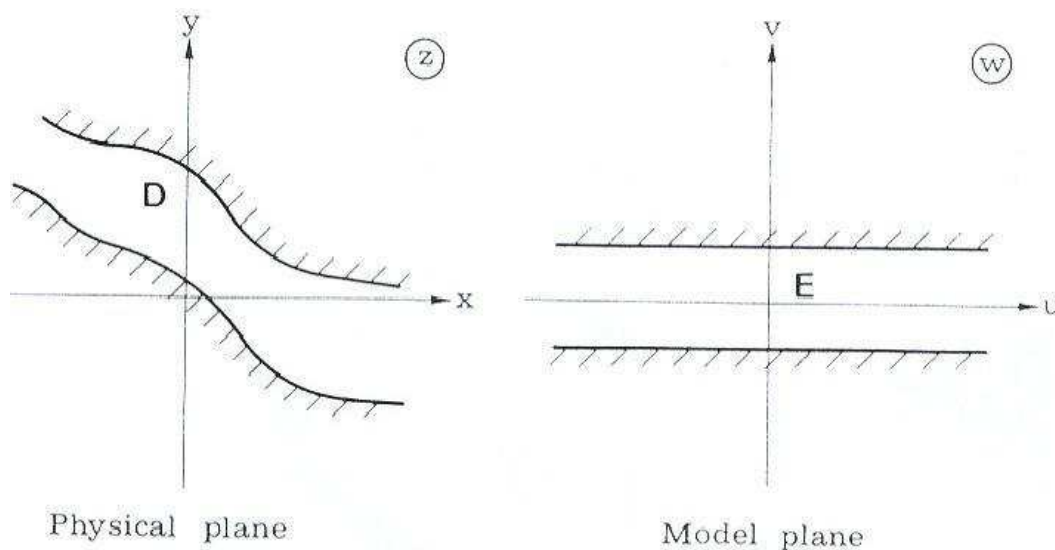


Figura 2.1: Fluxo por um canal

A região modelo apropriada é claramente uma faixa paralela, digamos, ao eixo u (ver figura 2.1). Um fluxo irrotacional por um canal de longo constante é claramente homogêneo. Portanto a solução do problema no domínio modelo é $\psi(u, v) = \text{const.} \cdot u$.

• **EXEMPLO 2 Fluxo em presença de um obstáculo**

Seja C (o complemento de D) um conjunto compacto simplesmente conexo que representa a seção transversal de um obstáculo cilíndrico colocado em um fluxo originalmente homogêneo que enche todo o espaço. Os geradores do cilindro se assumem ser perpendiculares à direção do fluxo (ver fig.2.2). O fluxo potencial ϕ , além de (2.3) e (2.4) deve satisfazer a seguinte condição no infinito:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \text{grad } \phi(z) = v_0 \quad (2.8)$$

onde grad é a função complexa definida por

$$\text{grad } \phi : (x, y) \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y)$$

Uma situação modelo na qual a solução do problema é trivial ocorre quando o obstáculo consiste de uma lâmina fina infinita paralela ao eixo real. A solução é $\psi(u, v) = v_0 u$. Segundo a teoria, devemos aplicar D sobre o domínio exterior a uma fenda horizontal no w -plano. O fluxo padrão não se perturba no infinito se a aplicação f é tal que $f(\infty) = \infty$, $f'(z) \rightarrow 1$ quando $z \rightarrow \infty$. Se tal f existe o fluxo potencial no plano físico é

$$\phi(z) = v_0 \text{Re} f(z) \quad (2.9)$$

então a velocidade complexa $q := q_1 + iq_2$ no ponto z é

$$q(z) = v_0 \overline{f'(z)} \quad (2.10)$$

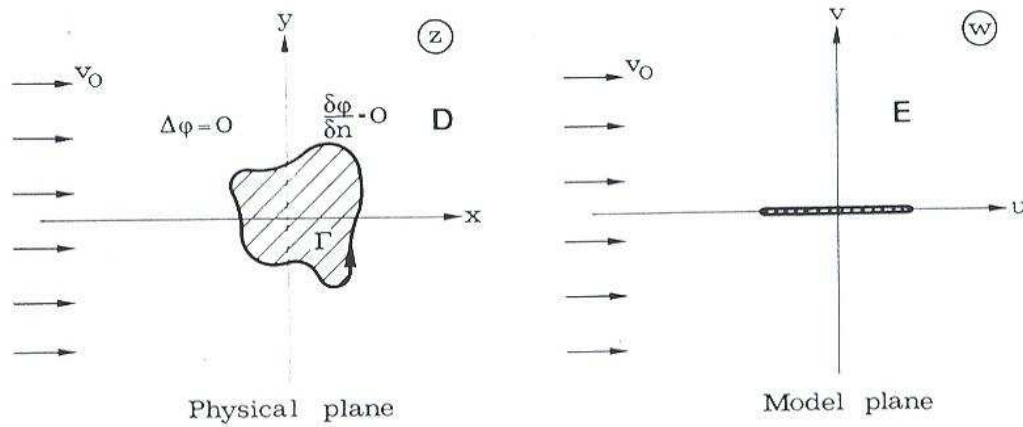


Figura 2.2: Fluxo ao redor de um obstáculo

De interesse em problemas de fluxos são as **linhas de corrente**. Estas são as curvas que em todo ponto z têm a direção do vetor velocidade q em z . As linhas de corrente no plano modelo são as linhas retas $v = \text{const.}$. As linhas de corrente são aplicadas sobre linhas de corrente, as linhas de corrente no plano físico são as curvas

$$\text{Im}f(z) = \text{const.} \quad (2.11)$$

Enfatizamos que as três fórmulas (2.9), (2.10) e (2.11) são válidas só na situação especial no qual o fluxo no domínio modelo é um fluxo homogêneo correndo na direção do eixo u . Para considerar um caso específico, seja o disco circular $|z| \leq a$ a seção transversal do obstáculo no plano físico. Encontramos que a função

$$f : z \rightarrow z + \frac{a^2}{z}$$

(obviamente relacionado com a função de Joukowski) aplica D , o exterior do obstáculo, sobre o corte do w -plane entre $w = \pm 2a$. Obviamente deixa o ponto no infinito fixo e satisfaz $f'(z) \rightarrow 1$ quando $z \rightarrow \infty$. Portanto denotando o potencial no plano físico por ϕ_0 temos

$$\phi_0(z) = v_0 \text{Re} \left(z + \frac{a^2}{z} \right) = v_0 \text{Re} \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta \quad (z = re^{i\theta}) \quad (2.12)$$

A equação das linhas de corrente é

$$\text{Im} \left(z + \frac{a^2}{z} \right) = \text{const.} \quad \text{ou} \quad \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta = \text{const.},$$

e por (2.10) para a velocidade complexa $q = q_1 + iq_2$ encontramos que

$$q(z) = v_0 \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) = v_0 \left(1 - \frac{a^2 e^{2i\theta}}{r^2} \right)$$

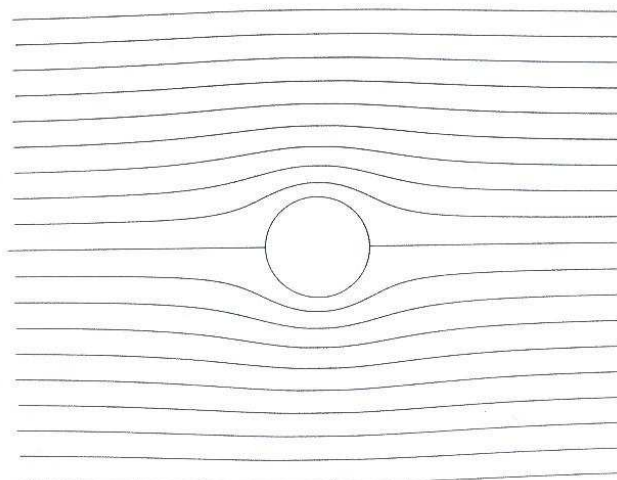


Figura 2.3: Fluxo ao redor de um cilindro circular, sem circulação

Nos pontos $z = \pm a$ a velocidade é igual a zero; estes são os pontos de estagnação do fluxo. Nos pontos $z = \pm ia$ temos que $q(\pm ia) = 2v_0$; estes são os pontos nos quais o valor absoluto do vetor velocidade atinge sua máximo (ver figura 2.3). Resulta que o fluxo definido por (2.12) não é o único fluxo em presença de um cilindro que é fisicamente possível, nem representa a única solução para o problema matemático definido por (2.1), (2.2), (2.4) e (2.8), a condição de fronteira no infinito. Da equação de Laplace em coordenadas polares segue que

$$\phi_1(x, y) := K\theta \quad (z = re^{i\theta}, K \text{ real})$$

é uma solução em qualquer região na qual o argumento θ pode definir-se como uma função único-avaliada. De fato, como a componente radial de $\text{grad } \phi_1$ é zero, ϕ_1 satisfaz as condições de fronteira requeridas sobre $|z| = a$. Finalmente, $\text{grad } \phi_1(z) \rightarrow 0$ para $z \rightarrow \infty$. Assim temos o gradiente da função

$$\phi(z) := \phi_0(z) + \phi_1(z) = v_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + K\theta \quad (2.13)$$

de aqui obtemos, para qualquer valor de K , uma solução para o problema que satisfaz todas as condições estabelecidas. Como o argumento θ não é único-avaliado, o potencial ϕ não é único-avaliado. Em verdade não deveríamos esperar que o seja pois o domínio de definição não é simplesmente conexo; $\text{grad } \phi$, não obstante, esta unicamente definido. Este satisfaz (2.8) porque

$$\text{grad } \phi(z) = v_0 \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{iK}{z} \quad (2.14)$$

O termino $K\theta$ em (2.13) tem uma interpretação física. Seja C (a seção transversal do cilindro obstáculo) arbitrário, seja Γ_0 a curva de Jordan positivamente orientada encerrando C e seja \mathbf{q} qualquer campo vetorial bidimensional tal que $\text{rot } \mathbf{q} = 0$. Então segue do teorema de

Stokes que

$$c := \int_{\Gamma_0} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{r}$$

não depende da escolha de Γ_0 . O valor da constante da integral é a **circulação** do campo \mathbf{q} ao redor do obstáculo C .

Para o fluxo definido por (2.13), tendo escolhido para Γ_0 um círculo de rádio $r > 0$, encontramos que a circulação tem o valor

$$c = 2\pi K \quad (2.15)$$

De (2.14) inferimos que os pontos z nos quais $q(z) = 0$ são as soluções da equação

$$1 - \frac{a^2}{z^2} - \frac{iK}{v_0 z} = 0$$

As soluções são

$$z = \frac{iK}{2v_0} \pm \left(a^2 - \frac{K^2}{4v_0} \right)^{1/2} \quad (2.16)$$

Se $-2zv_0 < K < 2av_0$, existem dois pontos de estagnação diferentes na superfície do cilindro, localizados em

$$z = ae^{i\alpha} \quad \text{e} \quad z = ae^{i(\pi-\alpha)} \quad (2.17)$$

(ver figura 2.4), onde

$$\alpha := \arcsin \frac{K}{2v_0 a} \quad (2.18)$$

Para $|K| > 2av_0$ não existe pontos de estagnação na superfície do cilindro. Em verdade

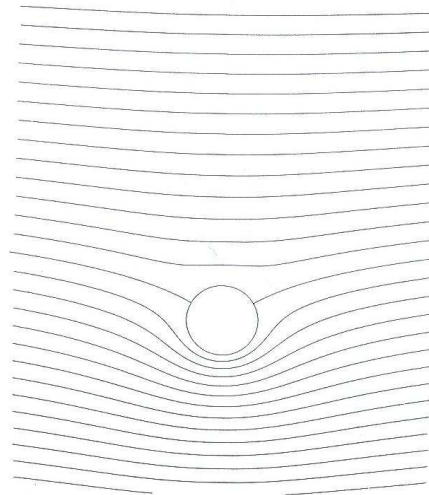


Figura 2.4: Fluxo ao redor de um cilindro com circulação fraca ($0 < K < 2av_0$)

existe um ponto dentro do fluxo no qual a velocidade é zero (ver figuras 2.5 e 2.6).

Como isso permite um simples tratamento de circulação, é conveniente usar o fluxo ao redor de um cilindro circular como um problema modelo para fluxos ao redor de obstáculos cilíndricos com seção transversal C arbitrária. Também é usualmente mais simples aplicar D , o exterior de C , sobre o exterior de um círculo que sobre o exterior de uma fenda horizontal. Assim seja C arbitrário e a função

$$f : z \rightarrow w = f(z)$$

aplica o exterior D de C sobre a região $E : |w| > a$ (ver figura 2.7) de tal maneira que

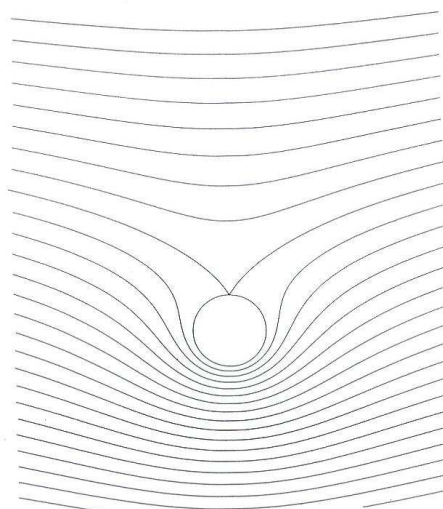


Figura 2.5: $K = 2av_0$

$$f(z) = z + O(1), \quad z \rightarrow \infty \quad (2.19)$$

Das fórmulas (2.13) e (2.14) segue que o potencial multivalorado

$$\phi(z) := v_0 \operatorname{Re} F(z) \quad (2.20)$$

onde

$$F(z) := f(z) + \frac{a^2}{f(z)} - \frac{iK \log f(z)}{v_0} \quad (2.21)$$

define um fluxo em presença de C com velocidade complexa

$$q(z) = \left[v_0 \left(1 - \frac{a^2}{f(z)^2} \right) + \frac{iK}{f(z)} \right] \overline{f'(z)}$$

o

$$q(z) = v_0 \overline{F'(z)} \quad (2.22)$$

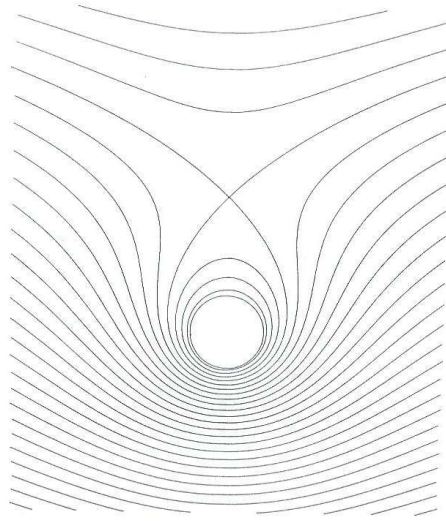


Figura 2.6: Fluxo ao redor de um cilindro com circulação forte

Calculamos a circulação deste fluxo. Se $\mathbf{q} = \text{grad } \phi$, então

$$\mathbf{q} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = \text{Re } \overline{\text{grad } \psi} dz,$$

mas se ψ é a conformal transplant de ϕ sob $w = f(z)$ então

$$\overline{\text{grad } \phi} dz = \overline{\text{grad } \psi} f'(z) dz = \overline{\text{grad } \psi} dw$$

e se Γ_0^* é a imagem de Γ

$$c = \int_{\Gamma_0} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{r} = \text{Re} \int_{\Gamma_0} \overline{\text{grad } \phi} dz = \text{Re} \int_{\Gamma_0^*} \overline{\text{grad } \psi} dw$$

Assim a circulação é igual à circulação $c = 2\pi K$ no plano modelo e representa outra quantidade invariante sob transformação conforme.

Os pontos de estagnação do fluxo são as pre-imagens dos pontos de estagnação no plano modelo. Se $|K|v_0 a$, os pontos são

$$w = ae^{i\alpha} \quad w = ae^{i(\pi-\alpha)} \quad (2.23)$$

onde α está definido por (2.18). Matematicamente, todas as localizações dos pontos de estagnação são igualmente possíveis. Quais deveriam escolher?. Num caso de importância prática esta questão é respondida por uma hipótese famosa devido a Joukowski. Seja um obstáculo em forma de perfil de aerofólio, i.e., seja a fronteira Γ de C suave exceto para uma esquina da figura no borde de saída (trailing edge). A hipótese de Joukowski estabelece que a circulação do fluxo ao redor de um aerofólio propriamente projetado sempre se ajustar

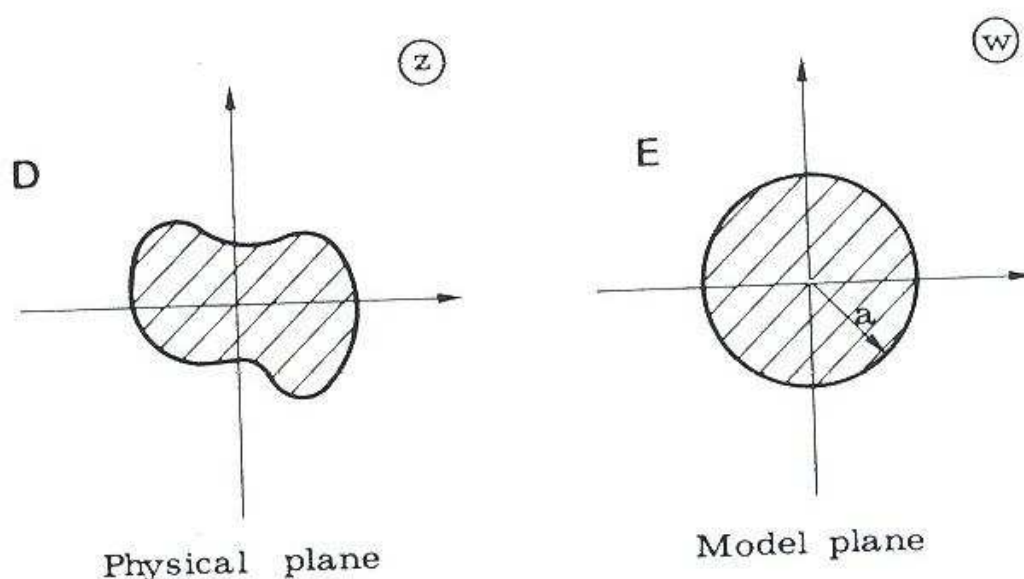


Figura 2.7: Fluxo ao redor de um obstáculo

asi mesmo de maneira que a velocidade no borde de saída é finito. Matematicamente isto implica que no plano modelo um ponto de estagnação coincide com o ponto imagem do borde de saída (ver figura 2.8). Assim se $w_0 := ae^{i\beta}$ é este ponto imagem, então $\alpha = \beta$, o qual por (2.18) implica que $K = 2v_0a \sin\beta$. A circulação então se converte em

$$c = 4\pi v_0 a \sin\beta \quad (2.24)$$

Longe de ser uma mera moléstia, é precisamente a presença de uma (negativa) circulação que possibilita a uma nave aérea voar. Calculemos a força total (por unidade de longitude) exercida pelo fluxo sobre um obstáculo. A força exercida sobre o elemento de superfície ds de Γ é $p\mathbf{n}ds$, onde p é a pressão e \mathbf{n} é o vetor unidade normal dirigido para o exterior de D . Desejamos representar o vetor força como um número complexo. Se $dz := dx + idy$ é o elemento linha, o vector $\mathbf{n}ds$ esta representado por idz . Asi o elemento força complexo é $ipdz$. Pela lei de Bernoulli, sem considerar a gravidade, a pressão esta dada por $p = p_0 - \frac{1}{2}\rho|\mathbf{q}|^2$, onde ρ é a densidade e p_0 , a pressão constante na velocidade zero. Claramente, o termino constante p_0 exerce uma força resultante zero sobre o corpo. Assim temos que a força total complexa R

$$R = -i\frac{\rho}{2} \int_{\Gamma} |\mathbf{q}|^2 dz$$

o dado que $q(z) = v_0 \overline{F'(z)}$,

$$R = -iv_0^2 \frac{\rho}{2} \int_{\Gamma} F'(z) \overline{F'(z)} dz$$

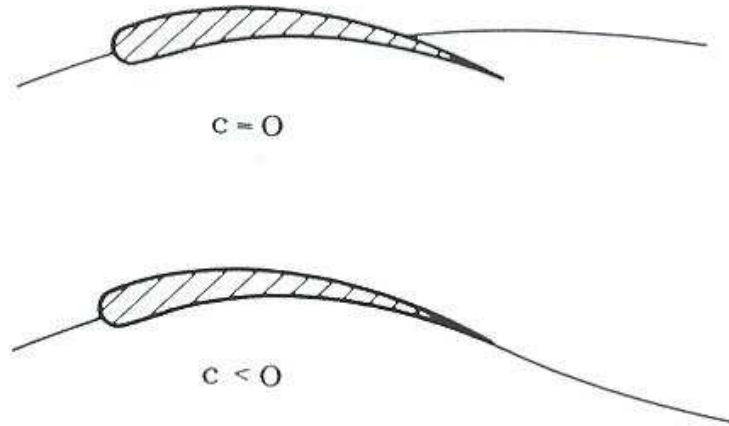


Figura 2.8: Fluxo ao redor de um aerofólio com e sem circulação

A integral de linha tem um integrando não analítico, mas pode avaliar-se por meio da seguinte observação: sobre Γ a velocidade complexa $q(z) = v_0 \overline{F'(z)}$ tem a direção de Γ . Segue-se que

$$\arg F'(z) = -\arg dz + \lambda\pi$$

onde λ é um inteiro. Comparando argumentos encontramos que

$$F'(z)\overline{F'(z)}dz = \overline{|F'(z)|^2}dz$$

Portanto

$$R = -i\frac{v_0^2}{2} \int_{\Gamma} \overline{|F'(z)|^2} dz \quad (2.25)$$

Como F' é analítico em D , podemos avaliar a integral ao longo de qualquer curva de Jordan positivamente orientada Γ cercando o obstáculo. Seleccionamos como nosso caminho de integração a imagem de um grande círculo Γ^* sob a transformação $w \rightarrow z = g(w)$, onde $g := f^{-1}$. Em vista de

$$F'(z) = \left\{ 1 - \frac{a^2}{f(z)^2} - \frac{iK}{v_0 f(z)} \right\} f'(z)$$

obtemos, introduzindo w como uma variável de integração,

$$\int_{\Gamma} [F'(z)]^2 dz = \int_{\Gamma^*} \left(1 - \frac{a^2}{w^2} - \frac{iK}{v_0 w} \right)^2 \frac{1}{g'(w)} dw$$

Pelo teorema de resíduos só o termo em w^{-1} contribuye ao valor da integral. Desde que $[g'(w)]^{-1} = 1 + O(w^{-2})$, a integral tem o valor

$$2i\pi \left(-\frac{2iK}{v_0} \right) = \frac{4\pi K}{v_0}$$

Usando este resultado em (2.25) e expressando K em termos da circulação c , obtemos a **fórmula de Blasius**:

$$R = -i\rho v_0 c \quad (2.26)$$

Assim a força age na direção perpendicular à velocidade e para acima se a circulação é negativa.

Para examinar um exemplo específico consideremos o fluxo de Joukowski ao redor de um aerofólio da forma de uma fina lamina de longitude $2d$ inclinado um ângulo 2δ contra a direção do fluxo. Por meio de uma aplicação auxiliar

$$z = e^{-i\delta} dz_1, \quad z_1 = \frac{1}{2} \left(z_2 + \frac{1}{z_2} \right), \quad z_2 = \frac{2e^{i\delta} w}{d}$$

(ver figura 2.9) encontramos que a aplicação f definida por

$$w \rightarrow z = f^{-1}(w) := w + \frac{d^2 e^{-2i\delta}}{4w} \quad (2.27)$$

aplica $|w| > d/2$ sobre o exterior da lâmina. Obviamente satisfaz a condição requerida no

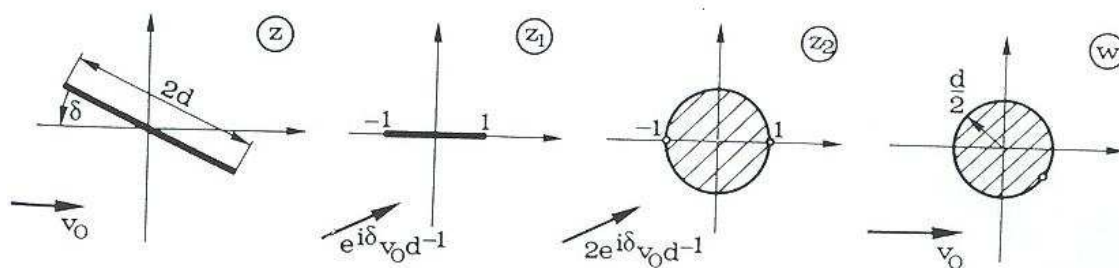


Figura 2.9: Auxiliar aplicação para construir (2.27)

infinito. A imagem do trailing edge $z = de^{-i\delta}$ é

$$w = \frac{de^{-i\delta}}{2}$$

Assim $\beta = -\delta$ e pela circulação de Joukowski (2.24) temos que $c = -2\pi v_0 d \sin \delta$. Por (2.26) a força de elevação é $R = 2i\pi\rho v_0^2 d \sin \delta$

• EXEMPLO 3 Fluxo através de perfis em cascatas

Outros problemas de fluxos onde se aplicam as transformações conformes inclui fluxos através de cascatas rectas ou circulares de lâminas, quando eles ocorrem em turbinas. Para estes os problemas modelo são os correspondientes fluxos através de grids de raios delgados infinitos ou lâminas paralelas (ver figura 2.10).

Se nós fazemos a hipóteses que o fluido emana de um sumidouro na origem, estes fluxos

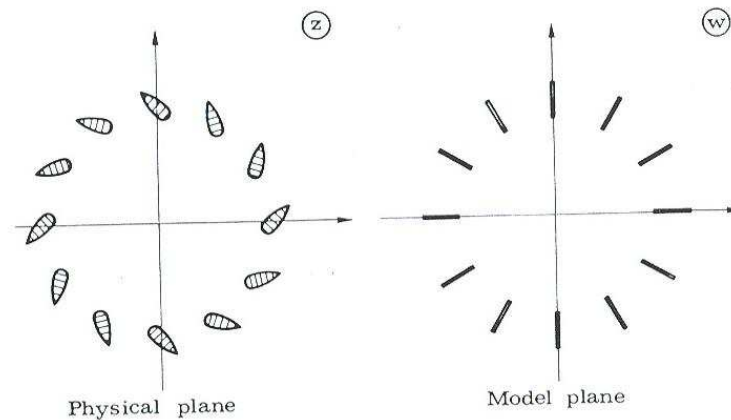


Figura 2.10: Fluxo por um canal

podem gerar-se por uma composição de transformações elementares com a aplicação de Joukowski.

• EXEMPLO 4 Problemas de fronteira livre

Considere um recipiente cilíndrico enchido cuja seção transversal é

$$\operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

Se o recipiente tem uma abertura, representada, digamos, pelo segmento $0 < y < a$ do eixo imaginário, o fluido emanasse do recipiente segum um padrão indicado na figura 2.11. O problema de determinar o fluxo potencial ϕ do fluxo resultante é diferente de qualquer dos problemas tipos considerados previamente, ainda o domínio definição de ϕ não é conhecido a priori. A localização da fronteira livre Γ_1 é determinado pela condição de que a pressão é constante ao longo de Γ_1 . Pela lei de Bernoulli isto significa que $|\mathbf{q}|$ é constante. Para solucionar estes problemas em vez de considerar o plano modelo devemos trabalhar com o plano hodógrafo, i.e., com a imagem de D sob a aplicação $z \rightarrow q(z)$, onde q é a velocidade complexa. Isto é estudo de um capítulo posterior, mais antes é desejável discutir a noção física de corrente.

2.1 Função de corrente do Stokes

2.1.1 Movimentos axissimétricos

No estudo do movimento em três dimensões não é possível usar ao potencial complexo. O caso mas simples é aquele em que o movimento é mesmo em todos os planos que acontecem através de uma determinada linha reta, chamada eixo. Tais os movimentos acontecem, para o exemplo, quando um sólido de revolução se desloca no sentido de su eixo dentro de um

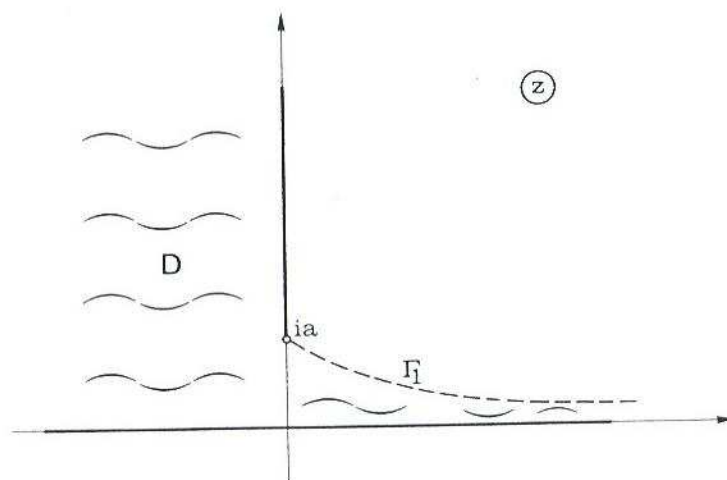


Figura 2.11: Um problema de fronteira livre

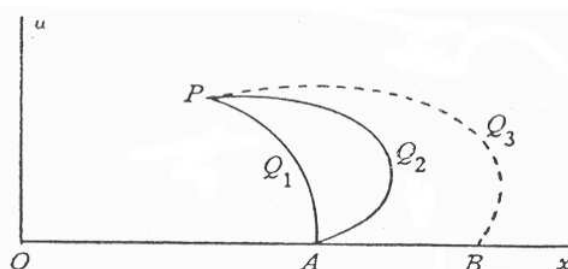
líquido que esta inicialmente no repouso.

Este tipo de movimento que é descrito como o axissimétrico tem determinados analogias com o caso bidimensional; em particular pode se definir uma função do corrente, e quando o movimento for irrotacional, existe sempre, um potencial da velocidade.

Suponha que o eixo de simetria é o eixo x . As coordenadas aconselháveis para a discussão destes movimentos são as polares esféricas (r, θ, ω) ou, as cilíndricas (x, Ω, u) .

2.1.2 Função de corrente de Stokes

Consideremos um ponto fixo A do eixo de simetria e um ponto arbitrário P . Unimos P com A por duas curvas AQ_1P e AQ_2P , situadas no plano que passa pelo eixo, e que chamaremos por conveniência um plano meridiano. A posição de um ponto de dito plano se pode definir mediante as coordenadas cilíndricas (x, u) . Se fazemos girar as curvas meridianas AQ_1P e AQ_2P ao redor do eixo de simetria, formasse-se uma superfície fechada, na qual a quantidade de líquido que entra de direita a esquerda através da superfície engendrada por AQ_2P é igual à quantidade de líquido que sai no mesmo tempo através da superfície engendrada por AQ_1P , supondo que não exista criação nem destruição de líquido no interior da superfície.



Designando por $2\pi\psi$ o fluxo através de uma qualquer destas superfícies a função ψ é a

função de corrente de Stokes. Se conservamos AQ_1P fixa e substituímos AQ_2P por outra curva meridiana qualquer que une A com P , é fácil ver que o valor de ψ permanece invariável. A função de corrente ψ depende, pois, da posição de P e possivelmente, do ponto A .

Se tomamos outro ponto fixo B do eixo e traçamos a curva BQ_3P , o fluxo através da superfície gerada por BQ_3P será o mesmo que o fluxo através de AQ_1P , já que por simetria não existe fluxo através de AB . Disto se deduz que o valor ψ não depende do ponto particular fixo que se escolhe para a definição, com tal que se ache situado no eixo. Por consequência, o valor da função de corrente em P depende somente da posição de P , e quando este se acha situado no eixo, $\psi = 0$.

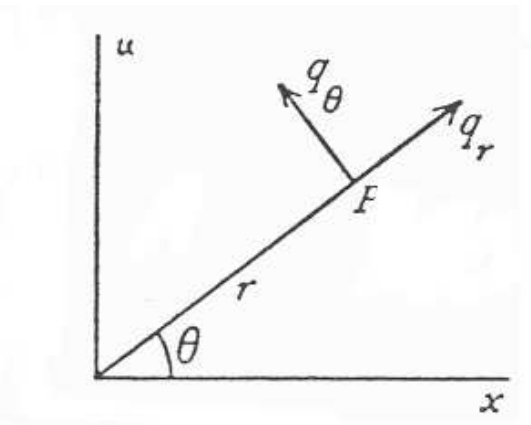
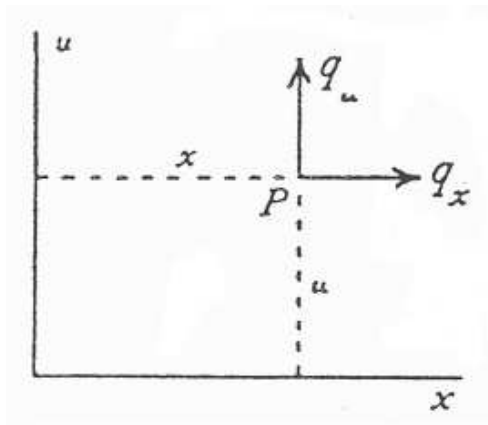
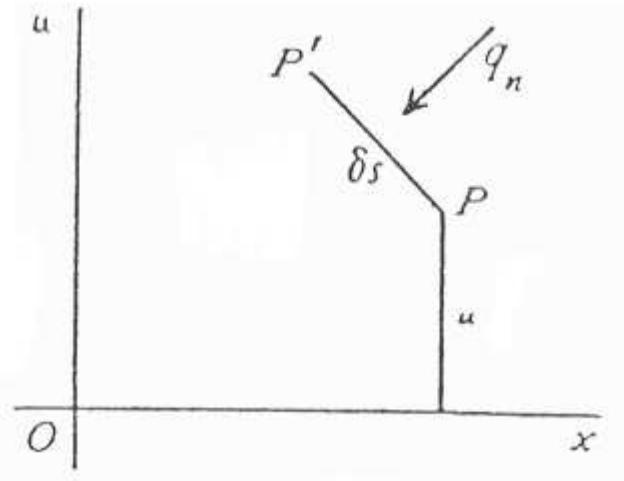
Se ψ_P e $\psi_{P'}$ denotam os valores da função de corrente em P e P' , o fluxo de direita a esquerda que atravessa a superfície engendrada pela rotação ao redor do eixo de uma linha qualquer que une P com P' , tem por valor $2\pi\psi_{P'} - 2\pi\psi_P$. Supondo que P e P' são separados por uma distância infinitesimal δs , a velocidade normal de direita a esquerda através de P' se deduz da igualdade

$$2\pi u \delta s q_n = 2\pi(\psi_{P'} - \psi_P),$$

da que resulta, tomando limites:

$$q_n = \frac{1}{u} \frac{\partial \psi}{\partial s},$$

Como aplicações particulares deste importante resultado se tem, fazendo ds sucessivamente



igual a du , dx , $r d\theta$, dr :

$$\begin{aligned} q_x &= -\frac{1}{u} \frac{\partial \psi}{\partial u}, & q_x &= -\frac{1}{u} \frac{\partial \psi}{\partial u}, \\ q_r &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{r \partial \theta}, & q_\theta &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned}$$

as quais dão as componentes da velocidade em coordenadas cilíndricas e polares esféricas. Não existe componente normal ao plano meridiano. As linhas de corrente vêm dadas pela equação $\psi = \text{const.}$ já que através de ditas linhas não existe fluxo algum. As dimensões de ψ são $L^3 T^{-1}$; mas as dimensões do potencial de velocidade ϕ são $L^2 T^{-1}$. Deve-se observar que ψ existe em virtude da continuidade do movimento; e por conseguinte a equação de continuidade fica automaticamente satisfeita. Dos valores anteriores para as componentes da velocidade se deduz

$$\frac{\partial(uq_x)}{\partial x} + \frac{\partial(uq_u)}{\partial u} = 0,$$

que constitui outra forma da equação de continuidade.

A função de corrente se definiu com referência a um ponto básico situado no eixo. A escolha de outro ponto básico qualquer faz mudar a ψ meramente numa constante (ver [8] pag. 106). Por só intervir as diferenças e as derivadas de ψ poderíamos considerar que ψ contém uma constante arbitrária.

2.1.3 Fonte simples

Um fonte simples é um ponto de emissão radial. Se o fonte emite o volume $4\pi m$ na unidade de tempo, m é a intensidade do fonte.

Um sumidouro é um ponto de absorção radial. Se existe um fonte de intensidade m na origem, o fluxo através de uma superfície esférica de rádio r , cujo centro esta no fonte, está dado em termos da velocidade radial pela igualdade $4m\pi = 4r^2\pi q_r$; e assim

$$q_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = \frac{m}{r^2},$$

e conseqüentemente

$$\phi = \frac{m}{r}, \quad \psi = m \cos \theta = \frac{mx}{r},$$

A função de corrente também se pode obter diretamente da definição, considerando o fluxo através da casca esférica determinada pelo plano que passa por P e é perpendicular a Ox

Se o fonte se acha no ponto A do eixo no lugar da origem, obtemos, figura 2.12:

$$\phi = \frac{m}{AP} = \frac{m}{\sqrt{r^2 + c^2 - 2cr \cos \theta}}, \quad \psi = m \cos \theta_1 = \frac{m(r \cos \theta - c)}{\sqrt{r^2 + c^2 - 2cr \cos \theta}},$$

Em função de x e u se tem

$$\phi = \frac{m}{\sqrt{(x-c)^2 + u^2}}, \quad \psi = \frac{m(x-c)}{\sqrt{(x-c)^2 + u^2}},$$

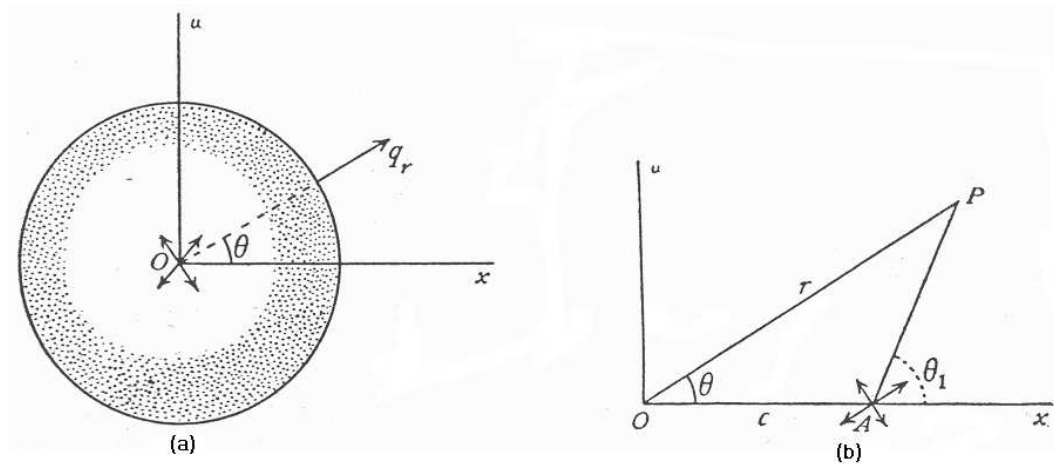


Figura 2.12: Fluxo através da casca esférica

Observe que estas funções contêm a x e a c somente na forma $(x - c)$. Por consequência:

$$\frac{\partial \phi}{\partial c} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial c} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

2.1.4 Explosão submarina

Se uma cavidade esférica de rádio R_0 , que contém gás à pressão p_0 , começa a expandir-se rapidamente no líquido ilimitado que o rodeia, se encontra em uma situação que se assemelha ao de uma explosão submarina. Seja R o rádio da cavidade no instante t ; p_1 , a pressão do gás, que suporemos expandir-se adiabaticamente, e desprezemos a inércia do gás. Assim, em virtude da lei das expansões adiabaticas:

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{R_0^3}{R^3} \right)^\gamma.$$

Desprezando a gravidade, o movimento do líquido será radial, e a velocidade no contorno da cavidade vem dada por $dR/dt = R'$.

O movimento se assemelha, por conseguinte, ao produzido por um fonte podendo escrever-se

$$\phi = \frac{m}{r}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{m}{r^2}.$$

Portanto, quando $r = R$, $m/R^2 = R'$. de aqui:

$$\phi = \frac{R^2 R'}{r}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{R^2 R'' + 2R(R')^2}{r}.$$

A equação da pressão da então:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{R^2 R'}{r^2} \right)^2 - \frac{R^2 R'' + 2R(R')^2}{r} = F(t).$$

Se a pressão no infinito é desprezível, vê-se que $F(t)$ é igual a zero, já que o primeiro membro adquire dito valor para $r = \infty$. Fazendo $r = R$, tem-se $p = p_1$; depois

$$RR'' + \frac{3}{2}(R')^2 = \frac{R_0^{3\gamma} p_0}{R^{3\gamma} \rho}.$$

Multiplicando por $2R^2R'$ e fazendo $c^2 = p_0/\rho$, obtém-se

$$\frac{d}{dt}(R^3R'^2) = \frac{2c^2R_0^{3\gamma}}{R^{3\gamma-2}}R'.$$

Integrando, e tendo em conta que $R' = 0$ quando $R = R_0$, obtém-se:

$$\frac{R'^2}{c^2} = \frac{2}{3(\gamma-1)} \left[\left(\frac{R_0}{R} \right)^3 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \right].$$

Quando $\gamma = 4/3$, a solução se pode completar fazendo $R = (1+n)R_0$, com o que

$$\frac{ct}{R_0} = \left(1 + \frac{2}{3}n + \frac{1}{5}n^2 \right) \sqrt{2n}.$$

2.1.5 Corrente uniforme

No caso de uma corrente uniforme U , paralela a Ox , calcularemos o fluxo de direita a esquerda através do círculo de rádio u , cujo centro esta em Ox e cujo plano lhe é perpendicular, temos $2\pi\psi = -\pi\omega u^2 Ou$; depois

$$\psi = -\frac{1}{2}u^2U = -\frac{1}{2}Ur^2 \sin^2 \theta \quad (2.28)$$

Este resultado também se tivesse podido obter por integração da equação

$$-\frac{1}{u} \frac{\partial \psi}{\partial u} = U$$

O potencial de velocidade é evidentemente

$$\phi = -Ux = -Ur \cos \theta \quad (2.29)$$

2.1.6 Fonte em uma corrente uniforme

Combinando um fonte e uma corrente uniforme, obtém-se

$$\psi = -\frac{1}{2}Ur^2 \sin^2 \theta + m \cos \theta \quad (2.30)$$

O ponto de estagnação é tal que $q_r = 0$ $q_\theta = 0$, é dizer

$$U \cos \theta + \frac{m}{r^2} = 0, \quad -U \sin \theta = 0,$$

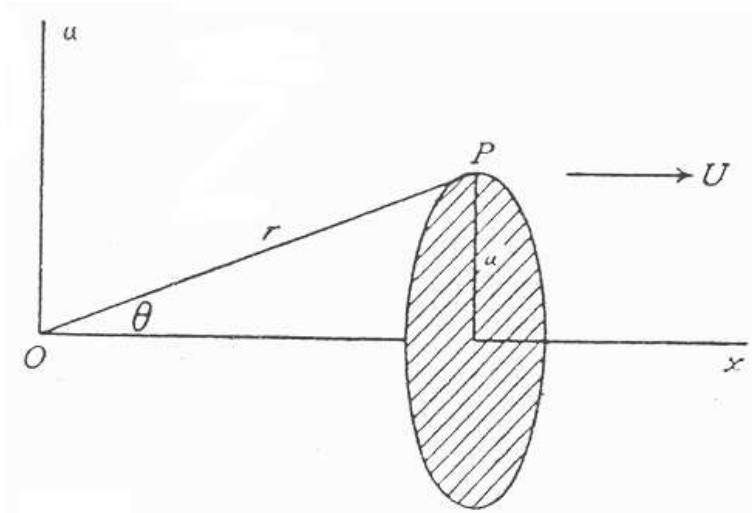
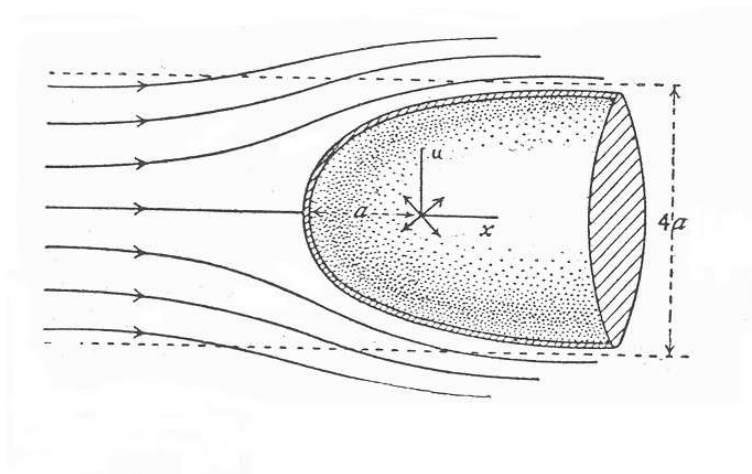
Figura 2.13: Fluxo através do círculo de rádio u 

Figura 2.14: Movimento de corrente em presença de um corpo cilíndrico

as quais dão $\theta = \pi$, $r^2 = m/Ou = a^2$ por exemplo.

A linha de corrente que passa pelo ponto de estagnação é, portanto

$$-\frac{1}{2}Ur^2 \sin^2 \theta + m \cos \theta = -Ua^2.$$

Esta é a linha de corrente divisória, cuja equação se pode escrever na forma

$$u^2 = 2a^2(1 + \cos \theta);$$

depois quando $\theta \rightarrow 0$, $ou \rightarrow 2a$, o que dá as assintotas.

A linha divisória se mostra na figura 2.14 e se pode traçar facilmente pelo método de Rankine ou partindo da equação

$$r = a \csc \frac{\theta}{2}$$

A equação (2.30) dá, portanto, o movimento de corrente em presença de um corpo cilíndrico, com uma proa achatada, cujo diâmetro é no limite igual $4a$.

A equação da pressão dá

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} \cos \theta + \frac{a^4}{r^4}\right) = \frac{\Pi}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 \quad (2.31)$$

que mostra que $p \rightarrow \Pi$ à medida que r aumenta

Este resultado se pode empregar para calibrar um tubo de Pitot para diferentes posições das aberturas laterais; a abertura da proa mede $\Pi + \frac{1}{2}\rho Ou^2$, enquanto a lateral mede p .

A equação (2.31) também se pode empregar para calcular a distribuição da pressão nas proximidades da proa de um dirigível ou de um tubo de Pitot.

2.2 Tensores em fluídos

Consideramos um meio contínuo sujeito a forças externas ou de corpo e forças internas ou de contato. Seja \underline{n} a normal externa num ponto da superfície S e \underline{t}_n a força por unidade de área exercida pelo material fora de S . Então a força total interna exercida no volume limitado por S é

$$\iint_S \underline{t}_n dS.$$

Seja \underline{f} a força externa por unidade de massa; assim a força externa total será

$$\iiint_V \rho \underline{f} dx$$

Pelo princípio da conservação do momento linear diz que

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \underline{v} dx = \iiint_V \rho \underline{f} dx + \iint_S \underline{t}_n dS \quad (2.32)$$

Conservação do momento angular, se aplicável, diz que

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \underline{\rho} \underline{r} \wedge \underline{v} dx = \iiint_V \underline{\rho} \underline{r} \wedge \underline{f} dx + \iint_S \underline{r} \wedge \underline{t}_n dS \quad (2.33)$$

(2.33) é válido com muitos fluídos, mas não todos.

Suponha que $diam(V) \sim d \sim 0$. Então, (2.32) implica que

$$\lim_{d \rightarrow 0} d^{-2} \iint_S \underline{t}_n dS = 0 \quad (2.34)$$

Isto é dizer que as tensões estão em equilíbrio local (observe que aqui existem algumas questões analíticas escondidas que não perseguimos). Agora considere um tetraedro pequeno com três de suas faces paralelas aos planos de coordenadas passando em P e a quarta com normal \underline{n} . Seja dA a área da face inclinada de tal maneira que as áreas das faces perpendiculares ao eixo P_j é $dA_j = n_j dA$. As normais externas a aquelas faces $\underline{p}_{ij} = \underline{t}_j$, $j = 1, 2, 3$ e as tensões sobre estas faces \underline{t}_j . Então o princípio do equilíbrio local afirma que

$$d^{-2} \underline{t}_n dA - \underline{t}_1 dA_1 - \underline{t}_2 dA_2 - \underline{t}_3 dA_3 = (\underline{t}_n - \underline{t}_1 n_1 - \underline{t}_2 n_2 - \underline{t}_3 n_3) dA / d^2 \sim 0$$

Isto implica que $(t_n)_i = T_{ji} n_j$, onde T_{ji} é o i -ésimo componente de \underline{t}_j e $(t_n)_i$ o i -ésimo componente de \underline{t}_n ou

$$\underline{t}_n = T_{ji} n_j \quad (2.35)$$

Pela lei do quociente segue-se que (T_{ji}) é um tensor.

Utilizando (2.35) em (2.33) obtemos que

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \underline{\rho} v_i dx = \iiint_V \underline{\rho} \frac{dv_i}{dt} dx = \iiint_V \underline{\rho} \underline{f}_i dx + \iint_S T_{ji} n_j dS$$

e pelo Teorema de Green obtemos que.

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \underline{\rho} v_i dx = \iiint_V (\underline{\rho} f_i + T_{ji,j}) dx \quad (2.36)$$

Suponha um adequado grau de regularidade obtemos que de (2.36) a seguinte equação pontual é válida .

$$\underline{\rho} \frac{dv_i}{dt} = \underline{\rho} f_i + T_{ji,j} \quad (2.37)$$

Observe que (2.37) em um sistema de referência retangular segue da aplicação do Teorema de Green clássico e que a equação tensorial plena com $T_{ji,j}$, interpretada com a diferenciação covariante neste caso coincide com a diferenciação parcial comum. Conseqüentemente, (2.37) é válido em geral.

Consideramos fluidos para qual o momento angular é conservado. Do fato que

$$\underline{v} \wedge \underline{v} = 0, \quad \frac{d}{dt} \underline{r} \wedge \underline{v} = \underline{r} \wedge \underline{a}$$

Calculamos

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \underline{\rho} \underline{r} \wedge \underline{v} dx = \iiint_V \underline{\rho} \underline{r} \wedge \underline{a} dx = \iiint_V \underline{\rho} \underline{r} \wedge \underline{f} dx + \iint_S \underline{r} \wedge \underline{t}_n dS \quad (2.38)$$

Também,

$$\begin{aligned} \iint_S \epsilon_{ijk} x_j T_{kp} n_p dS &= \iiint_V \epsilon_{ijk} (x_j T_{pk})_{,p} dx \\ &= \iiint_V (\epsilon_{ijk} x_j T_{pk})_{,p} + \epsilon_{ijk} T_{jk} dx \end{aligned} \quad (2.39)$$

pelo Teorema de Green.

Defina \hat{T} por $\hat{T} = (\epsilon_{ijk} T_{jk})$. Então de (2.38) e (2.39) obtemos que

$$\iiint_V \underline{r} \wedge (\underline{\rho} \underline{a} - \underline{\rho} \underline{f} - \nabla \cdot T) dx = \iiint_V \hat{T} dx$$

e, assim que

$$\iiint_V \hat{T} dx = 0$$

por (2.37).

Novamente sob adequada regularidade a validade de (2.37) por V geralmente implica que $\hat{T} = 0$.

Mas \hat{T} tem componentes $(T_{23} - T_{32}, T_{31} - T_{13}, T_{12} - T_{21})$ e $T_{ij} = T_{ji}$ ou T é simétrico.

Serrin [10] apresentou as idéias essenciais de Sir George Stokes com respeito as equações constitutivas de um fluido não-elástico .

Uma grande classe de fluidos satisfazem as hipóteses de Stokes:

- (1) O tensor de tensões T_{ij} é uma função contínua do tensor de deformação e_{ij} e o estudo termodinâmico local, mas é independente das outras hipóteses cinemáticas.
- (2) O fluido é homogêneo e isotrópico.
- (3) Quando não existe deformação $e_{ij} = 0$, a tensão é hidrostática es dizer $T_{ij} = -p \rho_{ij}$.

Para fluidos compressíveis p pode ser identificado como a pressão da termodinâmica clássica. Para fluidos incompressíveis p deverá ser encarado como sendo um multiplicador de Lagrange a ser determinado das equações dinâmicas.

A deformação do fluido no tempo dt é dada pelo vetor de deslocamento $\xi^r v^r dt$ e os componentes de deslocamento são

$$e_{rs} = 1/2(v_{r,s} + v_{s,r}) dt \quad (2.40)$$

Seja

$$e'_{rs} = \frac{1}{2}(v_{r,s} + v_{s,r}) \quad (2.41)$$

O tensor de tensões sempre pode ser escrito na forma

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + T'_{ij} \quad (2.42)$$

Dinâmica de fluidos clássica é estabelecida sob a hipótese que T'_{ij} é uma função linear de e'_{rs}

$$T'_{rs} = \gamma_{rs}^{mn} e'_{mn} \quad (2.43)$$

Pela lei do quociente γ_{rs}^{mn} é um tensor e, de fato, um tensor isotrópico e homogêneo e por consequência

$$\gamma_{rs}^{mn} = \lambda\delta_{mn}\delta_{rs} + \mu(\delta_{mr}\delta_{ns} + \delta_{nr}\delta_{ms})$$

em sistemas de coordenadas retangulares.

Conseqüentemente (2.37) vira

$$\frac{\partial p}{\partial x^r} - (\gamma + \mu)\frac{\partial \text{div } v}{\partial x^r} - \mu\delta^{st}v_{r,st} = \rho(f_r - a_r) \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\rho v^r)_{,r} = 0 \quad (2.45)$$

Obviamente, (2.44) tem a forma tensorial em sistema de coordenadas gerais

$$\frac{\partial p}{\partial x^r} - (\lambda + \mu)\frac{\partial \text{div } v}{\partial x^r} - \mu g^{st}v_{r,st} = \rho(f_r - a_r) = \rho(f_r - \frac{dv_r}{dt}) \quad (2.46)$$

(2.46) tem de ser complementado pelas condições de fronteira apropriadas e relações termodinâmicas no caso de fluxos compressíveis (equação de estado $p = \phi(\rho, T)$, T é a temperatura).

Definindo, $\nu = \mu/\rho$ $\lambda' = \lambda/\rho$ e supondo o que o fluido é incompressível $\text{div } v = 0$.

Finalmente, observamos que as equações de Navier-Stokes são válidas na forma:

$$\frac{dv}{dt} = \underline{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\underline{v}, \quad \text{em } \Omega, \quad t > 0,$$

$$\text{div } \underline{v} = 0 \quad \text{em } \Omega$$

$$v(0) = v_0,$$

$$\underline{v}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (\text{veja as observações a seguir sobre esta questão}).$$

Vale a pena olhar o livro de Aris (capítulo 6) para um breve resumo da idéias envolvidas aqui.

Observação 2.1. *O sistema dinâmico de mecânica dos fluidos tem sido obtido sob a hipótese implícita que a formulação macroscópica é bem definida e globalmente definida no tempo. Desde o trabalho de Leray sobre os fundamentos analíticos das equações de Navier-Stokes tais questões de existência têm deixado em aberto a questão da unicidade e existência global no tempo em 4 dimensões de espaço-tempo (veja o trabalho de Thompson [13]).*

2.2.1 Condições de fronteira para as equações de Navier - Stokes

Em uma superfície livre ou uma interface entre dois fluidos é geralmente aceito que o vetor de tensões deverá ser contínuo.

Em uma fronteira material Stokes argumenta que o fluido tem de ser aderente ao sólido . O resultado de Poiseuille fornece evidências para isto para fluidos sob condições normais. Em grandes altitudes a condição não é válida. Sugestões alternativas têm sido oferecidas por diversos pesquisadores como por exemplo Bateman [1], Truesdell [12] e Paterson [9].

Em geral tomamos como uma hipótese que a velocidade do fluido relativo na fronteira material é zero. As equações clássicas de um fluido incompressível viscoso têm a forma com forças externas potenciais:

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{v} &= 0 \\ \rho \frac{d\underline{v}}{dt} &= -\rho \nabla p - \rho \nabla \Omega + \mu \Delta \underline{v} \end{aligned}$$

Lembrando

$$\begin{aligned} \underline{v} \nabla \underline{v} &= \underline{w} \wedge \underline{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 \\ \underline{w} &= \nabla \wedge \underline{v} \\ \nabla \wedge \underline{w} &= \nabla \wedge \nabla \underline{v} = -\Delta \underline{v} \end{aligned}$$

obtemos que

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{w} \wedge \underline{v} = -\nabla H - \nu \nabla \wedge \underline{w} \quad (2.47)$$

com

$$H = \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \Omega, \quad \nu = \mu/\rho.$$

Sir Geoffrey Taylor investigou o efeito da viscosidade sobre circulação em um trabalho publicado em 1918.

Tomando o curl de (2.47) obtemos que

$$\frac{d\underline{w}}{dt} = \underline{w} \cdot \nabla \underline{v} + \nu \Delta \underline{w} \quad (2.48)$$

Vamos examinar a circulação $\int_C \underline{v} \cdot d\underline{x}$.

Evidentemente a uma dependência sobre a viscosidade, de fato, utilizando a equação de Navier-Stokes calculamos que

$$\frac{d}{dt} \int_{C(t)} \underline{v} \cdot d\underline{x} = \int_{C(t)} \underline{v} \cdot d\underline{x} = \nu \int_{S(t)} \Delta \underline{v} \cdot d\underline{S}.$$

com $S(t)$ uma superfície no fluido com fronteira $C(t)$. Para examinar mais detalhadamente o que acontece considere um protótipo da geração de viscosidade.

Movimento em círculos concêntricos em volta de um eixo $-Oz$, no caso que \underline{v}^2 é uma função

da distância radial daquele eixo.

A fórmula para o curl em coordenadas polares diz que

$$w_r = \frac{1}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}, \quad w_\theta = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad w_z = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v\theta}{r}$$

Dada que $v_z = v_r = 0$ obtemos que

$$w = w_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(vq)}{\partial r}, \quad q = r\theta. \quad (2.49)$$

E obtemos de (2.48)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (2.50)$$

(equação do calor, é um coeficiente constante e linear) e

$$w = \frac{A \exp(-r^2/4\nu t)}{4\nu t\pi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(vq) \quad (2.51)$$

Resolvendo para q obtemos que

$$q = \frac{A}{2r\pi} (1 - \exp(-r^2/4\nu t)) + \frac{f(t)}{r}$$

Omitimos $f(t)/r$ para manter q finito em $r = 0$. Claramente, o momento tem circulação inicial A em volta do eixo z e vorticidade total constante. Por outro lado a energia cinemática, o momentum angular e a dissipação podem ser calculados para ser infinitos, portando não físicos e o momento não é fisicamente realizável em uma região não limitada.

Derivando (2.51) obtemos

$$\frac{A}{2\nu\pi t^2} \left(1 - \frac{r^2}{4\nu t} \right) \exp(-r^2/4\nu t)$$

e consideramos um possível fluxo com esta expressão como a distribuição de vorticidade w . Neste caso

$$q = \frac{rA}{4\nu t^2\pi} \exp(-r^2/4\nu t)$$

e a circulação é zero em $t = 0$, mas a energia total e dissipação de energia e o momentum angular constante

$$\int 2\pi\rho r q dr = \rho A$$

Em $t > 0$, $q = 0$ em $r = 0$ e $r = \infty$ e tem um valor máximo

$$\frac{A}{2\pi} (2\nu t^3)^{1/2} \quad \text{em} \quad r = (2\nu t)^{1/2}.$$

O valor $r_0 = (2\nu t_0)^{1/2}$ é chamado por Taylor o raio do redemoinho em tempo t_0 . Dado que a velocidade máxima do redemoinho decresce conforme $t^{-3/2}$ o tempo para o redemoinho de raio r_0 e velocidade q_0 decai a um redemoinho de velocidade máxima $\frac{1/2}{q_0}$ é

$$t - t_0 = (2^{2/3} - 1)t_0 = 0.296 \frac{r_0^2}{\nu}$$

Taylor [2] adapta este como a media da taxa de decaimento do redemoinho .

Bibliografia

- [1] Bateman, H., Dryden, H. L., and Murnaghan, F. D.: *Hydrodynamics*. Bull. National Res. Council No. 84. Washington 1932. Reprinted New York 1955.
- [2] Betz, A.: *Konforme Abbildung*. 2. Aufl. Springer, Berlin 1964.
- [3] Henrici, Peter : *Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 1: Power Series-Integration-Conformal Mapping-Location of Zeros*. New York: Wiley, 1988. 704 p.
- [4] Henrici, Peter : *Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 2: Special Functions, Integral Transforms, Asymptotics, Continued Fractions*. New York: Wiley, 1991. 672 p.
- [5] Henrici, Peter : *Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 3: Discrete Fourier Analysis, Cauchy Integrals, Construction of Conformal Maps, Univalent Functions*. New York: Wiley, 1993.
- [6] Lavrentiev, M. A., and Schabat, B. V.: *Methoden der komplexen funktionentheorie*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.
- [7] Milne Thomson, L. M.: *Theoretical aerodynamics*. 2nd ed. Macmillan, London 1952.
- [8] Michael, A.: *Matrix and Tensor Calculus*. New York 1947.
- [9] Patterson, G. N.: *Molecular Flow of Gases*. New York 1956.
- [10] Serrin, J.: *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*. Handbuch der Physik ed. S. Flügge, vol. VIII/1, Springer, Berlin, 1959.
- [11] Sedow, L. I.: *Two dimensional problems in hydrodynamics and aerodynamics*. Wiley-Interscience, New York 1965.
- [12] Truesdell, C., J. Rat. Mech. Anal., 1, 125, 1952.
- [13] Thompson, M.: *Dez palestras em dinâmica de fluidos*. Escola de Inverno de Matemática Aplicada e Computacional. Brasil, UFRGS, 1996, p 27-72.
- [14] Taylor, G. I., Aero. Res. Comm. 598, 1918.

Capítulo 3

Teoria de Jatos

3.1 O método do hodógrafo

Recordemos da teoria matemática que fluxos planares ideais envolvem três quantidades complexas: a posição $z = x + iy$, o potencial complexo $W = U + iV$, e a conjugada $\zeta = \xi + i\eta$ da velocidade complexa $\zeta^* = \xi - i\eta$. Também recordemos que

$$\frac{dW}{dz} = \zeta \quad \text{logo} \quad z = \int \zeta^{-1} dW \quad (3.1)$$

O hodógrafo de tal fluxo é simplesmente o fluxo geométrico dos valores de ζ . Em [3] há um extenso estudo de fluxos acotados por flat placas e linhas de corrente livres. Em tais casos a fronteira hodógrafo consiste de segmentos radiais e arcos circulares, centrados em $\zeta = 0$. Assim, ζ tem direção constante ao longo de qualquer placa e magnitude constante sobre qualquer linha de corrente livre.

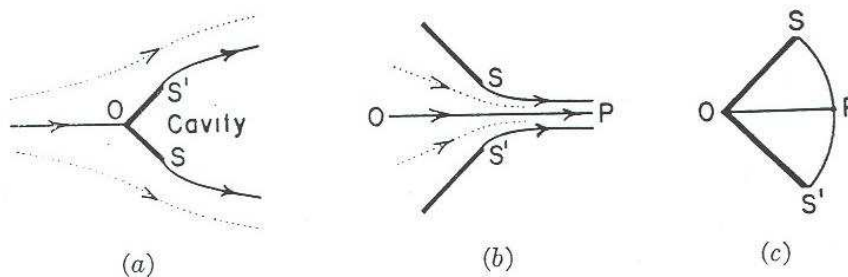


Figura 3.1: Cavidade detrás de um berço

Típicos exemplos de tais fluxos são proporcionados pela cavidade detrás de um berço (wedge) (Fig. 3.1a), e o jato desde um bocal (Fig. 3.1b). Assumimos-se que há ao mas um ponto do estagnação, segue que a fronteira é transformada sobre a fronteira de um setor

circular no plano hodógrafo. Podemos assumir que este setor é (depois de uma mudança de unidades e eixos coordenados)

$$\Gamma : 0 \leq |\zeta| \leq 1 \quad 0 \leq \arg(\zeta) \leq \frac{\pi}{n} \quad (3.2)$$

Para alguma n positiva, como em (Fig. 3.1c). Suporemos esta normalização em todas nossas fórmulas.

Efetivamente assumiremos que (i) o hodógrafo é simplesmente coberto (i.e., dado ζ em Γ , existe só um ponto z onde a velocidade é ζ^*).

Definindo o W -diagrama de um fluxo de Euler como o lugar geométrico de todos os $W(Z)$, faremos a hipótese habitual (ii) o W diagrama é simplesmente conexo e simplesmente coberto. Em tais casos, o fluxo pode ser determinado usando transformações conformes, pela seguinte técnica.

A função $t = \zeta^n$ transforma Γ sobre um semicírculo, o qual é transformado por $\tilde{T} = -\frac{1}{2}(t + t^{-1})$ sobre o semi-plano superior

$$\Delta : \text{Im}\{\tilde{T}\} \geq 0 \quad (3.3)$$

É claro que para qualquer número real a, b, c, d com $ad > bc$, $T = (a\tilde{T} + b)/(c\tilde{T} + d)$ é uma transformação simples injetiva conforme de Δ sobre se mesma. Estes fatos são facilmente demonstrados por métodos elementares. O teorema fundamental de unicidade das aplicações conformes, ver [2], afirma que estas são as únicas transformações simples de Δ sobre se mesma. Segue-se que

Teorema 3.1. *A mais general transformação simples de Γ sobre Δ é dada por*

$$T = \frac{a(\zeta^{2n} + 1) + 2b\zeta^n}{c(\zeta^{2n} + 1) + 2d\zeta^n} \quad (3.4)$$

onde a, b, c, d são reais e $ad < bc$.

Seguidamente notamos que qualquer fluxo completo é limitado por linhas de corrente, de maneira que sua W -diagrama é limitado por cortes paralelos ao eixo real. Isto é um caso especial da teoria de transformações de Schwarz-Christoffel [6] que:

Teorema 3.2. *Se o W -diagrama de um fluxo completo é simplesmente conexo então há uma transformação simples de Δ sobre o W -diagrama, da forma*

$$dW = f(T)dT = C \frac{\prod(T - A_i)}{\prod(T - B_k)} dT, \quad (3.5)$$

onde os A_i, B_k são reais, de maneira que $f(T)$ é uma função racional com coeficientes reais.

Por exemplo no caso do jato desde um bocal, o W -diagrama é uma infinita faixa e $W = k \ln T$, portanto $f(T) = k/T$.

Corolário 3.1. *Sob as precedentes hipóteses, z é a integral de uma função racional de ζ^n em ζ .*

Assim, T dada em (3.4) é uma função racional de ζ^n , e

$$z = \int \zeta^{-1} f(T) dT \quad (3.6)$$

3.2 Jato dentro de um bocal

Um dos mas simples jatos com linhas de corrente livre é dado pelo jato de um bocal como se ilustra nas (Fig. 3.2a) e (Fig. 3.2c)

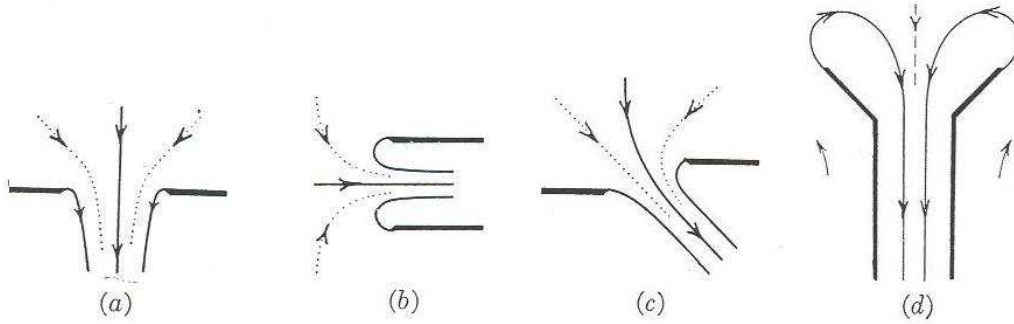


Figura 3.2: Jatos com linhas de corrente livre

O estudo matemático foi fato primeiro por Helmholtz [5]. Coeficientes de contração para jatos líquidos são preditos com bastante exatidão pela teoria como mostramos na tabela 3.1. A tabela 3.1 esta baseada sobre cálculos realizados por von Mises [9].

Tabela 3.1: Jato dentro de um bocal, ângulo meio β

$\beta = \pi/n$	22.5°	45°	67.5°	90°	112.5°	135°	157.5°	180°
$C_c(\text{teoria})$.855	.745	.666	.611	.568	.537	.516	.500
$C_c(\text{exper.})$.882	.753	.684	.632	.606	.577	.546	.541

Neste caso, W -diagrama é evidentemente uma infinita tira, com um ponto do stagnação em $W = -\infty$. Por escolha apropriada de unidades temos que $0 \leq V \leq \pi$. Portanto a variável W , definida por

$$T = e^W, \quad \text{ou} \quad W = \text{Ln}(T), \quad (3.7)$$

cobre simplesmente a metade do plano. Se o hodógrafo é um setor circular, o qual parece muito possível, teremos (3.7) e (3.4). Também o ponto do stagnação em $W = -\infty$, $T = 0$, faz $a = 0$ em (3.4). Finalmente desde que uma traslação $W \rightarrow W + k$ o qual corresponde a $T \rightarrow e^k T$, não tem significado físico, um pode supor $b = c = 1$. Portanto

$$\begin{aligned} W &= n \ln \zeta - \ln(\zeta^{2n} - 2C\zeta^n + 1) \\ &= n \ln \zeta - \ln(\zeta^n - e^{i\pi\alpha}) - \ln(\zeta^n - e^{-i\pi\alpha}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aqui $C = \cos n\alpha$ e $S = \sin n\alpha$ onde $-\alpha$ é a direção do jato no infinito. No caso $n = 1$ do jato

desde uma ranhura, um pode facilmente integrar $dz = \zeta^{-1}dW$ em forma fechada obtendo

$$z = -\frac{1}{\zeta} + C(\ln \zeta + W) + iS Ln \frac{\zeta - e^{i\alpha}}{\zeta - e^{-i\alpha}} \quad (3.9)$$

Tabela 3.2: Parâmetros geométricos para jatos desde um “slot”

α	0°	18.4°	37.0°	56.2°	76.7°	91.8°	180°
C_c	.611	.609	.602	.588	.562	.532	0
γ	90°	75°	60°	45°	30°	20°	0°

Na Tabela 3.2, tabulamos o coeficiente de contração C_c , e o ângulo γ entre as paredes da ranhura e a linha unindo os bordos da ranhura, como funções de α , para $0 < \alpha \leq 90^\circ$. O ultimo é $\pi/(2 + \pi) = 0.61$ se $\alpha = 90^\circ$; neste caso a fronteira livre é uma “tractrix”. Em general, as fronteiras livres podem ser expressadas paramêtricamente como segue. Sobre a linha de corrente livre esquerda, onde $\zeta = e^{i\phi}$ [$0 < \phi < \alpha$],

$$z = -\cos \phi + i \sin \phi + iC\phi - C \ln[2(\cos \phi - \cos \alpha)] - S(\alpha + \pi) + \frac{1}{2}iS \ln \frac{1 - \cos(\phi - \alpha)}{1 - \cos(\phi + \alpha)} \quad (3.10)$$

Similarmente, sobre o lado direito da linha de corrente livre, onde $\alpha < \phi < \pi$,

$$z = -\cos \phi + i \sin \phi + iC(\phi + \pi) - C \ln[2(\cos \phi - \cos \alpha)] - S\alpha + \frac{1}{2}iS \ln \frac{1 - \cos(\phi - \alpha)}{1 - \cos(\phi + \alpha)} \quad (3.11)$$

O mais interessante caso é o caso simétrico [4]. Neste caso a metade do fluxo outra vez representa ao jato desde um bocal, dos quais um lado (o eixo de simetria) estende-se ao infinito. Com a precedente escolha dos eixos de coordenadas, os eixos de simetria fazem um ângulo $\alpha = \beta/2 = \pi/2n$ com a horizontal, de maneira que $C = 0$ e $S = 1$ em (3.8). Conseqüentemente, temos

$$W = n \ln \zeta - \ln(\zeta^{2n} + 1) \quad (3.12)$$

$$z = \int \zeta^{-1}dW = -\frac{n}{\zeta} - 2n \int \frac{\zeta^{2n-2}}{\zeta^{2n} + 1}d\zeta \quad (3.13)$$

Desde o qual a abertura da boca h do bocal é facilmente calculado em termos da derivada logarítmica $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ da Γ -função,

$$h = \sin \frac{\pi}{2n} \{2n + \psi(1 - \frac{1}{4n}) - \psi(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n})\} \quad (3.14)$$

Um caso particularmente interessante é a boquilha de Borda, quando $n = 0.5$. Neste caso as linhas livres estão dadas explicitamente ([7]) por

$$z = 2 \sin^2(\theta/2) - 2 \log \sec(\theta/2), \quad y = \theta - \sin \theta \quad (3.15)$$

3.3 Jatos sobre placas planas

O caso de um jato convergente sobre uma infinita placa plana (ver [8]) (Fig. 3.3a) tem um W -diagrama mas complicado (Fig. 3.3b); o hodógrafo é semicircular (Fig. 3.3c). Normalizamos para o caso em que o placa é horizontal, enquanto o jato tem espessura π .

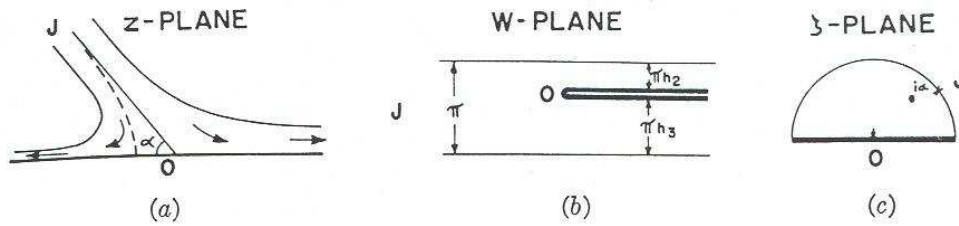


Figura 3.3: a) Jato convergente sobre uma infinita placa plana, b) com um W -diagrama mas complicado e c) Hodógrafo é semicircular

Lema 3.1. *Se o ponto divisor é transformado sobre $T = 0$, então o W -diagrama corresponde à metade do T -plano por*

$$W = -\ln(T - T_1) + h_2 \ln(T - T_2) + h_3 \ln(T - T_3) \quad (3.16)$$

onde T_1, T_2, T_3 correspondem a os pontos no infinito sobre o jato concorrente e seus dois ramos respectivamente, e $h_2 + h_3 = 1$.

Demonstração. Pela teoria geral de transformações de Schwarz-Christoffel podemos colocar em (3.5)

$$f(T) = \frac{T}{(T - T_1)(T - T_2)(T - T_3)}. \quad (3.17)$$

Usando frações parciais podemos escrever

$$f(T) = \sum \frac{h_i}{T - T_i} \quad (3.18)$$

para constantes convenientes h_1, h_2, h_3 . Integrando (3.5), conseguimos

$$W = \sum h_i \ln(T - T_i) \quad (3.19)$$

onde os $h_i\pi$ são os saltos em V nos T_i . Por nossa normalização,

$$h_1 = -1$$

pela conservação de massa (“uniformemente” no sentido da teoria de variáveis complexas), $h_2 + h_3 = 1$. Podemos conseguir fórmulas inteiramente específicas. Se colocamos

$$T = \frac{2\zeta}{\zeta^2 + 1}, \quad (3.20)$$

o hodógrafo é transformado sobre o plano metade Δ por Teorema 3.1, com $n = b = c = 1$, $a = d = 0$; também, no ponto divisor $\zeta = 0$, portanto $T = 0$ e as condições do lema 3.1 são válidas. \square

Substituindo $\zeta = e^{i\alpha}$, $\zeta = 1$, $\zeta = -1$ em (3.20), deduzimos

$$T_3 = -1, \quad T_2 = 1, \quad T_1 = 2e^{i\alpha}/(e^{2i\alpha} + 1).$$

Também pela conservação horizontal, $h_2 - h_3 = C$, onde $C = \cos \alpha$, α é o ângulo que se forma com o eixo x pelo jato concorrente. Combinando com $h_2 + h_3 = 1$, conseguimos

$$2h_2 = 1 + C \quad e \quad 2h_3 = 1 - C \quad (3.21)$$

Substituindo $f(T) = \sum h_i/(T - T_i)$ em (3.6), e integrando, conseguimos

$$z = z_0 + C \ln(\zeta^2 - 2C\zeta + 1) - iS \ln \frac{\zeta - e^{i\alpha}}{\zeta - e^{-i\alpha}} - (1 + C) \ln(\zeta - 1) + (1 - C) \ln(\zeta + 1) \quad (3.22)$$

A correspondente equação para as correntes livres $\zeta = e^{i\phi}$ é

$$z = z_1 + C \ln \left| \frac{C - \cos \phi}{\sin \phi} \right| + \ln \left(\cot \frac{\phi}{2} \right) + \frac{1}{2} iS \ln \left(\frac{1 - \cos(\phi + \alpha)}{1 - \cos(\phi - \alpha)} \right) \quad (3.23)$$

onde

$$\begin{aligned} z_1 &= (1 + C) \frac{i\pi}{2} + S(\pi - \alpha) \quad \text{if } \phi < \alpha \\ z_1 &= (1 - C) \frac{i\pi}{2} - S\alpha \quad \text{if } \phi > \alpha \end{aligned} \quad (3.24)$$

Se refletimos o fluxo assim obtido no placa, conseguimos uma completa descrição do fluxo ideal devido a dois jatos simetricamente convergentes ver (Fig. 3.4)

3.4 Jatos convergentes

3.4.1 Fluxos simples; princípio de reflexão

Primeiro, para o conceito de um “fluxo simples” será dado uma precisa definição técnica.

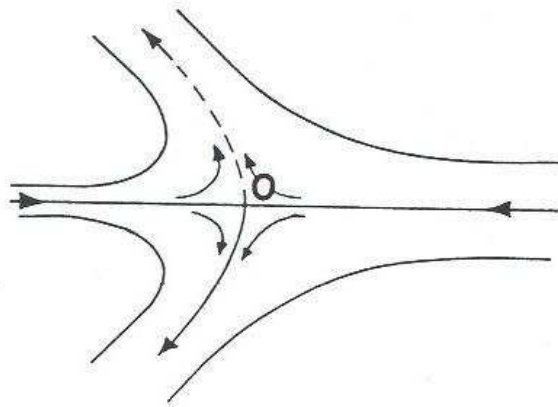


Figura 3.4: Jatos simetricamente convergentes

Definição 3.1. Um campo de velocidade complexo $\zeta(z)$, definido sobre um domínio aberto R com fecho \bar{R} , será chamado um “fluxo simples” se e somente se

- (i) R é simplesmente localmente coberta
- (ii) R é simplesmente conexo
- (iii) $\zeta(z)$ é limitado e contínuo em \bar{R} e analítica em R
- (iv) A fronteira $\bar{R} - R$ de R consiste de um número finito de linhas de corrente rectificáveis girando um ângulo total finito.

Observação 3.1. Observamos que o “potencial complexo” $W = \int \zeta dz$ de qualquer fluxo satisfazendo (iii) é claramente definido e contínuo sobre \bar{R} , analítico em R , e limitado exceto onde z chega a ser infinito.

Por uma “linha de corrente”, queremos dizer uma curva ao longo do qual $V = \text{Im}(W)$ é constante. Por uma curva rectificável, queremos dizer uma curva tal que o segmento unindo qualquer dois pontos tem variação total finita.

Lema 3.2. Existe uma função simples $z(T)$ transformando a metade superior do T -plano conformalmente e um a um qualquer fluxo simples; além $\zeta(T)$ e $W(T)$ são funções analíticas complexas.

Demonstração. A primeira afirmação é uma consequência imediata do teorema fundamental de aplicações conformes [2]; a analiticidade de

$$\zeta(T) = \zeta(z(T))$$

e $W(T)$ são corolários. □

Muitas importantes propriedades de fluxos simples podem ser demonstradas aplicando o Princípio de Reflexão de Schwarz (ver [2]) o qual o estabeleceremos sem demonstração.

Princípio dá Reflexão.

Seja $f(t)$ uma função complexa analítica, regular e única-avaliada dentro de um domínio D parcialmente limitado (como Fig. 3.5) por um segmento \overline{AB} do eixo real, e tendendo continuamente a valores reais sobre \overline{AB} . Então a relação $f(t^*) = f^*(t)$ continua $f(t)$ analiticamente através de \overline{AB} para a imagem refletida D^* de D , de maneira que $f(t)$ é analítica no domínio $D \cup D^* \cup \overline{AB}$.

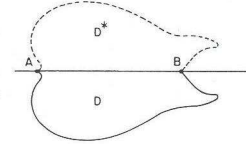


Figura 3.5: Domínio parcialmente limitado

Muitos úteis corolários deste princípio podem ser estabelecidos por transformações conformes elementares.

Corolário 3.2. *Seja $f(t)$ analítica e único-avaliada num domínio D parcialmente limitado por um arco \widehat{AB} de um círculo de raio r com centro $t = 0$, exceto para um número finito de zeros e pólos. Seja também $f(t)$ contínua sobre o domínio fechado \overline{D} , exceto em pólos, e transforma \widehat{AB} sobre um arco de um círculo de rádio R e centro 0 . Então a relação $f(r^2/t^*) = R^2/f^*(t)$ continua $f(t)$ analiticamente para a imagem refletida de D sob inversão no círculo $|t| = r$, trocando zeros e pólos.*

3.4.2 W-diagramas de fluxos simples

Usando as idéias anteriores não é difícil dar uma classificação local das singularidades de $W(T)$ no lema 3.2

Teorema 3.3. *Cerca de qualquer singularidade $T = T_0$ no finito T -plane, W pode escrever-se*

$$W = c(T - T_0)^{-2} + d(T - T_0)^{-1} + h \ln(T - T_0) + r(T) \quad (3.25)$$

onde T_0 , h , c e d são reais e $r(T)$ é regular (i.e., uma série de potência convergente em $(T - T_0)$).

Demonstração. Pela observação 3.1, qualquer tal singularidade T_0 deve ser sobre a fronteira i.e., T_0 deve ser real. Desde que a fronteira consiste de linhas de corrente, V é constante por partes sobre elas. Portanto para constantes convenientes V_0 e πh (o salto em V a traves de T_0 sobre a fronteira), temos

$$W = h \ln(T - T_0) + V_0 + W_1(T), \quad (3.26)$$

onde $W_1(T)$ é real perto de T_0 quando T é real. Por observação 3.1, $W(T)$ e $W_1(T)$ são limitados e contínuos exceto em um número finito de pontos; portanto T_0 é uma singularidade isolada. O princípio de reflexão então mostra que $W_1(T)$ pode estendida a uma função analítica única-avaliada, definida numa vizinhança inteira de T_0 . Fica discutir a singularidade de $W_1(T)$ em T_0 . Em [3] se demonstra que uma singularidade essencial é impossível. Por tanto $W_1(T)$ tem um pólo em $T = T_0$. Devemos agora determinar a limitação sobre sua ordem n . Mas se $n > 2$ então como $\zeta \neq \infty$ e $dz = \zeta^{-1}dW$, a imagem no plano z do setor $0 < \text{arc}(T - T_0) < \pi$ no T -plano terá um ângulo $n\pi > 2\pi$. Portanto o z -plane será coberta multiplemente, ainda localmente, contrariamente à afirmação. \square

Definição 3.2. Se $\zeta \neq 0$ uma vizinhança de um ponto no infinito no z -plano correspondente a $T = T_0$ será chamada uma corrente infinita, um oceano ou jato conforme como o primeiro coeficiente não zero em (3.25) é c , d ou h . (Se a fronteira não é uma linha de corrente livre, usamos a palavra tubo em vês de jato).

Observação 3.2. Os casos são facilmente distinguíveis no plano físico, desde que o fluxo no infinito tem um ângulo 2π , um ângulo π , ou cheia uma tira de grosso $|\hbar\pi/\zeta|$ nos três casos. O caso $\zeta = 0$ de pontos do estagnação no infinito requer uma mas elaborada (ver capítulo 3.5 seção 3.5.1) discussão

Em outras aplicações, é conveniente transformar “simples” fluxos sobre vários domínios B no t -plane (parâmetro-plano). Para tais aplicações, o seguinte corolário é útil.

Corolário 3.3. Seja t_0 qualquer ponto na fronteira de um domínio B , onde a curva fronteira é analítica. Então o Teorema 3.3 é válido com t substituindo a T .

Por [2] existe uma função analítica local da metade do plano superior sobre o interior de B . O comportamento global de W pode ser deduzido muito facilmente do Teorema 3.3.

Teorema 3.4. O potencial complexo de qualquer “simples” fluxo tem a decomposição aditiva

$$W = \sum_{k=1}^n \left[\frac{c_k}{(T - T_k)^2} + \frac{d_k}{(T - T_k)} + h_k \ln(T - T_k) \right] + cT^2 + dT \quad (3.27)$$

Sua derivada tem a decomposição multiplicativa

$$dW/dT = R(T) = C \prod_i (T - A_i)(T - A_i^*) \prod_i (T - B_j) / \prod_k (T - T_k) \quad (3.28)$$

Todos os coeficientes em (3.27) são reais; também são todos os B_j em (3.28).

Demonstração. Primeiro consideremos o caso onde $T = \infty$ é transformado sobre um ponto onde W é finito. Então, por Teorema 3.3, somando sobre todas as singularidades locais, a diferença $h(T)$ entre os dois lados de (3.27) (com $c = d = 0$) é analítico e único-avaliada, real sobre o eixo real e sem singularidades na metade do plano superior. Pelo princípio de reflexão de Schwarz, $h(T)$ pode continuar-se para uma função regular em todo o finito

T -plano. Além disso $W(\infty)$ sendo finito, $h(T)$ é também limitado. Portanto pelo teorema de Liouville [2], $h(T)$ será uma constante. Desde que W esta definido somente até uma constante aditiva, (3.27) é demonstrado com

$$c = d = 0.$$

Se W tem uma singularidade em $T = \infty$, podemos transformar a metade superior do T -plano em se mesmo por uma inversão, utilize o resultado justo obtido para finito $W(\infty)$, então transforme de novo para o original T . Isto produz os termos adicionais $cT^2 + dT$ por inversão de uma singularidade finita (3.25). Finalmente, diferenciando (3.27), conseguimos uma função real racional com denominador comum $\prod(T - T_k)$ (alguns fatores podem repetir-se). Factorizando o polinômio real do numerador em fatores lineares conseguimos (3.28). \square

Observação 3.3. Ainda que (3.27) parece complicado, todos os casos podem obter-se passando ao limite na fórmula geral $W = \sum h_k \ln(T - T_k)$. Oceanos pode considerar-se como um caso limite de dois jatos unindose, e correntes infinitas de três.

Observação 3.4. Só quando os T_k podem identificar-se com correntes infinitas, oceanos ou jatos, segum como o primeiro coeficiente não zero na correspondente expressão (3.25) é c , d ou h , assim os A_i e B_j têm simples interpretações físicas. Desde que $\varsigma = (dW/dT)/(dz/dT)$, e $dz/dT \neq 0$ no interior os zeros complexos A_i correspondem aos pontos do estagnação, onde $\varsigma = 0$. Num ponto divisor sobre a fronteira, onde o fluxo muda de direção, o W -diagram deve cobrir um ângulo 2π ao menos, de maneira que $dW/dT = 0$ (e ao inverso). Por tanto zeros reais B_j correspondem a pontos divisores (ou pontos do estagnação).

Observação 3.5. Casos, como jatos convergentes, onde o fluxo cover o exterior completo de algum suficientemente grande círculo, pode também tratar-se mediante uma ligeira modificação do teorema 3.4. O ponto $z = \infty$ deve ser então considerada como uma singularidade isolada interior T_∞ do fluxo. Desde que a correspondência $T \rightleftharpoons z$ é simples, podemos escrever $z = c/(T - T_\infty) + \dots$, e assim dz/dT tem um pólo de segundo ordem em $T = T_\infty$. Portanto, ς sendo limitado $dW/dt = \varsigma dz/dt$ tem no máximo um pólo de segundo ordem. Portanto dW/dT tem um pólo de segundo ordem em T_∞ e outro (por reflexão) em T_∞^* . Isto significa que (3.27) deve ser em geral suplementado por uma expressão da forma

$$d/(T - T_k) + d^*/(T - T_k^*) + h \ln(T - T_k) + h^* \ln(T - T_k^*) \quad (3.29)$$

Na forma multiplicativa (3.28) há um correspondente fator extra

$$(T - T_k)^2(T - T_k^*)^2 \quad \text{no denominador.}$$

3.4.3 Jatos convergentes

Considere agora o fluxo definido por dois jatos convergentes J_1, J_2 , ver [8], e dois jatos salientes J_3, J_4 (Fig. 3.6a). Denominaremos por α_k o ângulo do eixo x a J_k , e πh_k o índice de tempo de afluência de area de J_k . Por conservação de massa, claramente

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 0 \quad (3.30)$$

Assumimos que todas as quatro velocidades das linhas de corrente livres são iguais, o que é a única possibilidade se os jatos têm longitude infinita, com a condição que assumamos continuidade no infinito. Portanto a fronteira de um hodógrafo é um círculo. Por seleção apropriada da unidade, chega a ser o círculo unitário, de maneira que $|h_k\pi|$ é a largura do jato assintótico de J_k . Em realidade o hodógrafo é um simples círculo coberto como demonstraremos abaixo. Primeiro transformamos o fluxo sobre o círculo unidade Γ , e nota-

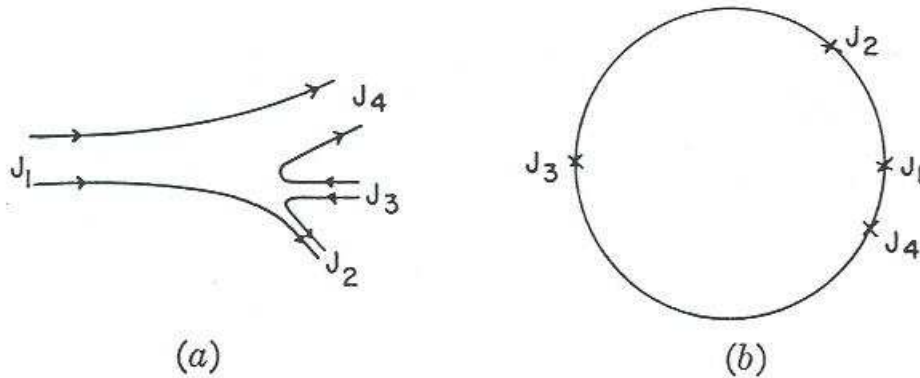


Figura 3.6: Fluxo sobre o círculo unidade

mos que o potencial complexo tem singularidades logarítmicas em J_1, J_2, J_3, J_4 ver (Fig. 3.6b), e é regular em outra parte porque a reflexão de Schwarz destas singularidades em Γ não produz novas singularidades. Assim nós escrevemos (ver corolário 3.3 do Teorema 3.3)

$$W = f(t) = \sum_{k=1}^4 h_k \ln(t - t_k), \quad t_k = e^{i\alpha_k} \quad (3.31)$$

Lema 3.3. *O hodograf é um círculo e podemos assumir $t = \zeta$ em (3.31)*

Demonstração. Por inspeção da figura 2a, $\arg \zeta$ muda por 2π ao redor da fronteira do fluxo. Desde que $\zeta(z)$ é limitada e analítica dentro do fluxo, a mudança é igual a $2\pi n_s$, onde n_s é o número dos pontos do estagnação interior (multiplicidade sendo contada) onde $\zeta = 0$. Portanto $n_s = 1$. Colocando o ponto do estagnação em $t = 0$, fazemos $\ln|\zeta/t|$ harmônico e limitado em Γ , e identicamente zero sobre a fronteira. Segue que desaparece identicamente, portanto $\zeta = e^{iy}t$; rodando, conseguimos $\zeta = t$ \square

Lema 3.4. *Nós temos a identidade*

$$\sum_{k=1}^4 \frac{h_k}{S_k} = 0 \quad o \quad \sum_{k=1}^4 C_k h_k = \sum_{k=1}^4 S_k h_k \quad (3.32)$$

onde $C_k = \cos \alpha_k$, $S_k = \sin \alpha_k$, e $\zeta_k = C_k + iS_k$

Demonstração. Fórmula (3.32) é equivalente à conservação do momento. Alternativamente, podemos demonstrá-lo analiticamente. Por (3.31), podemos escrever $z = \int \zeta^{-1} dW$ como

$$z = \sum_{k=1}^4 \frac{h_k}{S_k} \ln(\zeta - \zeta_k) - \sum_{k=1}^4 \frac{h_k}{S_k} \ln \zeta \quad (3.33)$$

Mas desde que $z(t) = z(\zeta)$ é único-avaliada perto de $\zeta = 0$, (3.32) segue \square

Se z_0 é o ponto de estagnação, temos que

$$z = z_0 + \sum_{k=1}^4 \frac{h_k}{S_k} \ln\left(1 - \frac{\zeta}{S_k}\right), \quad \left[\frac{1}{S_k} = C_k - iS_k\right] \quad (3.34)$$

Ao inverso, se (3.30) e (3.32) valem e se os jatos não se “recross”, então (3.34) define um fluxo admissível correspondente ao jato concorrente. Claramente z_0 é arbitrário.

Indeterminância. O eixo do jato J_k pode definir-se como a linha reta o qual é assintótica no infinito à curva dada em termos de um parâmetro real r por

$$z(rS_k) = \frac{h_k}{S_k} \ln(1 - r) + z_0 + \sum_{j \neq k} \frac{h_j}{S_j} \ln\left(1 - \frac{S_k}{S_j}\right) + o(1 - r) \quad (3.35)$$

A metade de linha é paralela a ζ_k^* (i.e., $\zeta_k^{-1} h_k$), de maneira que sua equação cartesiana é $S_k x + C_k y + m_k = 0$ onde m_k é o momento, ao redor de z_0 , do vetor unidade $\zeta_k^* = C_k - iS_k$, atuando ao longo de linha metade. Isto é

$$-S_k x - C_k y = -Im \zeta_k z,$$

onde $z = x + iy$ é qualquer ponto da linha metade. Portanto por (3.35) passando ao limite

$$m_k = -I \left\{ S_k z_0 + \sum_{j \neq k} h_j \frac{S_k}{S_j} \ln\left(1 - \frac{S_k}{S_j}\right) \right\} \quad (3.36)$$

Fisicamente, é natural supor que se os jatos ingressantes J_1, J_3 estão dados (i.e., que $h_1, h_3, \alpha_1, \alpha_3$ e as metades das linhas de J_1 e J_3 estão dados), então o fluxo resultante está determinado. Não obstante, pode mostrar-se que, contrariamente ao esperado, o fluxo resultante é efetivamente indeterminado, exceto no caso $\alpha_3 = \alpha_1 + \pi$ de jatos convergentes paralelos. Em verdade, exceto neste caso, (3.30), (3.32) e (3.36) com $k = 1, 3$ dá cinco equações entre as seis variáveis desconhecidas $h_2, h_4, \alpha_2, \alpha_4, x_0, e_0$ ($z_0 = x_0 + iy_0$). Estes têm uma família de soluções de um parâmetro o qual pode facilmente ser obtida graficamente.

3.5 Jatos bifurcados

3.5.1 Classificação geométrica de fluxos simples

É interessante fazer uma classificação topológica de singularidades em termos da configuração de linhas de corrente. Considere o incremento ao redor de um contorno B consistindo da

fronteira do fluxo com pequenos desvios ao redor de pontos do estagnação e divisores, na função multiplo-avaliada

$$n(z) = \frac{1}{\pi} \arg dW = \frac{1}{\pi} \arg \zeta + \arg dz \tag{3.37}$$

$$= \frac{1}{\pi} [\arg dW/dt + \arg dt] \tag{3.38}$$

para qualquer função não singular $t = f(z)$ do fluxo num auxiliar t -plano (e.g., sob um círculo ou hemi plano). Isto é um inteiro par ou ímpar de acordo que o fluxo é à esquerda ou direita. De fato, aumenta no infinito por um através de um jato (fonte ou sumidouro, ver

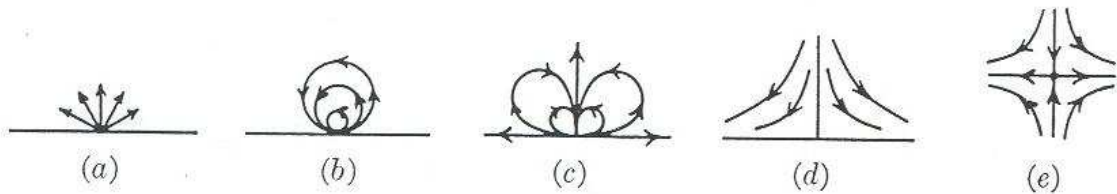


Figura 3.7: Fluxo num auxiliar t -plano

Fig. 3.7a), por dois através de um oceano (Fig. 3.7b), e por três ao redor de uma corrente infinita (Fig. 3.7c); estes fatos são fáceis de verificar analiticamente. Em um simples ponto divisor (Fig. 3.7d), $n(t)$ decresce por um.

Claramente, $\arg dz$ aumenta por 2π ao redor de B ("simplex" fluxo sendo simplesmente conexo), enquanto $\oint d(\arg \zeta) = 2n_s\pi$, onde n_s é o número de pontos do estagnação interiores (ver Fig. 3.7e), contanto multiplicidades. Portanto nós temos o seguinte resultado

$$n_0 + 2n_1 + 3n_2 = 2 + n_d + 2n_s, \tag{3.39}$$

onde n_0 é o número de jatos e tubos, n_1 de oceanos, n_2 de correntes infinitas, e n_d de pontos de divisão sobre a fronteira.

Observação 3.6. Observemos que os pontos de estagnação no infinito (tubos de stagnação) deve-se contar sobre ambos os lados de (3.39), isto é, como jatos, oceanos ou infinitas linhas de corrente ao lado esquerdo, e como pontos do estagnação estancados (pontos divisores) à direita. Por exemplo um jato de uma ranhura surge de um "stagnant ocean", e um deveria colocar em (3.39): $n_0 = 1, n_1 = 1, n_2 = 0, n_d = 1, n_s = 0$. As regras gerais em tais casos para substituir em (3.39) são complicados. Pontos interiores no infinito (seção 3.4.2 observação (3.5)) dá uma contribuição 4 ao lado esquerdo de (3.39); assim, com o fluxo de jato reentrance (ver [3]), (3.39) chega a ser $4 + 1 + 0 + 0 = 2 + 1 + 2$.

Com o anterior, temos esboçado uma demonstração de

Teorema 3.5. *A equação (3.39) é válida em qualquer fluxo simples, sempre que n_d e n_s são contados de acordo com sua multiplicidade*

Por exemplo, (Fig. 3.8) representa um ponto de estagnação interno duplo ($n_s = 2$).

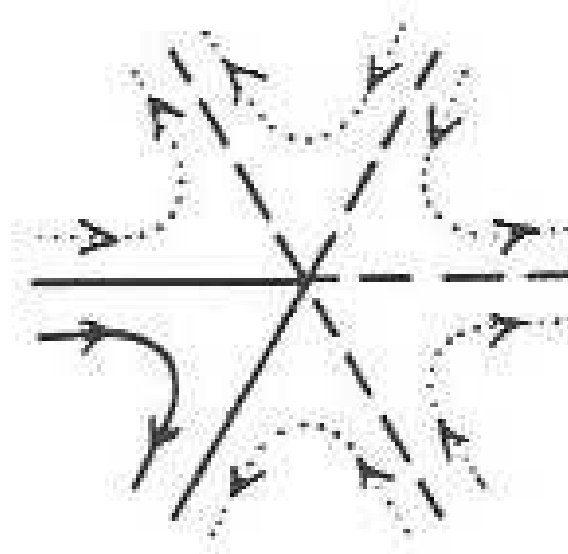


Figura 3.8: Ponto de estagnação interno duplo

A não ser que o plano seja coberto multiplamente no infinito, também sabemos que $2n_1 + n_2 \leq 2$.

3.5.2 Jatos bifurcados

O caso de um jato dividido por uma placa horizontal (Fig. 3.9a) pode tratar-se muito cuidadosamente refletindo suas singularidades, e usando os resultados topológicos anteriores.

Nós transformamos o fluxo sobre o semicírculo unidade Γ (Fig. 3.9b) no t -plano de modo que a correspondente semicircunferência corresponde às fronteiras livres, o diâmetro ao plano, e $t = 0$ no ponto divisor. Primeiro demonstramos a fórmula $\zeta = t$. Seguindo a notação anterior $n_0 = 3$, $n_1 = n_2 = 0$. Portanto, por (3.39) $n_d = 1$ e $n_s = 0$; isto é também intuitivamente óbvio. Segue que ζ/t é limitado em Γ , real sobre o diâmetro, e de módulo um sobre $|t| = 1$. Pelo princípio de reflexão ambos no diâmetro e em $|t| = 1$, vemos que ζ/t é limitado em todas partes. Por tanto pelo teorema de Liouville, ζ/t é uma constante. Desde que ζ/t é real sobre o diâmetro e de módulo um, temos que $\zeta = \pm t$. Com o jato entrante na metade do plano superior, como na Fig. 3.9a, claramente $\zeta = t$.

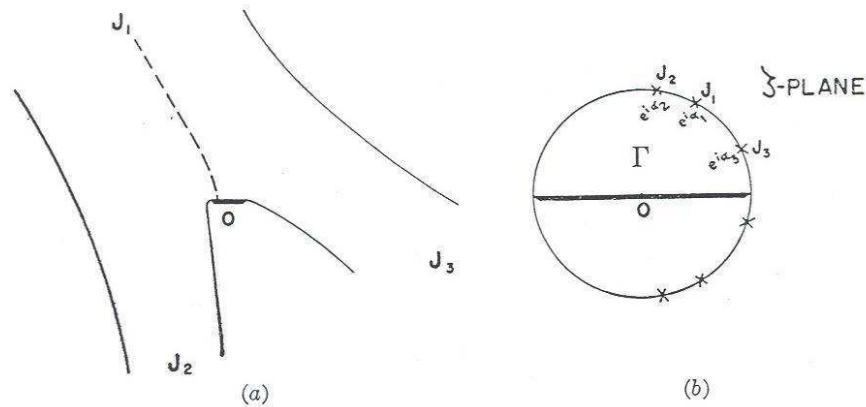


Figura 3.9: Jato dividido por uma placa horizontal

Agora consideremos $W(t) = W(\zeta)$ similarmente. A reflexão das singularidades no eixo real dá três singularidades logarítmicas conjugadas de igual força, em $e^{-i\alpha_1}$, $e^{-i\alpha_2}$, $e^{-i\alpha_3}$. Reflexão na parte circular de Γ não dá novas singularidades (ver Fig. 3.9b). Assim, obtemos que

$$W = \sum_{j=1}^3 h_j \ln(\zeta - e^{i\alpha_j})(\zeta - e^{-i\alpha_j}), \quad (3.40)$$

Portanto

$$z = \int \sum h_j \left[\frac{C_j - iS_j}{\zeta - e^{i\alpha_j}} + \frac{C_j + iS_j}{\zeta - e^{-i\alpha_j}} - \frac{2C_j}{\zeta} \right] d\zeta, \quad (3.41)$$

Mantendo z finito em $\zeta = 0$, claramente $\sum h_j C_j = 0$; isto também corresponde à conservação do momento da x -componente. Portanto

$$z = z_0 - \sum h_j \left\{ C_j \ln(\zeta^2 - 2C_j \zeta + 1) - iS_j \ln \frac{\zeta - e^{i\alpha_j}}{\zeta - e^{-i\alpha_j}} \right\} \quad (3.42)$$

Por outro lado, dado que $\sum h_j C_j = 0$ e (por conservação de massa)

$$\sum h_j = 0,$$

devemos ter

$$h_2 = \frac{C_3 - C_1}{C_2 - C_3}, \quad h_3 = \frac{C_1 - C_2}{C_2 - C_3} h_1 \quad (3.43)$$

Então, dado h_1 , α_1 , o jato dividido depende de dois parâmetros independentes, como também esperaríamos fisicamente.

Usando as leis de conservação de momento, podemos calcular a força Y e o torque M sobre

o placa, como

$$Y = \rho \sum_{j=1}^3 h_j S_j \quad (3.44)$$

$$M = \rho \sum_{i,j=1}^3 h_i h_j \left[S_i S_j \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_j \right) + \sin(\alpha_i + \alpha_j) \ln \sin \frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_j) \right]. \quad (3.45)$$

Sobre o placa, $\varsigma = v$ é real, junto com

$$i \ln \frac{\varsigma - e^{i\alpha_j}}{\varsigma - e^{-i\alpha_j}} = -2 \arctan \left[\frac{S_j}{(v - C_j)} \right] \quad (3.46)$$

Portanto, também é $z - z_0$. Para colocar a origem no ponto de estagnação, nós devemos pôr

$$z_0 = x_0 = -2 \sum_{j=1}^3 h_j S_j (\pi - \alpha_j) \quad (3.47)$$

se fazemos isto, conseguimos a seguinte expressão simétrica para x

$$x = - \sum_{j=1}^3 h_j F(\alpha_j; v), \quad (3.48)$$

onde

$$F(\alpha_j, v) = 2S_j(\pi - \alpha_j) + C_j \ln(v^2 - 2C_j v + 1) - 2S_j \arctan \left[\frac{S_j}{(v - C_j)} \right]. \quad (3.49)$$

Em particular os pontos finais $x(-1) = x_1$ e $x(1) = x_2$ do placa satisfazem as equações

$$x_2 = - \sum_{j=1}^3 h_j \left[S_j(\pi - \alpha_j) + 2C_j \ln \sin \frac{\alpha_j}{2} \right] \quad (3.50)$$

$$x_1 = - \sum_{j=1}^3 h_j \left[-S_j \alpha_j + 2C_j \ln \cos \frac{\alpha_j}{2} \right] \quad (3.51)$$

Enquanto ao longo da placa p satisfaz

$$p = - \sum_{j=1}^3 h_j \left[\pi S_j + 2C_j \ln \tan \frac{\alpha_j}{2} \right] \quad (3.52)$$

A equação das linhas de corrente $\varsigma = e^{i\phi}$ é

$$z = - \sum_{j=1}^3 h_j \left[S_j(\pi - \alpha_j) + C_j \ln |\cos \phi - C_j| + \frac{1}{2} S_j \ln \frac{1 - \cos(\phi + \alpha_j)}{1 - \cos(\phi - \alpha_j)} \right] + \text{const.} \quad (3.53)$$

3.6 Apêndice

3.6.1 Teorema da aplicação do Riemann

Desejamos definir uma relação de equivalência entre regiões em \mathbb{C} . Depois de fazer isto mostraremos que todas as regiões próprias simplesmente conexas em \mathbb{C} são equivalentes ao disco aberto $D = \{z : |z| < 1\}$ e portanto são equivalentes entre si.

Definição 3.3. *Uma região G_1 é conformalmente equivalente a G_2 se existe uma função analítica $f : G_1 \rightarrow \mathbb{C}$ tal que f é injetiva e $f(G_1) = G_2$. Claramente, isto é uma relação de equivalência.*

É imediato que \mathbb{C} não é equivalente a qualquer região limitada pelo teorema de Liouville. Também é fácil mostrar das definições que se G_1 é simplesmente conexa e G_1 é equivalente a G_2 então G_2 deve ser simplesmente conexa. Se f é o ramo principal da raiz quadrada então f é injetiva e mostra que $\mathbb{C} - \{z : z \leq 0\}$ é equivalente à hemiplano direito.

Teorema 3.6. *Seja G uma região simplesmente conexa o qual não é todo o plano complexo e seja $a \in G$. Então existe uma única função analítica $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ com as propriedades*

$$(a) \quad f(a) = 0 \text{ and } f'(a) > 0$$

$$(b) \quad f \text{ é injetiva}$$

$$(c) \quad f(G) = \{z : |z| < 1\}$$

Recordemos que uma função analítica não constante é aberta. Assim a função f proporcionada pelo teorema de Riemann é um homeomorfismo. Ainda mais, uma função analítica injetiva tem derivada diferente de zero e assim tem inversa analítica.

Recordemos também que uma função analítica com derivada diferente de zero preserva ângulos e sua orientação de maneira que f é conforme. Ao inverso uma função conforme diferenciável (preservando ângulos inclusive orientação) é analítica. Assim o teorema da aplicação do Riemann é a vezes chamada o teorema da aplicação conforme.

A demonstração que a função f é única é algo fácil. Efetivamente, se g também tem as propriedades de f em $D = \{z : |z| < 1\}$ então $f \circ g^{-1} : D \rightarrow D$ é analítica, injetiva e sobrejetiva. Também $f \circ g^{-1}(0) = f(a) = 0$ assim por uma consequência do lema de Schwarz temos que existe uma constante c com $|c| = 1$ e $f \circ g^{-1}(z) = cz$ para todo z . Mas então $f(z) = cg(z)$ mostra que $0 < f'(a) = cg'(a)$; dado que $g'(a) > 0$ segue que $c = 1$, ou $f = g$.

Para motivar a demonstração da existência de f , considere a família \mathcal{F} de todas as funções analíticas f tendo propriedades (a) e (b) e satisfazendo $|f(z)| < 1$ para $z \in G$. A idéia é escolher um elemento de \mathcal{F} tendo a propriedade (c). Suponhamos que $\{K_n\}$ é uma sequência de subconjuntos compactos de G tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = G$ e $a \in K_n$ para cada n . Então $\{f(K_n)\}$ é uma sequência de subconjuntos compactos de $D = \{z : |z| < 1\}$. Também, quando n cresce $f(K_n)$ cresce e enche o disco D . Escolhendo uma função f em \mathcal{F} com a maior derivada em a , escolhemos a função o qual “começa o mais rápido” em $z = a$. Assim tem a melhor possibilidade de finalizar primeiro; isto é, de ter $\bigcup_{n=1}^{\infty} f(K_n) = D$.

Antes de realizar esta demonstração, é necessário indicar que a única propriedade de uma região simplesmente conexa o qual usaremos é o fato que toda função analítica diferente de zero tem uma raiz quadrada analítica. Assim o teorema da aplicação do Riemann sera completamente demonstrado se demonstramos o seguinte

Lema 3.5. *Seja G uma região o qual não é todo o plano complexo e tal que toda função analítica diferente de zero sobre G tem uma raiz quadrada analítica. Se $a \in G$ então há uma função analítica f sobre G tal que:*

- (a) $f(a) = 0$ and $f'(a) > 0$;
- (b) f es injetiva;
- (c) $f(G) = D = \{z : |z| < 1\}$.

Demonstração. Definamos \mathcal{F} por

$$\mathcal{F} = \{f \in H(G) : f \text{ es injetiva}, f(a) = 0, f'(a) > 0, f(G) \subset D\} \quad (3.54)$$

Dado que $f(G) \subset D$, $\sup\{|f(z)| : z \in G\} \leq 1$ para $f \in \mathcal{F}$; pelo teorema de Montel \mathcal{F} é normal se não é vazio. De maneira que o primeiro fato a ser demonstrado é

$$\mathcal{F} \neq \emptyset \quad (3.55)$$

Também será mostrado que

$$\mathcal{F}^- = \mathcal{F} \cup \{0\} \quad (3.56)$$

Uma vez que estes fatos sejam conhecidos a demonstração pode completar-se. Suponhamos que (3.55) e (3.56) sejam verdadeiros e consideremos a função $f \rightarrow f'(a)$ de $H(G) \rightarrow \mathbb{C}$. Isto é uma função contínua e dado que \mathcal{F}^- é compacto, há um f em \mathcal{F} com $f'(a) \geq g'(a)$ para todo $g \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F} \neq \emptyset$, (3.56) implica que $f \in \mathcal{F}$. Resta mostrar que $f(G) = D$. Suponhamos que $w \in D$ tal que $w \notin f(G)$. Então a função

$$\frac{f(z) - w}{1 - f(z)\bar{w}} \quad (3.57)$$

é analítica em G e nunca zero. Por hipótese existe uma função analítica $h : G \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$[h(z)]^2 = \frac{f(z) - w}{1 - f(z)\bar{w}} \quad (3.58)$$

Dado que a transformação de Mobius

$$T\zeta = \frac{\zeta - w}{1 - \zeta\bar{w}} \quad (3.59)$$

aplica D sobre D , $h(G) \subset D$. Define $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \frac{|h'(a)|}{h'(a)} \frac{h(z) - h(a)}{1 - h(z)\bar{h}(a)} \quad (3.60)$$

Então $g(G) \subset D$, $g(a) = 0$ e g é injetiva. Também

$$g'(a) = \frac{|h'(a)| h'(a) [1 - |h(a)|^2]}{h'(a) [1 - |h(a)|^2]^2} \quad (3.61)$$

$$= \frac{|h'(a)|}{1 - |h(a)|^2} \quad (3.62)$$

Mas $|h(a)|^2 = |-w| = |w|$ e diferenciando (3.58) temos (desde que $f(a) = 0$) que

$$2h(a)h'(a) = f'(a)(1 - |w|^2) \quad (3.63)$$

Portanto

$$g'(a) = \frac{f'(a)(1 - |w|^2)}{2\sqrt{|w|}} \frac{1}{1 - |w|} \quad (3.64)$$

$$= f'(a) \left(\frac{1 + |w|}{2\sqrt{|w|}} \right) \quad (3.65)$$

$$> f'(a) \quad (3.66)$$

Depois temos que $g \in \mathcal{F}$ e isto contradiz a escolha de f . Assim temos que $f(G) = D$

Agora mostraremos (3.55) e (3.56). Dado que $G \neq \mathbb{C}$, seja $b \in \mathbb{C} - G$ e seja g uma função analítica sobre G tal que $[g(z)]^2 = z - b$. Se z_1 e z_2 são pontos em G e $g(z_1) = \pm g(z_2)$ então segue que $z_1 = z_2$. Em particular, g é injetiva. Pelo teorema da aplicação aberta existe um número $r > 0$ tal que

$$g(G) \supset B(g(a); r) \quad (3.67)$$

Assim se existe um ponto z em G tal que $g(z) \in B(-g(a); r)$ então $r > |g(z) + g(a)| = |-g(z) - g(a)|$. Segun (3.67) existe um w em G com $g(w) = -g(z)$; mas pelas notas que precedem (3.67) mostram que $w = z$ o qual dá $g(z) = 0$. Então $z - b = [g(z)]^2 = 0$ implica que $b \in G$ uma contradição. Por tanto

$$g(G) \cap \{\zeta : |\zeta + g(a)| < r\} = \emptyset. \quad (3.68)$$

Seja U o disco $\{\zeta : |\zeta + g(a)|\} = B(-g(a); r)$. Existe uma transformação de Mobius T tal que $T(\mathbb{C}_\infty - U^-) = D$. Seja $g_1 = T \circ g$; então g_1 é analítico e $g_1(G) \subset D$. Se $\alpha = g_1(a)$ então $g_2(z) = \varphi_\alpha \circ g_1(z)$ assim teremos que $g_2(G) \subset D$ e g_2 é analítico, mas também temos que $g_2(a) = 0$. Agora é fácil encontrar um número complexo c , $|c| = 1$, tal que $g_3(z) = cg_2(z)$ tem derivada positiva em $z = a$ e esta por tanto em \mathcal{F} . Isto demonstra (3.55).

Suponhamos que $\{f_n\}$ é uma sequência em \mathcal{F} e $f_n \rightarrow f$ em $H(G)$. Claramente $f(a) = 0$ e dado que $f'_n(a) \rightarrow f'(a)$ segue que

$$f'(a) \geq 0 \quad (3.69)$$

Seja z_1 um elemento arbitrário de G e coloquemos $\zeta = f(z_1)$; seja $\zeta_n = f_n(z_1)$. Por outro lado seja $z_2 \in G$, $z_1 \neq z_2$ e seja K um disco fechado centrado em z_2 tal que $z_1 \notin K$. Então $f_n(z) - \zeta_n$ nunca é zero sobre K dado que f_n é injetiva. Mas $f_n(z) - \zeta_n \rightarrow f(z) - \zeta$ uniformemente sobre K , assim pelo teorema de Hurwitz temos que $f(z) - \zeta$ nunca é zero sobre K o $f(z) \equiv \zeta$. Se

$f(z) \equiv \zeta$ sobre K então f é a função constante ζ em todo G ; dado que $f(a) = 0$ temos que $f(z) \equiv 0$. Caso contrário obtemos $f(z_2) \neq f(z_1)$ para $z_2 \neq z_1$; isto é f é injetiva. Mas se f é injetiva então f' nunca pode ser zero; assim (3.69) implica que $f'(a) > 0$ e f esta em \mathcal{F} . Isto demonstra (3.56) e a demonstração do teorema esta completa. \square

Bibliografia

- [1] Ahlfors, L. V.: *Complex analysis*. MacGraw-Hill, New York 1953.
- [2] Bieberbach, L.: *Lehrbuch der Funktionentheori*, vol.1. Leipzig, 1923.
- [3] Birkhoff, G., and Zarantonello, E. H.: *Jets, Wakes, and Cavities*. Academic, 1957.
- [4] Greenhill, G.: *Theory of a streamline past a plane barrier*, vol. 19. ARC RM, 1910.
- [5] Helmholtz, H.: *Über discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen*, vol.1. Wiss. Abh., 1882.
- [6] Kellogg, O.: *Foundations of potential theory*. Berlin, Springer, 1930.
- [7] Lamb, H.: *Hydrodynamics*, 6th ed. Cambridge Univ. Press., 1932.
- [8] Milne-Thomson, M. L.: *Theoretical hydrodynamics*, 1st ed. Macmillan, New York, 1950.
- [9] Mises, R.v.: *Berechnung von ausfluss-und uberfallzahlen*. Zeits. des Vere ines deutscher Ingenieure 61(1917), 447–498.
- [10] Nehari, Z.: *Conformal Mapping*. MacGraw-Hill, New York 1952.

Capítulo 4

Soluções analíticas explícitas para fluxos ideais

Fluxos compressíveis em fluidos ideais irrotacionais bidimensionais não-isotrópico ($p = p(\rho)$, $c^2 = dp/d\rho$).

$$\begin{aligned}\nabla(\rho \underline{u}) &= 0 \\ \nabla(\phi) &= \underline{u} \\ \frac{p}{g} + k + \frac{u^2}{2} &= cte. (Bernoulli)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Número de Mach $M = \frac{|\nabla\phi|^2}{c^2}$

$$\left(1 - \frac{\phi_x^2}{c^2}\right)\phi_{xx} + \left(1 - \frac{\phi_y^2}{c^2}\right)\phi_{yy} - 2\frac{\phi_x\phi_y}{c^2}\phi_{xy} = 0\tag{4.2}$$

Para a função de corrente ψ

$$\left(1 - \frac{\psi_y^2}{c^2\rho^2}\right)\psi_{xx} + \left(1 - \frac{\psi_x^2}{c^2\rho^2}\right)\psi_{yy} + 2\frac{\psi_x\psi_y}{c^2\rho^2}\psi_{xy} = 0\tag{4.3}$$

Lembre-se que $\partial\phi/\partial n = 0$ em corpos materiais tendo lado ψ satisfaz $\psi = cte$ em corpos materiais (primeiro problema de Neumann, segundo problema de Dirichlet).

Às vezes pode-se mais facilmente utilizar (4.1) que (4.2) ou (4.3).

Exemplo: Fluxo de Prandtl-Meyer (ver [20]) : fluxo supersônico em volta de uma esquina com $p = \rho^\gamma$. Considere um fluxo supersônico na região

$$(x, y) = (r, \theta), \quad -\delta < \theta < \pi.$$

O fluxo é uniforme no infinito paralelo ao eixo x .

Tentamos uma solução \underline{u} que depende somente sobre o ângulo θ e não sobre r e o mesmo

devera ser válido para ρ na equação de Bernoulli.

Ponha $\phi(r, \theta) = r\Phi(\theta)$ e calcule

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{r}\Phi(\theta) - \frac{y}{r}\Phi'(\theta) = \cos\theta\Phi(\theta) - \sin\theta\Phi'(\theta) \quad e \\ v &= \frac{y}{r}\Phi(\theta) + \frac{x}{r}\Phi'(\theta) = \sin\theta\Phi(\theta) + \cos\theta\Phi'(\theta) \end{aligned}$$

(4.1) tome a forma em coordenadas polares

$$-\sin\theta \frac{d}{d\theta}(\rho\Phi \cos\theta - \rho\Phi' \sin\theta) + \cos\theta \frac{d}{d\theta}(\rho\Phi \sin\theta + \rho\Phi' \cos\theta) = 0$$

ou

$$\begin{aligned} (\rho\Phi')' + \rho\Phi &= 0 \\ \rho &= \rho(\Phi^2 + \Phi'^2) \end{aligned}$$

e é possível reduzir a última equação a forma

$$(\Phi'' + \Phi)(1 - \frac{\Phi'^2}{c^2}) = 0 \quad e \quad \Phi = \theta \sin(\theta + \beta)$$

ou

$$\Phi'^2 = c^2 = \gamma - \frac{\gamma-1}{x} \underline{u}^2 = \gamma - \frac{\gamma-1}{2}(\Phi^2 + \Phi'^2)$$

que tem a solução:

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) &= |u|_{max} \sin\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\theta + \beta\right), \quad |u|_{max} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \\ \frac{\partial\phi}{\partial r} &= \Phi = \sqrt{\underline{u}^2 - \Phi^2} = \sqrt{\underline{u}^2 - c^2} = |u| \sqrt{1 - \frac{c^2}{|u|^2}} \\ \frac{\partial\phi}{\partial r} &= |u| \cos(\underline{r}, \underline{u}) \quad e \quad \sin(\underline{r}, \underline{u}) = \pm \frac{c}{q} \end{aligned}$$

Longe da fronteira $\phi_1 = u \circ x \equiv a \sin(\theta + \beta)$ e queremos ligar esta solução a solução $\phi_2 = r\Phi(\theta)$ do segundo tipo.

Se esta é possível na linha $\theta = \theta_0$, observe que

$$\phi_r = \Phi(\theta) \quad e \quad \frac{1}{r}\phi_\theta = \Phi'(\theta)$$

representa os componentes radial e angular da velocidade e

$$\begin{aligned} u_r &= u_0 \cos(\theta_0), \quad u_\theta = -u_0 \sin(\theta_0) \quad \text{primeiro fluxo} \\ u_r &= \Phi(\theta_0), \quad u_\theta = \Phi'(\theta_0) \quad \text{segundo fluxo} \\ \Phi'(\theta_0)^2 &= c^2 \end{aligned}$$

4.1. LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES NÃO LINEARES O MÉTODO DO HODÓGRAFO 77

Segue-se que

$$\begin{aligned}\sin(\theta_0) &= \frac{1}{u_0} \Phi(\theta_0) = \pm \frac{c(u_0)}{u_0} \quad e \\ u_0 \cos(\theta_0) &= |u|_{max} \sin\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\theta + \beta\right) \quad \text{dado } \beta\end{aligned}$$

Agora tentamos conectar esta solução continuamente com a seguinte solução

$$\phi_3 = u(x \cos \delta - y \sin \delta),$$

fluxo na forma paralela segunda parede na linha $\theta = \theta_1$. Então

$$\begin{aligned}\phi_2 &= |u|_{max} \sin\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\theta\right) \cos(\beta) + \cos\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\theta\right) \sin(\beta) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} &= u \cos(\delta), \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = -u \sin(\delta) \\ (\phi_2)_r &= \phi_1 \left(\frac{1}{r} \phi_2\right)_\theta = \Phi'(\theta_1) \\ u \cos(\delta) &= \Phi(\theta_1) \sin(\theta_1) + \Phi'(\theta_1) \cos(\theta_1) \\ -u \sin(\delta) &= \Phi(\theta_1) \cos(\theta_1) - \Phi'(\theta_1) \sin(\theta_1) \\ -\tan(\delta) &= \frac{\Phi(\theta_1) - \Phi'(\theta_1)t}{t\Phi(\theta_1) + \Phi'(\theta_1)}, \quad e \\ u^2 &= \Phi(\theta_1)^2 + \Phi'(\theta_1)^2.\end{aligned}$$

4.1 Linearização das equações não lineares o método do Hodógrafo

(A) A transformação de Legendre para o potencial de velocidade.

(B) A transformação de Chaplygin-Molenbroek (ver [4] e [21]) para a função corrente.

A) TRANSFORMAÇÃO DE LEGENDRE.

Em (A), considere a transformação de variáveis independentes

$$\begin{aligned}x \rightarrow u &= \phi_x \\ y \rightarrow v &= \phi_y \quad e \\ \phi \rightarrow \tilde{\phi} &= ux + vy - \phi \quad \text{na variável dependente.}\end{aligned}$$

Se

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \equiv \begin{bmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} \\ \phi_{xy} & \phi_{yy} \end{bmatrix} \neq 0$$

$$x = x(u, v), y = y(u, v).$$

Observe que

$$\begin{aligned} d\tilde{\phi} &= \tilde{\phi}_u du + \tilde{\phi}_v dv \\ &= xdu + ydv + udx + vdy - \phi_x dx - \phi_y dy \\ &= xdu + ydv \end{aligned}$$

ou $\tilde{\phi}_u = x, \tilde{\phi}_v = y$.

Agora de

$$\begin{aligned} du &= \phi_{xu} du + \phi_{xv} dv \\ dv &= \phi_{yu} du + \phi_{yv} dv \quad e \\ \tilde{\phi}_u &= x, \quad \tilde{\phi}_v = y \end{aligned}$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \phi_{xx}\tilde{\phi}_{uu} + \phi_{xy}\tilde{\phi}_{uv} &= 1 \\ \phi_{xy}\tilde{\phi}_{uu} + \phi_{xx}\tilde{\phi}_{uv} &= 0 \\ \phi_{xx}\tilde{\phi}_{uv} + \phi_{xy}\tilde{\phi}_{vv} &= 0 \\ \phi_{xy}\tilde{\phi}_{uv} + \phi_{xx}\tilde{\phi}_{vu} &= 1 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} \\ \phi_{xy} & \phi_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{uu} & \tilde{\phi}_{uv} \\ \tilde{\phi}_{vu} & \tilde{\phi}_{vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue-se que podemos transformar (4.2) a forma

$$(c^2 - u^2)\tilde{\phi}_{uv} + (c^2 - v^2)\tilde{\phi}_{uv} + 2uv\tilde{\phi}_{uu} = 0.$$

Pondo

$$q^2 = \underline{u}^2 = \sqrt{u^2 + v^2} \quad e \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$$

obtemos que

$$c^2 q^2 \tilde{\phi}_{qq} + q(c^2 - q^2)\tilde{\phi}_q + (c^2 - q^2)\tilde{\phi}_{\theta\theta} = 0$$

Tente soluções da forma

$$\tilde{\phi}_n(q, \theta) = A_n(q) \begin{cases} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{cases}$$

obtendo

$$c^2 q^2 A_n''(q) + q(c^2 - q^2)A_n'(q) - n^2(c^2 - q^2)A_n(q) = 0$$

No caso

$$\tilde{\phi}_0 = A_0(q), \quad c^2 q^2 A_0''(q) + q(c^2 - q^2)A_0'(q) = 0$$

4.1. LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES NÃO LINEARES O MÉTODO DO HODÓGRAFO 79

dando

$$x = \tilde{\phi}_u = A'_0(q)u/q, \quad y = \tilde{\phi}_v = A'_0(q)v/q \quad e \quad r^2 = x^2 + y^2 = A'_0(q)^2$$

Pela equação de Bernoulli

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}q^2 + \int \frac{dp}{\rho} &\neq \frac{1}{2}q^2 + c^2 \int \frac{d\rho}{\rho} = cte. \\ \frac{q dq}{c^2} &= -\frac{d\rho}{\rho} \\ \frac{d}{dq}(qA'_0) &= -\frac{q}{c^2}qA'_0 = -\frac{\rho'(q)}{\rho(q)}(qA'_0) \end{aligned}$$

e integrado.

$$\begin{aligned} q\rho A'_0 &= qr\rho = cte. \\ \frac{d}{dq} \tan r &= q \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{q^2} \right) \Rightarrow r \begin{cases} \downarrow q < c \\ \uparrow q > c \end{cases} \end{aligned}$$

Existe um valor mínimo r_0 para r e o fluxo é definido somente fora do círculo de raio r_0 no plano (x, y) .

B) PARA A FUNÇÃO DE CORRENTE ψ .

$$u = \phi_x = \frac{1}{\rho}\psi_y, \quad v = \phi_y = -\frac{1}{\rho}\psi_x$$

No plano físico ψ não satisfaz uma equação diferencial fixa. Mais precisamente, não podemos determinar a equação diferencial de segunda ordem satisfeita por ψ em um domínio do plano z , a menos que seja conhecido que, neste domínio, o fluxo é completamente subsônico ou completamente supersônico. Porém, se as componentes da velocidade ϕ_x e ϕ_y , ou algumas funções fixas das componentes da velocidade, são introduzidas como novas variáveis independentes, então ϕ e ψ se tornam soluções das equações diferenciais parciais lineares fixas.

Observe que

$$\begin{aligned} d\phi &= udx + vdy \\ \frac{d\psi}{\rho} &= -vdx + udy \\ dx &= \frac{u}{q^2}d\psi - \frac{v}{q^2\rho}d\psi \\ dy &= \frac{v}{q^2}d\psi + \frac{u}{q^2\rho}d\psi \end{aligned}$$

em termos de (q, θ)

$$\begin{aligned} dx &= \left(\frac{\cos \theta}{q} \phi_q - \frac{\sin \theta}{q\rho} \psi_q \right) dq + \left(\frac{\cos \theta}{q} \phi_\theta - \frac{\sin \theta}{q\rho} \psi_\theta \right) d\theta \\ dy &= \left(\frac{\sin \theta}{q} \phi_q - \frac{\cos \theta}{q\rho} \psi_q \right) dq + \left(\frac{\sin \theta}{q} \phi_\theta - \frac{\cos \theta}{q\rho} \psi_\theta \right) d\theta \\ d\phi + i \frac{d\psi}{\rho} &= (udx + vdy) + i(-vdx + udy) = (u - iv)(dx + idy) \\ &= qe^{-iz} dz, \quad z = x + iy \\ z_q &= e^{i\theta} \left(\frac{\phi_q}{q} + i \frac{\psi_q}{q\rho} \right), \quad z_\theta = e^{i\theta} \left(\frac{\phi_\theta}{q} + i \frac{\psi_\theta}{q\rho} \right) \end{aligned}$$

temos $z_{q\theta} = z_{\theta q}$ após cancelamentos e

$$\begin{aligned} -\frac{\psi_q}{q\rho} + i \frac{\phi_q}{q} &= -\frac{\phi_\theta}{q^2} + i \psi_\theta \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{q\rho} \right) \\ \phi_q &= -\frac{1 - M^2}{q\rho} \psi_\theta \\ \phi_\theta &= \frac{q}{\rho} \psi_q \end{aligned}$$

Introduzindo $q \rightarrow \lambda(q)$ obtemos

$$\begin{aligned} \lambda'(q) \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} &= -\frac{1 - M^2}{q\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= \frac{q}{\rho} \lambda'(q) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

Escolha

$$\lambda'(q)^2 = \frac{1 - M^2}{q^2}, \quad \lambda(q) = -\int_q^\sigma \sqrt{\frac{1 - M^2}{q^2}} dq \quad e \quad \sigma(\lambda) = \sqrt{\frac{1 - M^2}{\rho}}$$

O sistema de equações torna-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = -\sigma(\lambda) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \sigma(\lambda) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$$

Eliminando

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sigma(\lambda)} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\sigma(\lambda) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) = 0.$$

Ponha $\psi^* = \sqrt{\sigma} \psi$,

$$\psi = 0 \rightarrow \psi^* = 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^2} = f(\lambda) \psi^*,$$

4.1. LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES NÃO LINEARES O MÉTODO DO HODÓGRAFO81

sendo

$$f(\lambda) = \frac{\frac{d^2(\sqrt{\sigma})}{d\lambda^2}}{\sqrt{\sigma}}$$

A transformação $\lambda \rightarrow \lambda(q)$ é real somente se $M < 1$ (o caso subsônico).

No caso supersônico introduzimos $\lambda_1(q)$ por

$$\lambda_1(q)^2 = \frac{(M^2 - 1)}{q^2} \quad e \quad \sigma(\lambda_1) = \sqrt{\frac{(M^2 - 1)}{\rho}} \quad e \quad \psi_1^* = \sqrt{\sigma} \psi(\lambda_1, \theta)$$

Neste caso obtemos que

$$\frac{\partial^2 \psi_1^*}{\partial \lambda_1^2} - \frac{\partial^2 \psi_1^*}{\partial \theta^2} = f_1(\lambda_1) \psi_1^*,$$

sendo

$$f_1(\lambda_1) = \frac{\frac{d^2(\sqrt{\sigma_1})}{d\lambda_1^2}}{\sqrt{\sigma_1}}$$

Ponha $p = a\rho^\gamma$, $\gamma > 1$ e $c^2 = a\gamma\rho^{\gamma-1}$

$$\frac{q^2}{\sigma} + \frac{1}{\gamma - 1} c^2 = \frac{q_1^2}{c^2},$$

facendo $m = M^2$ temos

$$q^2 \left(\frac{\sigma}{\gamma - 1} + m \right) = q_1^2 m$$

$$\frac{dq}{dm} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{q^2}{q_1^2 m};$$

$$\lambda(q) = - \int_n^L \frac{\sqrt{1 - m}}{m(\sigma + (\gamma - 1)M)} dm$$

$$= \frac{1}{k\sigma} \tan^{-1}(k\sqrt{1 - m}) - \frac{1}{\sigma} \tan^{-1}(\sqrt{1 - m}), \quad k = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}$$

$$f(\lambda) = \frac{\gamma + 1}{16} m^2 (1 - m)^{-3} (16 - \psi(3 - 2\gamma)m - (3\gamma - 1)m^2).$$

Ponha

$$\sigma = \frac{q^2}{q_1^2}, \quad \rho = \rho_0 (1 - \sigma)^{1/\gamma-1} \quad e \quad \rho_0 = \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma q} q_1^2 \right)^{1/\gamma-1}$$

logo

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = A(\sigma) \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = B(\sigma) \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}$$

onde

$$A(\sigma) = \frac{2\sigma}{\rho_0}(1-\sigma)^{-1/\gamma-1} \quad B(\sigma) = \frac{2\rho_0\sigma(\gamma-1)(1-\sigma)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{(\gamma+1)\sigma - (\gamma-1)}$$

Eliminando ϕ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = B(\sigma) \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(A(\sigma) \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right)$$

A forma desta equação sugere a construção de soluções pelo método de separação de variáveis

$$\psi(\sigma, \theta) = \sigma^v F_v(\sigma) e^{2iv\theta}$$

e assim,

$$\sigma(1-\sigma)F_v''(\sigma) + \left[2v+1 - (2v - \frac{1}{\gamma-1} + 1)\sigma \right] F_v'(\sigma) + \frac{(2v+1)v}{\gamma-1} F_v(\sigma) = 0$$

o que um caso da equação diferencial hipergeométrica $F(a, b, c, \sigma)$. Assim

$$\sigma(1-\sigma)F'' + (c - (a+b+1)\sigma)F' - abF = 0$$

com

$$a+b = 2v - \frac{1}{\gamma-1} \quad ab = -\frac{(2v+1)v}{\gamma-1} \quad e \quad c = 2v+1.$$

Resolvido por

$$F(a, b, c, \sigma) = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)b(b+1)\dots(b+k-1)}{1.2\dots k.c(c+1)\dots(c+k-1)} \sigma^k$$

Temos

$$\psi(\sigma, \theta) = \sigma^v F(a_v, b_v, 2v+1, \sigma) e^{2iv\theta}$$

O grande problema com o método é: Qual é a região não variável (q, θ) ou (λ, θ) ou (σ, θ) em qual a equação diferencial é definida.

Mais fácil é a situação quando o fluxo ocorre em uma região cuja borda consiste de linhas retas (paredes) e linhas de corrente livres.

Nas paredes a direção do fluxo é constante, portanto $\theta = \text{constante}$. As linhas livres de corrente satisfazem a condição que a pressão é constante e pela equação de Bernoulli q é constante o que implica que λ é constante e por conseqüência que σ é constante.

Exemplo:

No caso de fluxo incompressível $(x, y) \rightarrow$ plano hodográfico é uma aplicação conforme é

$$\psi(u, v) = 2c \sin \left(\log \frac{\xi^{\pi/2\alpha}}{1 - \xi^{\pi/\alpha}} \right), \quad \xi = \frac{1}{q_0}(u - iv)$$

resolve o problema

$$\psi = -c \left\{ \frac{\pi}{\alpha} \theta + 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{q}{q_0} \right)^{n\pi/\alpha} \sin \left(\frac{n\pi\theta}{\alpha} \right) \right\}$$

Chaplygin observou que o problema correspondente para fluxo compressível adiabático é resolvido substituindo

$$q^{2\nu} \sin(2\nu\theta) \rightarrow c_\nu \sigma^\nu F(a_\nu, b_\nu, 2\nu + 1, \sigma) \sin(2\nu\theta), \quad e$$

$$\psi = -c \left\{ \frac{\pi}{\alpha} \theta + 2 \sum_1^\infty \frac{c_\nu}{n} \sigma^\nu F(a_\nu, b_\nu, 2\nu + 1, \sigma) \sin(2\nu\theta) \right\}$$

com $n = 2\nu\alpha/\pi$.

Para $\theta = \pm\alpha$, $\psi(\sigma, \pm\alpha) = \pm c\pi \quad \sin(2\nu\theta) = 0$ com

$$c_\nu = \sigma_0^\nu (F(a_\nu, b_\nu, 2\nu + 1, \sigma_0))^{-1}$$

$$\psi(\sigma_0, \theta) = -c \left\{ \frac{\pi}{\alpha} \theta + 2 \sum_1^\infty \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha} \theta\right) \right\} \quad \text{ou}$$

$$q = q_0$$

Podemos demonstrar convergência da série dado que $\sigma < \sigma_0$ no caso que σ_0 é subsônico.

4.2 Fluxos Transônicos

4.2.1 Apresentação e modelagem do problema

A construção de um modelo matemático

Podemos descrever o fluxo de um gás ao redor de um obstáculo com um certo grau de precisão pela teoria clássica de fluidos incompressíveis, contanto que as velocidades sejam suficientemente pequenas. Para valores mais altos da velocidade, deve ser levada em conta a compressibilidade. Experiências mostram, entretanto, que, desde que a velocidade do gás não exceda em nenhuma parte a velocidade do som, os efeitos da compressibilidade são somente quantitativos. Isto é completamente confirmado pela teoria matemática, como nós mostraremos em uma seção subsequente. Quando são alcançadas velocidades supersônicas, o caráter do fluxo pode mudar e choques podem aparecer. Somente nos preocupamos aqui com fluxos sem choque, e em particular, com a possibilidade de explicar o colapso do fluxo potencial sem choque dentro da estrutura que não considera a viscosidade.

Mais precisamente, no problema anterior, descreve-se o fluxo de potencial fixo em duas dimensões de um fluido compressível perfeito completamente ao redor de um determinado obstáculo, com a direção e a velocidade (subsônica) do fluido prescritas no infinito. É desnecessário dizer que os adjetivos “fixo”, “potencial”, “bidimensional” e “perfeito” implicam idealizações da realidade física. Uma vez que o modelo idealizado apresenta as características adequadas, porém, é objetivo do matemático obter tanta informação dele quanto possível. Vale ainda frisar que o matemático aplicado deve estar sempre atento ao fato de possuir apenas uma idealização da realidade.

Experiências mostram isso, pois, na maioria dos casos, não se pode avaliar o valor de um modelo idealizado a priori. Só depois que a matemática do modelo for explorada suficientemente, levando em conta as circunstâncias particulares, verificar-se-á se o modelo é uma descrição satisfatória da realidade física e em que casos que falha. O fracasso de um modelo idealizado pode ser descoberto de dois modos bastante diferentes. O modelo pode fornecer previsões incoerentes ou até mesmo contraditórias com os dados experimentais, ou o modelo pode se mostrar intrinsecamente incompatível. Esta inconsistência se manifestará, em geral, no fato de o problema em análise não ser bem posto. O termo “bem posto” é usado aqui no sentido técnico formulado por Hadamard. Um problema constituído de uma equação diferencial parcial com valores de contorno é dito bem posto se há uma solução, ela é única, e depende continuamente de determinados dados. Em todo caso concreto, a pessoa deve especificar em que classe de funções ela procura uma solução, e que significado preciso ela dá à exigência de dependência contínua dos dados.

Às vezes é discutido se provas de existência e unicidade é de interesse para o matemático aplicado “realista”, e, em muitos casos, ignorá-las não acarreta problemas. No problema em consideração, porém, muitas das dificuldades principais se originam precisamente em questões não resolvidas de existência e unicidade de soluções, e muitas investigações conduzidas ignoraram estas dificuldades, de forma que foram tiradas conclusões bastante errôneas.

Por outro lado, matemáticos puros às vezes têm dúvidas quanto à real contribuição da mecânica à matemática. Novamente, acreditamos que o problema em consideração pode servir como um contra exemplo. Os resultados positivos alcançados envolveram algumas técnicas muito refinadas e modernas de análise. As questões levantadas estimularam o interesse no campo praticamente inexplorado de equações diferenciais parciais do tipo misto.

Deveríamos dizer que o problema que relataremos está longe de ser resolvido completamente. Mas progresso significativo foi alcançado e uma gama de perguntas em aberto talvez sejam formuladas hoje com mais precisão do que eram um tempo atrás.

A formulação do problema

Nós nos preocuparemos com a equação diferencial parcial não linear

$$(\rho\phi_x)_x + (\rho\phi_y)_y = 0, \quad \text{onde} \quad (4.4)$$

$$\rho = \rho(q) \quad (q^2 = \phi_x^2 + \phi_y^2) \quad \text{é uma função dada} \quad (4.5)$$

Aqui, x, y são as coordenadas do plano de fluxo (plano físico), $\phi(x, y)$ é o potencial de velocidade, q a velocidade, e ρ a densidade. A relação entre densidade e velocidade (4.5) é obtida da lei de Bernoulli e da equação de estado. Se esta última é da forma

$$p\rho^{-\gamma} = \text{const.}$$

onde p é a pressão e $\gamma > 1$ a relação constante entre os calores específicos então a relação entre ρ e q é da forma

$$\rho = (1 - (\gamma - 1/2)q^2)^{1/(\gamma-1)} \quad (4.6)$$

contanto que as unidades sejam corretamente escolhidas. Neste caso, a velocidade c é determinada por

$$c^2 = \left(\frac{2}{\gamma - 1} \right) - \phi_x^2 - \phi_y^2$$

e a equação (4.4) pode ser escrita na forma

$$(c^2 - \phi_x^2)\phi_{xx} - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + (c^2 - \phi_y^2)\phi_{yy} = 0 \quad (4.7)$$

O discriminante desta equação é

$$c^4(1 - M^2) \quad \text{onde} \quad M = \frac{q}{c}$$

é denominado o numero de Mach local. A equação (4.7) é elíptica para fluxo subsônico ($M < 1$), quer dizer, contanto que a velocidade q não exceda a velocidade crítica

$$q_{cr} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}$$

Para fluxo supersônico ($M > 1$, $q > q_{cr}$) a equação é hiperbólica. Para a maioria das considerações a seguir, a forma precisa da relação entre densidade e velocidade é de pouca importância. Alguns autores preferem usar uma relação entre p e q ligeiramente diferente para facilitar cálculos computacionais. Enquanto as características essenciais da relação (4.6) são preservadas, não pode haver objeções a este procedimento. De fato, ele pode ser justificado rigorosamente para fluxos puramente subsônicos.

No caso de uma relação geral entre densidade e velocidade, o fluxo é subsônico ou supersônico conforme a derivada

$$\frac{d[q\rho(q)]}{dq}$$

é positiva ou negativa. Estudando fluxos puramente subsônicos, as vezes é conveniente substituir (4.6) por uma relação entre densidade e velocidade que conduza a uma equação diferencial permanentemente elíptica e não imponha nenhuma restrição ao valor de q . Assim, Chaplygin [4] propôs a relação entre p e q da forma abaixo

$$\rho^2(1 - q^2) = 1$$

Isto transforma (4.4) na equação clássica de superfícies mínimas, que pode ser investigada pelas ferramentas da teoria de funções complexas. Como observação, note que esta aproximação de Chaplygin foi extensivamente utilizada em problemas de aerodinâmica. Outro dispositivo consiste em substituir (4.6) pela relação (4.5), que coincide com (4.6) para valores de q em um intervalo

$$0 \leq q \leq q_{cr} - \epsilon$$

onde ϵ é um número fixo arbitrariamente pequeno, e colocando (4.4) na equação de Euler-Lagrange para um problema variacional regular. Esta “regularização” da equação tem uma vantagem importante: uma solução da equação regularizada para qual

$$\phi_x^2 + \phi_y^2 < (q_{cr} - \epsilon)^2$$

é ao mesmo tempo uma solução da “equação exata” (4.7).

Seja P uma curva fechada simples no plano z ($z = x + iy$). Assumimos que P tem uma tangente variando continuamente e uma curvatura mudando continuamente, exceto talvez em um ponto, a extremidade, que pode apresentar um canto ou uma cúspide.

Uma solução de (4.4) definida no domínio exterior P e tendo derivadas ϕ_x, ϕ_y com valor único representa um fluxo passando por P , se as derivadas forem contínuas em P e satisfizerem a condição

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

onde $\partial/\partial n$ denota a diferenciação na direção normal. Além disso, exigimos que

- (i) as derivadas devem ser Hölder-contínuas em P ,
- (ii) as derivadas devem desaparecer na extremidade, exceto se z_T é o vértice de um canto ou cúspide (Condição de Kutta-Joukowski) e que
- (iii) $\phi_x \rightarrow q_\infty, \phi_y \rightarrow 0$ como $z \rightarrow \infty$ onde $0 < q_\infty < q_{cr}$ é um dado número.

Não requeremos que seja univocamente avaliada e não prescrevemos o valor da circulação

$$\Gamma = \oint_P d\phi$$

Uma função que satisfizer estas condições será chamada solução do Problema $\Pi(P, q_\infty)$, ou um fluxo passando por P com velocidade de fluxo livre q_∞ . Para toda solução, fixamos

$$q_{max} = \max \sqrt{(\phi_x^2 + \phi_y^2)}$$

O fluxo é chamado subsônico se $q_{max} < q_{cr}$, transônico se $q_{max} > q_{cr}$.

4.2.2 Soluções para o Problema

Soluções aproximadas

O problema de valores de contorno formulado acima apresenta três dificuldades: A equação é não linear. O valor da circulação será determinado a partir da condição de Kutta-Joukowski. Finalmente, e esta é a barreira mais séria, a equação é de tipo misto.

Normalmente confrontado com um problema deste tipo o matemático aplicado recorre a um dos três métodos tradicionais para o tratamento de problemas aparentemente intratáveis: perturbação de soluções conhecidas, diferenças finitas e a construção de exemplos típicos.

Todos os três métodos foram aplicados ao Problema Π com aparente sucesso prático. A solução do Problema Π é bem conhecida no caso limite, quando $q_\infty = 0$ caso em que o problema se reduz à determinação de um fluxo incompressível passando por P . O método de perturbação aplicado a esta solução consiste em assumir como solução uma expansão da forma

$$\phi(x, y) = \phi_0(x, y) + \tau\phi_1(x, y) + \tau^2\phi_2(x, y) + \dots \quad (4.8)$$

Aqui, ϕ_0 é a solução do problema incompressível e τ um parâmetro que caracteriza a magnitude de q_∞ , ou, mais especificamente, o quadrado do número de Mach do fluxo livre. Os coeficientes $\phi_i(x, y)$ podem ser determinados sucessivamente resolvendo problemas de valores de contorno elípticos lineares. Este método, conhecido como o método de Rayleigh-Janzen, foi assunto de inumeráveis artigos. Enquanto só alguns termos de (4.8) foram computados em casos práticos, acredita-se que, em geral, o método não converge para valores de τ que conduziram a fluxos transônicos. Se há problemas de convergência até mesmo para valores menores de τ , é ainda uma questão aberta. Frankl e Keldysh [7] provaram, entretanto, que o método converge para valores suficientemente pequenos de τ . A magnitude de “suficientemente pequeno” é dependente, evidentemente, de cada problema particular tratado.

Outra “solução” conhecida de Π é o fluxo uniforme que corresponde ao caso quando P se degenera em um segmento reto. O método de perturbação aplicado a esta solução leva-nos a assumir uma expansão da forma (4.8), onde ϕ_0 é uma constante multiplicada por x , e τ denota o parâmetro que caracteriza o desvio do fluxo do caso uniforme, isto é, uma clara dependência da geometria do obstáculo (o primeiro termo da expansão (4.8) é conhecido como a aproximação de Prandtl-Glauert). Apesar de não haver provas de convergência para este método, simulações numéricas não indicaram qualquer dificuldade e vários autores produziram padrões de fluxos passando por obstáculos delgados e ao longo de paredes ligeiramente curvas que exibem regiões supersônicas relativamente grandes, mas limitadas, em meio a um fluxo predominantemente subsônico.

Fluxos deste caráter também foram obtidos por Taylor [2] no caso de um bico simétrico. Taylor assumiu para ϕ uma expansão em séries de potências de (x, y) da qual foram utilizados só alguns termos nas computações.

O método de diferenças finitas consiste, como é bem conhecido, da substituição das derivadas parciais da equação diferencial pelos quocientes de diferença correspondentes, e da posterior resolução do sistema de equações algébricas resultantes para um número finito de variáveis. No caso da equação (4.4), obtém-se um sistema de equações algébricas não lineares. Aparentemente, ninguém investigou se este sistema tem soluções, e se estas soluções, se existem, são aproximações adequadas das da equação diferencial. Porém, se a equação diferencial é resolvida numericamente pelo assim denominado “Método de Relaxamento”, não há, em geral, grandes distorções em relação aos resultados esperados. Também por este método, foram obtidos padrões de fluxo com regiões supersônicas limitadas, por exemplo, por Emmons [5].

Soluções rigorosas: A linha limite

A utilidade de métodos indiretos para obtenção de soluções em Matemática Aplicada foi mostrada nas mais diversas situações. Se um problema de valores de contorno não pode ser resolvido rigorosamente ou de forma suficientemente explícita para uma determinada geometria (e poucos problemas o são), tenta-se achar soluções para formas que são determinadas a posteriori, na esperança de que estas soluções sejam típicas. No caso de um problema bem posto, exemplos simples de soluções fornecem informações confiáveis sobre a estrutura da solução. A dificuldade é que exemplos de soluções rigorosas nunca podem ser usados para demonstrar que o problema é bem posto.

No caso do problema II, a construção de um único exemplo já apresenta dificuldades consideráveis, que podem, felizmente, ser superadas de diferentes modos. Nós discutiremos somente os métodos que estão diretamente relacionados ao trabalho pioneiro de Chaplygin [4]. O método de Bergman é descrito completamente no artigo [2], de sua autoria. Aparentemente, nunca foi aplicado a fluxos transônicos. Outro método, proposto independentemente por Christianovitch e por Bers [1] é limitado, em princípio, para fluxos puramente subsônicos. Todos estes métodos para construir soluções estão baseados na transformação hodográfica.

A equação (4.8) implica a existência de uma função de corrente $\psi(x, y)$ tal que

$$\rho\phi_x = \psi_y, \quad \rho\phi_y = -\psi_x \quad (4.9)$$

No plano físico, ψ não satisfaz uma equação diferencial fixa. Mais precisamente, não podemos determinar a equação diferencial de segunda ordem satisfeita por ψ em um domínio contido no plano z , a menos que seja conhecido que, neste domínio, o fluxo é completamente subsônico ou completamente supersônico. Porém, se as componentes da velocidade ϕ_x e ϕ_y ou algumas funções fixas das componentes de velocidade, são introduzidas como novas variáveis independentes, então ϕ e ψ se tornam soluções de equações diferenciais parciais lineares fixas.

É habitual realizar esta transformação, a transformação hodográfica, introduzindo como variáveis independentes a inclinação do vetor velocidade,

$$\theta = \arctan(\phi_y/\phi_x)$$

e uma função fixa da velocidade:

$$\sigma = \int_q^{q_{cr}} \frac{\rho dq}{q} \quad (4.10)$$

Como função de (θ, σ) , a função de corrente satisfaz a equação de Chaplygin

$$K(\sigma)\psi_{\theta\theta} + \psi_{\sigma\sigma} = 0 \quad (4.11)$$

onde

$$K(\sigma) = \frac{1 - M^2}{\rho^2} \quad (4.12)$$

Note que

$$\begin{aligned}\sigma &\rightarrow +\infty && \text{para } q \rightarrow 0, \\ \sigma &= 0 && \text{para } q = q_{cr}, \\ K(0) &= 0, && K'(\sigma) > 0\end{aligned}\tag{4.13}$$

A equação de Chaplygin é, portanto, elíptica no semiplano subsônico, ou seja, com $\sigma > 0$, e hiperbólica no semiplano supersônico, com $\sigma < 0$.

Agora, considere ψ uma solução de (4.11) definida em um Δ do σ , plano- θ , e defina

$$x + iy = \int \frac{e^{i\theta}}{q} \left\{ \left(\psi_\sigma + \frac{i}{\rho} \psi_\theta \right) d\theta + \left(-K\psi_\theta + \frac{i}{\rho} \psi_\sigma \right) d\theta \right\}$$

Se esta correspondência leva Δ a um domínio simplesmente coberto do plano z , então ψ é, neste domínio, a função de corrente de um fluxo potencial compressível, enquanto que o potencial de velocidade satisfaz (4.9).

A transformação do plano hodográfico para o plano físico é certamente impossível, se existe um arco Γ em Δ ao longo do qual

$$x_\theta y_\sigma - x_\sigma y_\theta = 0\tag{4.14}$$

Isto nunca ocorrerá no semiplano subsônico, mas é bem possível que ocorra na região supersônica. A imagem C de Γ no plano físico é uma fronteira natural do fluxo, local onde as linhas de corrente formam cúspides. Por isso, C e Γ são chamados de linhas limite (o exemplo mais simples de uma linha limite é fornecido pelo fluxo familiar com linhas de corrente radiais).

Há várias maneiras de construir sistemas completos de soluções particulares de (4.11). O sistema mais útil parece ser o usado por Chaplygin, consistindo das funções

$$\theta, \quad f_\alpha(\sigma), \quad f_\alpha(\sigma) \sin \alpha\theta\tag{4.15}$$

onde f_α são soluções das equações diferenciais ordinárias apropriadas. Estas soluções correspondem às funções harmônicas

$$\theta, \quad q^\alpha(\sigma) \cos \alpha\theta, \quad q^\alpha(\sigma) \sin \alpha\theta\tag{4.16}$$

das variáveis $q \cos \theta$, $q \sin \theta$. A questão importante é encontrar uma combinação das soluções (4.15) que, quando transferida para o plano físico, origina um fluxo com as propriedades desejadas, isto é, um fluxo de comportamento semelhante ao de um fluxo incompressível. A técnica de Chaplygin para fazer esta escolha consiste basicamente em expressar a função de corrente $\tilde{\psi}$ do fluxo incompressível dado, que é uma função harmônica de

$$(q \cos \theta, q \sin \theta)$$

como uma série de soluções (4.16), e então formar com os mesmos coeficientes uma série de soluções correspondentes (4.15). Esta técnica apresenta bons resultados para exemplos

como o de um jato fluindo de um recipiente formado por duas paredes paralelas e um fluxo em esteira passando por um segmento reto. Mas, se $\tilde{\psi}$ é escolhida como a função de corrente de um fluxo incompressível passando por um anteparo, a série formada pela prescrição de Chaplygin só pode representar a solução desejada em uma parte do domínio. Torna-se necessário recorrer à sua complementação analítica, e ocorre que uma solução com as propriedades desejadas pode ser obtida com pequenas modificações na receita simples desenvolvida por Chaplygin. Para uma análise aprofundada dos métodos engenhosos através dos quais essas modificações são realizadas, consultar Lighthill [13], Goldstein, Lighthill e Craggs [10]. Aqui, utilizaremos apenas o resultado final.

É possível achar uma família de soluções $\psi(\theta, \sigma; t)$ da equação de Chaplygin que depende de um parâmetro t , $0 < t < t^*$ e tendo as seguintes propriedades:

- (i) Para cada t no intervalo, $\psi(t)$ é uma solução de (4.11) definida em um domínio Q que depende de t . No contorno de Ω , a solução $\psi(t)$ e suas derivadas parciais de ordem 2 com respeito a θ, σ são funções contínuas de t .
- (ii) Existe um t_1 , $0 < t_1 < t^*$, tal que, para cada t , $0 < t < t_1$ a solução $\psi(t)$, quando transferida do plano físico representa o potencial de um gás fluindo ao redor de um anteparo $P(t)$, isto é, cuja forma depende de t . A velocidade deste fluxo no infinito, $q_\infty(t)$, é subsônica e função monótona de t . Em outras palavras: para $0 < t < t_1$, $\psi(t)$ é, no plano físico, uma solução de $\Pi(P(t), q_\infty(t))$. Para $t \rightarrow 0$, o fluxo se aproxima de um fluxo incompressível ao redor de um determinado anteparo $P(0)$.
- (iii) Existe um t_2 , $0 < t_2 < t_1$ tal que para $t < t_2$ o fluxo representado por $\psi(t)$ é puramente subsônico, enquanto que, para $t_2 < t < t_1$ este fluxo é transônico, com regiões supersônicas limitadas.
- (iv) Para $t < t_1$ a solução $\psi(t)$ não pode ser transferida para o plano físico devido ao surgimento de linhas limite.

Observamos que, em todos os casos citados, a dependência de $\psi(t)$ em t é analítica.

Assim, os resultados derivados pelo método hodográfico parecem confirmar os resultados obtidos pelos métodos não rigorosos descritos na seção precedente.

É natural assumir que os fluxos computados são exemplos típicos e o fluxo transônico obtido, com regiões supersônicas suficientemente pequenas, é possível para anteparos arbitrários. Na realidade, vários especialistas em aerodinâmica concluíram que, para um determinado obstáculo fixo, sempre existe uma família de fluxos que satisfazem as propriedades (i)-(iv), e que o colapso final de um fluxo potencial transônico é causado pelo aparecimento de linhas limite no plano hodográfico.

Porém, mostrou-se que a hipótese atraente e elegante das linhas limite era intrinsicamente falsa. Em 1948, Friedrichs provou que uma família de soluções da equação de Chaplygin que satisfazem as propriedades (iv) e para um obstáculo fixo P não podem obedecer à propriedade (iv). O mesmo é verdade se $P(t)$ não é constante, mas tem uma curvatura limitada. Um resultado parcial nesta direção foi previamente obtido por Nikolski e Taganov [15]. A prova de Friedrichs era bastante complicada, fazendo uso de um lema algébrico provado por

Flanders e da suposição de que ψ é uma função analítica de (σ, θ) . Posteriormente, Kolodner e Cathleen Morawetz [12], usando uma transformação de variáveis, deram uma prova bastante sucinta do resultado de Friedrichs, sem precisar assumir a analiticidade da função. Assim, a hipótese de linha limite pode ser considerada como definitivamente refutada.

Uma vez reconhecido que as soluções obtidas pela aplicação do método hodográfico não são típicas, pelo menos quanto ao colapso do fluxo potencial, é natural verificar se elas não são peculiares também em outros sentidos. Realmente, de maneira totalmente independente das considerações sobre linha limite, vários autores começaram a expressar dúvidas quanto à exatidão do problema de valores de contorno para fluxos transônicos. O ponto de partida nesta direção “crítica” se deu em 1930, com o artigo publicado por Taylor [2]. Taylor aplicou o método de perturbação ao fluxo circulatório puramente transônico ao redor de um círculo, com velocidade nula no infinito. Ele mostrou, de maneira não muito rigorosa, mas com o auxílio da técnica padrão de pequenas perturbações que o problema de valores de contorno não é bem posto para uma leve mudança da forma circular. Depois, Nikolsky e Taganov [15] descobriram, a partir de considerações geométricas bastante simples, que, em um fluxo transônico suave que contém uma região supersônica limitada por uma parede fixa e por uma linha sobre a qual $M = 1$, uma desigualdade definida que relaciona a taxa de variação de q com a curvatura do anteparo. Em particular, um fluxo deste tipo é matematicamente impossível se o seu anteparo contiver um segmento reto arbitrariamente pequeno. Cathleen Morawetz, por sua vez, mostrou que a condição de segmento reto pode ser substituída pela exigência de que a curvatura do anteparo desapareça em algum ponto. Os argumentos mais gerais contra a possibilidade de resolver um problema de valores de contorno transônicos no caso geral, porém, foram formulados por Frankl [7], Busemann [3] e Guderley [11].

Teorema de existência e unicidade para fluxos subsônicos

Um exame crítico do problema de valores de contorno Π tem que ser iniciado pelo caso mais simples, o de um fluxo puramente subsônico. Felizmente neste caso uma resposta completa está disponível.

Teorema 4.1 (Teorema de existência e unicidade). *Para um determinado anteparo P , existe um número $\hat{q} \leq q_{cr}$ tal que para todo valor de q_∞ , $0 < q_\infty < \hat{q}$, o problema de valores de contorno $\Pi(P, q_\infty)$ tem uma única solução $\phi = \phi^{(q_\infty)}(x, y)$. Esta solução $q_{max} \leq q_{cr}$ e as derivadas ϕ_x, ϕ_y são funções contínuas de q_∞ . Como q_∞ varia no intervalo $0 < q_\infty < \hat{q}$, q_{max} assume todos os valores no intervalo $0 < q_\infty < \hat{q}$. (Já que $q_\infty \rightarrow 0$, $\phi^{(q_\infty)}$ converge para zero e $\phi^{(q_\infty)}/q_\infty$ converge ao potencial $\phi^{(0)}$ de um fluxo incompressível passando por P).*

O primeiro passo para a prova deste teorema foi dado por Frankl e Keldysh, que provaram a solvência de Π para valores suficientemente pequenos de q_∞ . Isto ainda não estabeleceu a existência de soluções para problemas com valores subsônicos arbitrariamente de velocidade máxima local. Bers provou a existência de tal fluxo para o caso especial da equação de superfícies mínimas, considerando uma modificação do problema Π , em que q_∞ é dado, ao invés de q_∞ . Por um método completamente diferente Shiffman [17] tratou com uma forma modificada de problema Π , assumindo o anteparo suave e prescrevendo o valor da circulação.

Finalmente, Bers estendeu o método usado para o caso de superfícies mínimas para obter o teorema enunciado acima.

As provas de existência são demasiadamente técnicas para serem descritas aqui. A prova de Schiffman [17] faz uso dos métodos diretos do cálculo de variação. Ele começa observando que é suficiente provar o teorema correspondente para a equação regularizada ver seção (4.2.2) para o qual,

$$\widehat{q} = \widehat{q}_{cr} = \infty.$$

A existência de uma “solução” segue de teoremas gerais do cálculo de variações, se a pessoa permite que a solução resida em um classe suficientemente vasta de funções. Portanto, a dificuldade é transferida para a demonstração de que a solução generalizada satisfaz as exigências de suavidade, que as derivadas parciais são contínuas na fronteira, e que elas dependem continuamente de q_∞ . Schiffman supera estas dificuldades por um método muito engenhoso, que também é aplicável a outros problemas.

Esta prova (que também funciona com a equação regularizada) é moldada segundo o método da aplicação conforme para solução de problemas de fluxo incompressível. Assumimos que a solução ϕ é conhecida. Então, pode-se associar o domínio exterior a P em um domínio $|\xi| > 1$ em um plano- ξ auxiliar, em conformidade com a métrica de Riemann.

$$(c^2 - \phi_y^2)dx^2 + 2\phi_x\phi_y dx dy + (c^2 - \phi_x^2)dy^2 \tag{4.17}$$

definida pelas soluções. Mostra-se que a solução pode ser reconstruída uma vez que se conhece a função f , uma função de uma variável que faz a correspondência entre pontos de $|\xi| = 1$ e os de P . Na realidade, a solução ϕ pode ser obtida de f por dois modos diferentes. Isto conduz a uma equação funcional não-linear para f que possui uma solução, fato que pode ser demonstrado por meio do método de Schauder-Leray. O passo mais importante da prova envolve a descoberta de limites a priori para f . Aqui, a teoria de aplicações quase conformes e a teoria de funções pseudo-analíticas têm um papel decisivo.

Nesta prova, a dependência contínua da solução em q_∞ sai quase que automaticamente. Também é fácil concluir que a solução depende continuamente da geometria do anteparo e da relação entre velocidade e densidade.

Uma pergunta aberta importante é a seguinte: q_{max} é uma função monótona de q_∞ ? Podemos responder esta pergunta afirmativamente sob a suposição de que P é simétrico com respeito ao eixo x .

É natural conjecturar que

$$\widehat{q} \leq q_{cr} \tag{4.18}$$

mas a prova não é óbvia. Porém, uma prova foi determinada por Schiffmann. Uma vez que a desigualdade (4.18) é estabelecida, não é difícil mostrar que, como $q_\infty \rightarrow \widehat{q}$, $\phi^{(q_\infty)}$ aproxima uma solução de (4.9) definida no domínio exterior a P . A continuidade das derivadas dessas funções não foi, ainda, demonstrada, de forma que a existência de um fluxo crítico (fluxo com $q_{max} = q_{cr}$) passando por um anteparo dado permanece uma questão em aberto.

As condições da suavidade no anteparo assumidas na seção (4.2.2) podem ser relaxadas sem prejudicar a validade da prova de existência. Por exemplo, pode-se aceitar que ele apresente cantos.

A diferença entre os problemas de valores de contorno subsônicos e transônicos podem ser explicadas melhor a partir da discussão que acompanha a prova da unicidade.

Seja $\phi(x, y)$ uma determinada solução subsônica de $\Pi(P, q_\infty)$, e seja $\tilde{\phi}(x, y)$ uma segunda solução, que sabemos ser subsônica ou possuir derivadas contínuas na fronteira. Nós temos que mostrar que a função

$$w(x, y) = \phi(x, y) - \tilde{\phi}(x, y) \quad (4.19)$$

é constante. Mas, w satisfaz a equação linear

$$(c^2 - \phi_y^2)w_{xx} + 2\phi_x\phi_y w_{xy} + (c^2 - \phi_x^2)w_{yy} + Aw_x + Bw_y = 0 \quad (4.20)$$

onde c é a velocidade do som determinada pela solução ϕ , onde A, B são certas funções de (x, y) . Além disso,

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{em } P, \quad w_x^2 + w_y^2 = 0 \quad \text{em } z_T, \quad (4.21)$$

e

$$w_x^2 + w_y^2 \rightarrow 0 \quad \text{quando } z \rightarrow \infty. \quad (4.22)$$

(Assumimos, por simplicidade, que z não é uma cúspide). O domínio exterior a P é mapeado em $|\xi| > 1$ por uma transformação conforme com respeito a métrica (4.17), tomando $z \rightarrow \infty$ em $\xi = \infty$, e $z = z_r$ em $\xi = 1$. no plano- ξ , w satisfaz a equação

$$w_{\zeta\zeta} + w_{\eta\eta} + \alpha(\zeta, \eta) + \beta(\zeta, \eta) = 0. \quad (4.23)$$

onde $\xi = \zeta + i\eta$, e as condições de fronteira são

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em } |\xi| = 1, \quad w_\zeta - iw_\eta = 0 \quad \text{em } z = z_r, \quad z = \infty. \quad (4.24)$$

A função $W = w_\zeta - iw_\eta$ satisfaz a equação

$$W_\zeta + iW_\eta = -\frac{1}{2}(\alpha - i\beta)W - \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)\overline{W} \quad (4.25)$$

e por isso é uma função pseudo-analítica. Do princípio de semelhança para funções pseudo-analíticas, concluímos que W deve ser da forma

$$W = e^{s(\xi)} f(\xi) \quad (4.26)$$

onde $s(\xi)$ é uniformemente limitada, contínua em $\xi = 1$ e assume valores reais neste círculo, considerando que $f(\xi)$ é analítica regular. É fácil mostrar que $f \equiv 0$ e, conseqüentemente, também $W \equiv 0$; (para poder aplicar o princípio de semelhança, é necessário saber que os coeficientes α, β em (4.23) desaparecem no infinito para ordem maior do que um e são limitados por constante multiplicando $|\xi - 1|^{\epsilon-1}$, $\epsilon > 0$, próximo a $|\xi| = 1$. Verificar estas condições levaria muito tempo; somente afirmamos que isto pode ser feito).

Este argumento, mostra que a condição de Kutta-Joukowski determina o valor da circulação, é necessário já que w não é dada. Se nós supusermos que a circulação é determinada, um

argumento padrão pode ser usado. De acordo com (4.20), w é uma solução de uma equação diferencial parcial elíptica linear homogênea, sem termos de ordem zero, cuja derivada normal desaparece na fronteira. Se o domínio em questão for limitado, nós poderíamos concluir imediatamente que $w = \text{const.}$. Em nosso caso o comportamento de w no infinito deve ser investigado. Pode-se assumir que o comportamento de $w(x, y)$ no infinito é tal que o teorema de unicidade padrão vale (como feito por Schiffman, que prova o teorema da unicidade para uma classe de funções para as quais uma certa integral converge), ou se pode provar que, utilizando, por exemplo, a teoria de funções pseudo-analíticas, que é este caso. De qualquer modo, o teorema de unicidade para fluxos subsônicos é uma consequência direta do fato que para uma equação linear elíptica da forma (4.20), o segundo problema de valores de contorno possui no máximo uma solução, a menos de adição de uma constante.

Teoremas de unicidade para equações de tipo misto

Tentando estender a prova de unicidade, esboçada na seção precedente para o caso de um fluxo transônico, somos conduzidos a um problema de valores de contorno para uma equação linear de tipo misto elíptico-hiperbólico. Precisamos, para tanto, introduzir uma breve discussão de tais problemas. A teoria de equações de tipo misto foi originada por Tricomi em 1923. Em um estudo célebre, Tricomi [19] estudou a equação

$$y\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0 \quad (4.27)$$

que é elíptica para $y > 0$ e hiperbólica para $y < 0$. Note que a equação de Chaplygin (4.11) é de uma forma semelhante. Para valores de q próximos à velocidade crítica q_{cr} , isto é, para valores de q perto de zero, a equação de Chaplygin (depois de um alongamento simples na direção- σ) pode ser aproximada por pela equação de Tricomi. Também é possível achar uma relação de pressão e densidade (4.9) para a qual a equação de Chaplygin será precisamente a equação (4.27). Finalmente, notamos que a equação aproximada para o potencial de um fluxo de transônico quase uniforme proposta por von Karman pode ser transformada na equação de Tricomi.

A equação (4.27) é uma equação típica do tipo misto no seguinte sentido. Seja

$$\begin{aligned} A_{11}(x, y)\psi_{xx} + 2A_{12}(x, y)\psi_{xy} + A_{22}(x, y)\psi_{yy} + A_1(x, y)\psi_x + \\ A_2(x, y)\psi_y + A_0(x, y)\psi = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

uma equação de tipo misto, tal que seu discriminante

$$A_{11}(x, y)A_{22}(x, y) - A_{12}(x, y)^2 \quad (4.29)$$

é positivo em um lado de uma curva suficientemente suave C e negativo no outro lado. Se é assumido que o discriminante (4.29) desaparece em C na primeira ordem, e se são feitas suposições de suavidade suficientemente fortes sobre os coeficientes, então, como foi observado por Tricomi, podemos introduzir novas variáveis independentes de tal modo que a equação (4.28) toma a forma

$$y\psi_{xx} + \psi_{yy} + a(x, y)\psi_x + b(x, y)\psi_y + c(x, y)\psi = 0 \quad (4.30)$$

Em particular, a equação de Chaplygin (4.11) pode ser transformada para esta forma. Deveria ser notado, entretanto, que o fato de que só as condições de ordem mais alta estão presentes nas equações (4.11) e (4.27) é de grande importância para teoria destas equações. Isto pode ser visto melhor considerando o problema de Cauchy no qual os valores da função e de suas derivadas são dadas ao longo da linha parabólica $y = 0$, e com solução necessariamente no semiplano hiperbólico. Frankl [6] mostrou que este problema é posto corretamente para equação (4.30). Isto implica a mesma característica para uma equação da forma de Chaplygin

$$K(y)\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0, \quad yK(y) > 0, \quad y \neq 0 \quad (4.31)$$

contanto que se assuma

$$K'(0) > 0 \quad (4.32)$$

Por outro lado, Bers mostrou que o comportamento do problema de Cauchy para equação (4.31) é independente do comportamento de $K(y)$ próximo a $y = 0$. Este resultado pode ser destruído pela presença de termos de primeira ordem, de acordo com o teorema de Berezin, que afirma que o teorema de Cauchy para a equação

$$y^\alpha \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_x = 0,$$

não é bem posto se $\alpha > 2$.

A possibilidade de resolver o problema de Cauchy para a equação de Chaplygin implica, a propósito, que sob certas restrições, bastantes moderadas, um fluxo de gás subsônico que se torna sônico ao longo de um arco pode sempre ser continuado ao longo desta linha.

São prescritos os valores da função ao longo de C_0 e ao longo ST . Gellerstedt [8] estendeu este resultado para o caso da equação (4.31) com $K(y) = y^n$. Ele também fez a observação importante de que o problema de Tricomi pode ser enunciado de um modo mais geral. Podemos considerar um domínio D limitado por um arco elíptico e através de quatro características S_1T_1 , RT_2 , S_2T_2 e prescreve os valores da função ao longo de C_0 , e ao longo das características S_1T_1 , S_2T_2 .

Uma generalização do problema de Tricomi foi proposta por Frankl em conexão com alguns problemas de fluxos transônicos. Frankl substituiu a ST característica por um arco C_1 , que pode coincidir em parte com uma característica, e que cruza no máximo uma vez cada característica da família contendo RT . Uma forma mais geral do problema de Frankl é enunciado como segue: o domínio D é limitado por um arco elíptico C_0 , por duas características RT_1 e RT_2 , por duas curvas, não necessariamente, características C_1 e C_2 , sujeitas às mesmas restrições anteriores.

São prescritos os valores da função ao longo do arco aberto $C_1 + C_0 + C_2$. A importância deste problema à dinâmica dos gases foi enfatizada por Busemann [3] e Guderley [11], que também propuseram considerar um caso limite do problema de Frankl: os valores da função são prescritos ao longo de todo o contorno, que consiste de um arco elíptico e um hiperbólico, mas é permitido que a função tenha uma unicidade não especificada em um dos pontos de intersecção R entre a fronteira e o eixo x .

Deveria ser notado que, em todos os casos, a solução será determinada em todo triângulo característico adjacente ao “segmento” parabólico, mesmo que o domínio só se estenda em

uma parte deste triângulo. Isto segue de propriedades simples de equações hiperbólicas. A prova de unicidade de Tricomi era bastante complicada e fez uso de propriedades especiais da equação (4.27). Ela poderia ser estendida ao caso considerado por Gellerstedt (equação (4.31) com $K(y) = y''$), mas não para a equação mais geral (4.31). A primeira prova de unicidade para o problema de Tricomi para uma equação da forma (4.31) foi determinado por Frankl. Esta prova é válida desde que

$$3K'^2 \geq 2KK'' \quad (4.33)$$

no domínio considerado. Esta condição sempre será satisfeita para $K = y$ (a equação de Tricomi) ou para $K = y''$ (a equação de Gellerstedt), mas para uma equação geral (4.28), que, de agora em diante, satisfará automaticamente a condição (4.32), (4.33) só será satisfeita se o domínio não se estende demais no semi-plano hiperbólico. Em particular, a condição de Frankl não é sempre satisfeita pela equação de Chaplygin (4.11).

Friedrichs observou que a prova de Frankl pode ser reformulada como um argumento de energia-integral. Seja $\psi(x, y)$ uma solução de (4.31) que desaparece ao longo da fronteira de D , ao longo da qual se quer prescrever dados. Para toda escolha de funções $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ temos

$$\int \int_D (a\psi + b\psi_x + c\psi_y)(K\psi_{xx} + \psi_{yy})dxdy = 0 \quad (4.34)$$

Agora, tentamos escolher as funções a , b , c de tal modo que a integral em (4.34) após ser transformada, através do teorema Green, e depois que as condições de fronteira tenham sido consideradas, torne-se positiva definida. Se isto de fato ocorrer, podemos concluir que $\psi \equiv 0$. Usando este método Protter [16] teve sucesso em obter uma nova prova de unicidade para o problema de Tricomi na forma (4.31). Ele assume que, nenhuma restrição é posta sobre a parte elíptica do domínio, caso que exige que a parte hiperbólica não deve se estender muito, ou que nenhuma restrição é posta sobre a parte hiperbólica, de forma que a parte elíptica não pode se estender demais na direção x .

Uma nova aproximação para o problema de unicidade foi determinada por Germain e Bader [9]. Eles provaram o seguinte princípio de máximo para a equação de Tricomi: se uma solução de (4.27) definida no domínio desaparece ao longo da ST característica, então o máximo de $|\psi|$ é atingido na fronteira elíptica C_0 .

Mais recentemente, mostrou-se que este resultado é um caso especial de um princípio de máximo geral que vale para uma ampla classe de equações de tipos hiperbólicos misto, mas de forma alguma para todas essas equações. No caso da equação (4.31) o princípio do máximo na forma de Germain-Bader é válida (no domínio considerado, para $y < 0$) se

$$5K'^2 \geq 4KK'' \quad (4.35)$$

Esta condição é, infelizmente, mais forte que a condição de Frankl (4.33).

Para o problema de Frankl uma prova de unicidade foi deduzida por Guderley para a equação especial (4.27), obedecendo a suposições no domínio que são complicadas para serem declaradas aqui. A sua prova é bastante difícil e faz uso de uma transformação para coordenadas especiais. Porém, é natural aplicar o método de energia-integral ao problema de Frankl. Assim

Protter observou que escolhendo $a = 0$ e b, c como constantes apropriadas, obtém-se uma prova de unicidade para o problema de Frankl, no caso em que o declive do arco elíptico não exceda o mínimo dos declives das curvas de fronteira não características no domínio hiperbólico.

O resultado mais esperançoso para o problema de Frankl é devido a Cathleen Morawetz [14]. Segundo ela, ele possui no máximo uma solução se a curva de fronteira elíptica for simetricamente radial com respeito ao ponto R . Este resultado é alcançado pela escolha simples $a = 0, b = x, c = y$.

Resumindo, deve ser admitido que a teoria do Tricomi e problemas de Frankl ainda estão em um estado bastante insatisfatório. Para problema de Tricomi, por exemplo, existem três resultados de unicidade diferentes (Frankl, Protter, Morawetz). Os três resultados estão baseados em suposições que são mutuamente independentes. Mas, nenhum exemplo de multiplicidade é conhecido, e parece provável que existe um teorema de unicidade mais geral. Aparentemente, novos métodos serão necessários para resolver este problema, como também problemas mais complicados que transpassam os problemas de valores de contorno para fluxos transônicos passando por anteparos.

4.2.3 Teoremas de inexistência de soluções e fluxos transônicos

Voltamos agora ao problema de valores de contorno $\Pi(P, \infty)$ para tentar estender a prova de unicidade esboçada para o caso em que o fluxo descrito pelo potencial ϕ é transônico.

Para simplificar, assumimos de agora em diante que o anteparo é suave e simétrico com respeito aos eixos x e y , e que todos os fluxos considerados tenham as mesmas propriedades de simetria (como eles realmente devem ser se o teorema de unicidade for válido). Neste caso, bastará considerar somente a metade superior do domínio do fluxo que denotamos por D .

Nós também assumimos que o fluxo é subsônico com exceção de uma região Σ limitada por um arco S_1S_2 do anteparo e por uma arco simples Λ , ao longo do qual $M = 1$. Em Σ , o fluxo é suposto supersônico. Todos os fluxos transônicos obtidos pelos métodos descritos aqui são desta natureza. Não é difícil verificar que toda linha Mach do fluxo, ou seja, toda característica da equação (4.9), ϕ sendo o potencial considerado, que tem origem na linha sônica, que intercepta o arco S_1S_2 em exatamente um ponto. Será conveniente para o que segue selecionar um ponto fixo, mas arbitrário, R em Λ . As duas características que saem de R encontram P nos pontos T_1 e T_2 ; chamamos o arco T_1T_2 de P de arco crítico (com respeito ao fluxo transônico considerado, e com respeito ao ponto escolhido R), e o triângulo curvilíneo T_1RT_2 de triângulo crítico. Por D_0 denotaremos o domínio obtido de D que remove o triângulo crítico.

Agora seja $\tilde{\phi}$ outra solução de $\Pi(P, \infty)$ e fixe, como antes, $w = \phi - \tilde{\phi}$. A função $w(x, y)$ também satisfaz as condições

$$w_x^2 + w_y^2 \rightarrow 0 \quad z \rightarrow \infty, \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{no limite de } D \quad (4.37)$$

Para estabelecer o teorema de unicidade, teríamos que concluir que w é constante. Mas a equação (4.20) é agora do tipo misto, sendo hiperbólica em Σ e elíptica fora de Σ . Ao longo

de Λ o discriminante de (4.20) se anula.

Além disso, as características desta equação são precisamente as linhas de Mach do fluxo ϕ . Pelos teoremas de unicidade discutidos anteriormente, podemos esperar que o fato de w ser constante poderia ser estabelecida sem usar a condição (4.37), mas só a exigência aparentemente mais fraca

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{no limite de } D \text{ exeto, talvez, ao longo do arco crítico.} \quad (4.38)$$

Realmente, assumamos que o teorema de unicidade para o problema de Frankl pode ser estendido a este caso quando:

- (i) a equação não é da forma especial (4.31) mas a equação linear geral (4.28) é de tipo misto, sem um termo de ordem zero e com o discriminante se anulando ao longo da linha de transição entre as regiões hiperbólicas e elípticas.
- (ii) o domínio na parte elíptica é extensível para o infinito, caso em que as derivadas da solução devem se anular no infinito.
- (iii) não são prescritos os valores da função, mas os valores de sua derivada normal ao longo de um arco na fronteira do domínio, escolhidos como no caso do problema de Frankl.

Aplicando este teorema de unicidade conjecturado para a função w , podemos concluir que ele é constante em D_0 . Mas a equação (4.20) é hiperbólica no triângulo crítico, e, já que se sabe que w é constante ao longo das duas características, ela deve ser constante em todo o domínio. Conseqüentemente, $\phi = \phi + const.$ de forma que existe um único fluxo transônico passando por P com velocidade de fluxo livre q_∞ .

Observe a seguir, que esta prova de unicidade (condicional), a condição de fronteira imposta ao longo do arco crítico não foi usada. Conseqüentemente se \tilde{P} é um anteparo que coincide com P , exceto ao longo dos arcos críticos, e $\tilde{\phi}$ é um asolução de $\Pi(\tilde{P}, \infty)$, podemos repetir o argumento que mostra literalmente que $w = const.$. Mas como o arco de \tilde{P} é determinado pela condição que, ao longo dele, $\partial\tilde{\phi}/\partial n = 0$, os anteparos P e \tilde{P} têm que coincidir em todos os lugares. Assim nós somos conduzidos ao seguinte.

Teorema 4.2 (Teorema de inexistência A). *Seja um fluxo transônico passando por um obstáculo P com q_∞ sendo sua velocidade no infinito. \tilde{P} um obstáculo que coincide com P , exceto ao longo dos arcos críticos. Então, não existe nenhum fluxo potencial passando por \tilde{P} com o mesmo valor de velocidade no infinito.*

O significado deste teorema está no fato que \tilde{P} pode estar arbitrariamente próximo de P , e tem seu declive, curvatura, etc., tão próximos de P quanto se queira. Conseqüentemente implica que o problema de valores de contorno $\Pi(\tilde{P}, q_\infty)$ não é bem posto, pelo menos no que diz respeito a fluxos transônicos.

Esta formulação do argumento de Frankl-Busemann-Guderley (que era determinado por O.S.Gardner) tem a vantagem de não fazer uso de quaisquer considerações que envolvem

fluxos infinitamente próximos, e de não envolver estimativas de ordens de magnitude de quantidades desconhecidas. Por outro lado, depende de um teorema de unicidade muito forte para equações lineares. Note que, nesta colocação, não há modo de contornar a dificuldade devido à condição de contorno de segundo tipo usando a função de corrente em vez do potencial. Na realidade, a diferença de duas funções de corrente não vai, em geral, satisfazer uma equação linear simples, já que, a equação não linear satisfeita para cada função de corrente depende, no local, da linha sônica correspondente.

Uma indicação até mais forte da incorreção de problema $\Pi(\tilde{P}, q_\infty)$ para fluxos transônicos seria o que segue abaixo:

Teorema 4.3 (Teorema de inexistência B). *Sob as mesmas hipóteses de A, não existe nenhum fluxo potencial passando por P com uma velocidade de fluxo livre q distinta, mas suficientemente próximo de q_∞ .*

Neste caso, porém, até onde se sabe, não é possível formular um teorema de unicidade razoável para equações lineares de tipo misto que implicaria este teorema de inexistência. Vale a pena então formular algo mais fraco.

Assumimos que o fluxo transônico descrito por ϕ é tal que a parte superior do domínio de fluxo D é associado a uma função injetora ao plano hodográfico. Esta suposição não é muito restritiva, pois os fluxos com simetria computados pelo método hodográfico terão esta propriedade em geral, e já que Nikolski e Taganov [15] provaram que a região supersônica Σ sempre tem um hodográfico simplesmente coberto.

Seja \tilde{P} novamente um obstáculo que coincide com P , exceto junto ao arco crítico e muito próximo de P . Podemos tentar achar uma aproximação da solução $\tilde{\phi}$ de $\Pi(\tilde{P}, \infty)$ pelo método clássico de pequenas perturbações. Ele consiste em fixar $\tilde{\phi} = \phi - w$ onde $w(x, y)$ será considerada

- (i) tão pequena que as potências de w e suas derivadas podem ser negligenciadas, e
- (ii) uma função definida no domínio exterior a \tilde{P} . Do modo habitual, obtemos para w a equação diferencial linear

$$\begin{aligned} (c^2 - \phi_y^2)w_{xx} + 2\phi_x\phi_y w_{xy} + (c^2 - \phi_x^2)w_{yy} + 2(2\phi_x\phi_{xx} + \\ \phi_y\phi_{xy} + \phi_x\phi_{xy})w_x - 2(2\phi_y\phi_{xx} + \phi_y\phi_{xy} + \phi_y\phi_{xy})w_y = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

e as condições (4.36) e (4.38) e

$$\frac{\partial w}{\partial n} = X \text{ no arco crítico,} \quad (4.40)$$

onde X é uma função determinada pelas formas de P e \tilde{P} , que não serão identicamente zero (o caso $P = \tilde{P}$ é obviamente excluído). Nos chamamos o problema de valores de contorno (4.39), (4.36), (4.38), (4.40) de problema de perturbação associado a ϕ . Tal problema

também pode ser formulado no caso em que o fluxo descrito por ϕ é puramente subsônico. Neste caso, o problema de perturbação seria um problema elíptico linear corretamente fixado.

Teorema 4.4 (Teorema de inexistência C). *O problema de perturbação associado a um fluxo transônico não é bem posto.*

Este teorema implica que, mesmo se o problema $\Pi(\tilde{P}, \infty)$ possa ser resolvido para uma família de obstáculos P que varia continuamente, a dependência da solução na geometria do anteparo não é tão suave como se poderia supor para um problema bem posto. Considerando w como uma função de $w(\phi_x, \phi_y)$. Se novas variáveis independentes θ e $\hat{\sigma}$ onde

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(q) = \int_p^{q_{cr}} \exp \left\{ \int_{q_{cr}}^q M^2 \frac{dq}{q} \right\} \frac{dq}{q}$$

são introduzidas, a equação, para w , torna-se

$$\hat{K}(\hat{\sigma})w_{\theta\theta} + w_{\hat{\sigma}\hat{\sigma}} = 0$$

onde

$$\hat{K}(\hat{\sigma}) = (1 - M^2) \exp \left\{ \int_{q_{cr}}^q M^2 \frac{dq}{q} \right\}$$

Esta equação é da mesma forma que a equação de Chaplygin, e as características desta equação são as imagens das linhas de Mach do fluxo ϕ . Ao longo das linhas de fronteira correspondentes ao contorno de D_0 formado pelo obstáculo, tem-se

$$\hat{K}w_{\theta}d\hat{\sigma} + w_{\hat{\sigma}}d\theta = 0$$

Ao longo da linha de fronteira vertical, que corresponde à parte do contorno de D formada pelo eixo x , $w_{\theta} = 0$.

O comportamento de w em $\hat{\sigma} = \infty$ (que corresponde ao ponto de stagnação no plano z) e se aproxima da fenda vertical (correspondendo ao ponto $z = \infty$) também poderia ser descrito sem dificuldades, a pesar de não fazermos isto aqui. A analogia da situação presente com a do problema de Frankl é óbvia. O teorema C é provado mostrando que as condições enunciadas acima implicam que w é constante ou uma combinação linear de um número finito de autofunções.

A diferença entre este problema e o problema de Frankl consiste, principalmente, da natureza das condições de fronteira. Pode-se tentar recuperar as condições mais simples do problema de Frankl, considerando a função de corrente em vez do potencial. Mas isto conduz a uma unicidade na equação diferencial.

As considerações desta seção, que indicam que há boas razões para acreditar nos exemplos existentes de fluxos transônicos, é não típico, como antes se esperava, também se aplicam a outros tipos de fluxo, mais precisamente, a fluxos subsônicos com regiões limitadas supersônicas em seu interior. Elas definitivamente não aplicam a casos em que a região supersônica se estende para o infinito, ou é limitada por ondas de choque, como, por exemplo,

os fluxos de bico estudados por Frankl [7].

Deveria ser notado que Busemann [3] e Guderley [11] descrevem os argumentos como provas da inexistência de fluxo transônico potencial no caso geral. Do ponto de vista matemático, porém, os argumentos deles são só considerações de plausibilidade altamente sugestivas. Eles a colocam mas não resolvem problemas matemáticos aí envolvidos.

4.2.4 Considerações finais

Os resultados acima ainda eram conjecturas altamente plausíveis na época dos artigos introdutórios investigados no presente trabalho. O trabalho de Morawetz [14] foi fundamental para a demonstração de tais teoremas.

Uma pesquisa mais aprofundada desses resultados fica como sugestão para um possível trabalho de pesquisa que estenda e complemente o escopo deste.

Bibliografia

- [1] Bers, L.: *Results and conjectures in the mathematical theory of subsonic and transonic gas flows*. Comm. Pure Appl. Math., Vol. 7, 1954, pp.79-104.
- [2] Bergman, S.: *Operator methods in the theory of compressible fluids*. Proceedings of the Symposium on Applied Mathematics, Volume 1, 1949, pp.19-40.
- [3] Busemann, A.: *The drag problem at high subsonic speeds*. Journal of the Aeronautical Sciences, Volume 16, 1949, pp.337-344.
- [4] Chaplygin, S. A.: *On gas jets*. Ann. Math. Phys. Sect. Sci., Imperial Univ. Moscow 21, 1-121(1904). English translation: NACA Techn. Note No. 1063(1944)
- [5] Emmons, H. W.: *Flow of a compressible fluid past a symmetrical airfoil in a wind tunnel and in free air*. National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note, No. 1746, 1948.
- [6] Frankl, F. I.: *On Cauchy's problem for equations of mixed elliptic-hyperbolic type with initial data on the transition line*. Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Volume 8 1944, pp. 195.224.
- [7] Frankl, F.I., and Keldysh, M.: *Die aussere Neumann'sche Aufgabe fur nichtlineare elliptische Differentialgleichungen mit Anwendung auf die Theorie der Flugel im kompressiblen Gas*. Bulletin of the Academy of Sciences. USSR, Volume 152, 1951, pp.99-116.
- [8] Gellerstedt, S.: *Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de type mixte*. Dissertation, Uppsala, 1935.
- [9] Germain, P., and Bader, R.: *Sur quelques problemes relatifs a l'equation de type mixte de Tricomi*. Office Nationale d'Étude et de Recherche, Publication No. 54, 1952.
- [10] Goldstein, H., Lighthill, M. J., and Graggs, J. W.: *On the hodograph transformation for high speed flow, I. A flow without circulation*. Quarterly Journal of mechanics and applied Mathematics, Volume 1, 1948, pp.344-357.
- [11] Guderley, G.: *On the presence of shocks in mixed subsonic-supersonic flow patterns*. Advances in Applied Mechanics, Volume III, Academic Press. New York 1953, pp.145-184.

- [12] Kolodner, I., and Morawetz, C.S.: *On the non-existence of limiting lines in transonic flows*. Communications on Pure and Applied Mathematics, Volume 6, 1953, pp. 97-102.
- [13] Lighthill, M. J.: *The Hodograph transformation in transonic flow*. Proceedings of the Royal Society, Series A, Volume 191, 1947, pp.341-369.
- [14] Morawetz, C.S.: *A uniqueness theorem for the Frankl Problem*. Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 7, 1954, pp. 697-703.
- [15] Nikolsky, A. A., and Taganov, G. I.: *Gas motion in a local supersonic region and conditions of breakdown of potential flow*. Prikladnaia Matematika o Mekhanika, Volume 10, 1946, pp. 481-502.
- [16] Protter, M.H.: *A boundary value problem for na equation of mixed type*. Transactions of The American Mathematical Society, Volume71, 1951, p. 416.
- [17] Schiffman, M.: *On the existence of subsonic flows of compressible fluid*. Journal of Rational Mechanics and Analysis, Volume 1, 1952, pp. 605-652.
- [18] Taylor, G.I.: *Recent work on the flow of compressible fluids*. Journal of the London Mathematical Society, Volume 5, 1930, p. 224.
- [19] Tricomi, F.: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine, di tipo misto*. atti Accademia Nazionale dei Lincei (5), Volume 14, 1923, p.133.
- [20] Meyer, TH.: *Über zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt*. Thesis, Göttingen 1908. Forschungsh. VDI 62(1908).
- [21] Molenbroek, P.: *Über einige Bewegungen eines Gases mit Annahme eines Geschwindigkeitspotentials*. Arch. Math. Phys. II 9, 157-195(1890).

Capítulo 5

Ondas na Água

Considere um fluido não viscoso incompressível em um campo de gravitação constante. Seja a velocidade $\underline{u} = (u_1(x_1, x_2, y), u_2(x_1, x_2, y), w(x_1, x_2, y))$ e $\underline{F} = -\rho g \underline{j}$ sob a hipótese de massa específica constante. As equações são:

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \underline{j} \quad (5.2)$$

Supondo que o fluido é irrotacional $\nabla \wedge \underline{u} = 0$, e $\underline{u} = \nabla \phi$ e

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) + (w \wedge u) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \underline{j} \quad (5.3)$$

Obtemos, com $w = \nabla \wedge \underline{u}$,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \wedge (w \wedge u) = 0 \quad \text{ou} \quad (5.4)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla w = w \cdot \nabla \underline{u} \quad (5.5)$$

Com $u = \nabla \phi$ podemos integrar (5.3) a

$$\frac{p - p_0}{\rho} = B(t) - \phi_t - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - gy \quad (5.6)$$

como $B(t)$ uma função arbitrária e p_0 uma constante arbitrária. É possível absorver $B(t)$ em ϕ escolhendo $\phi' = \phi - \int B(t) dt$. Neste caso, obtemos,

$$\underline{u} = \nabla \phi$$
$$\frac{p - p_0}{\rho} = \phi_t - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - gy \quad e \quad (5.7)$$

$$\nabla \phi = 0 \quad (5.8)$$

Considerando o caso da água com ar acima (um oceano, por exemplo) e com interface

$$f(x_1, x_2, y, t) = 0 \quad (5.9)$$

claramente,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \cdot \nabla f = 0 \quad (5.10)$$

É conveniente descrever a interface por

$$y = \eta(x_1, x_2, t) \quad e \quad f(x_1, x_2, y, t) = \eta(x_1, x_2, t) - y$$

Segue-se de (5.10) obtemos

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = w \quad (5.11)$$

(5.10) ou (5.11) são condições cinemáticas na fronteira. Ignorando tensão de superfície e argumentando que a pressão do ar pode ser aproximada por seu valor no estado de resto devido ao fato de que sua massa específica é pequena em comparação com a água e negligenciando termos ρu^2 , nossa condição de fronteira é $p = p_0$. De (5.7) e (5.11) obtemos as duas condições na superfície livre:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] + gy &= 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

em $y = \eta(x_1, x_2, t)$.

Em uma fronteira material $u \cdot \nabla \phi = 0$. Se no fundo, $y = -h_0(x_1, x_2)$;

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial h_0}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{\partial h_0}{\partial x_2} = 0 \quad em \quad y = -h_0(x_1, x_2) \quad (5.13)$$

Se $h_0 = \text{const.}$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad em \quad y = -h_0 \quad (5.14)$$

5.1 Linearização do Problema

No caso de pequenas perturbações na água inicialmente no estado de resto, η e ϕ são pequenas, (5.12) agora são tomadas da forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta &= 0, \quad em \quad y = \eta \end{aligned}$$

Fazemos a hipótese de aproximação adicional que de fato podemos considerar

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} & y = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta &= 0\end{aligned}$$

Eliminando η obtemos,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{em} \quad y = 0$$

junto com as condições

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= 0 & -h_0 < y < 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial h_0}{\partial x_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial h_0}{\partial x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} &= 0 & y = -h_0.\end{aligned}\tag{5.15}$$

Obtendo ϕ

$$\eta(x_1, x_2, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x_1, x_2, 0, t)\tag{5.16}$$

No caso de ondas na água, as ondas propagam-se horizontalmente. Tentaremos agora soluções na forma

$$\eta = A \exp(ik_1 x - i\omega t) \quad \phi = \Upsilon(y) \exp(ik_1 x - i\omega t)$$

Segue-se que

$$\Upsilon''' - k^2 \Upsilon = 0 \quad k = \sqrt{k_1^2 + h_2^2}$$

No caso em que h_0 é constante, a condição em $y = -h_0$ implica que $\Upsilon'(y) = 0$ ou Υ é proporcional a $\cosh k(h_0 + y_0)$.

De (5.16)

$$A = \frac{i\omega \Upsilon(0)}{g} \quad e \quad \Upsilon(g) = -\frac{ig}{w} A \frac{\cosh k(h_0 + g)}{\cosh(kh_0)}$$

Segue-se que

$$\eta = A \exp(ik \cdot x - i\omega t) \quad e \quad \phi = -\frac{ig}{w} A \frac{\cosh k(h_0 + g)}{\cosh(kh_0)} \exp(ikx - i\omega t)\tag{5.17}$$

A condição

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{em} \quad y = 0$$

implica que

$$w^2 = gk \tanh(kh_0)\tag{5.18}$$

Considere um problema inicial com $\phi = 0$. Suponemos que

$$\begin{aligned} \eta(x, 0) &= \eta_0(x), \quad t = 0 \quad e \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad \text{inicialmente} \quad y = 0 \end{aligned}$$

Este problema tem a solução:

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp(ik.x - i\omega t) dk + \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp(ik.x + i\omega t) dk$$

com $w(k) = \sqrt{gk \tanh(kh_0)}$, $F(k) = \mathcal{F}(\frac{1}{i}\eta_0(\cdot))(k)$.

No caso unidimensional com $\eta_0(x) = \delta(x)$, $F(k) = \frac{1}{4\pi} e$

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kx) \cos(w(k, t)) dk \quad (5.19)$$

5.2 Interface entre dois fluidos

Considere um fluido com massa específica ρ' acima de um com massa específica ρ e suponha que os fluidos são infinitamente profundos. Os fluxos são irrotacionais com potenciais ϕ' e ϕ respectivamente e na interface $y = \eta$, $p' = p$. Temos que

$$\begin{aligned} p' - p_0 &= -\rho' \left(\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi')^2 + gy \right) \\ p - p_0 &= -\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + gy \right) \end{aligned}$$

e como antes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi'}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi'}{\partial x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} - \frac{\partial \phi'}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} - \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Considerando somente ondas unidimensionais e linearizando as condições de fronteira, podemos

$$\begin{aligned} \phi' &= U'x - \frac{1}{2}U'^2 + \Phi' \\ \phi &= Ux - \frac{1}{2}U^2 + \Phi \end{aligned}$$

e precisamos cancelar os termos de primeira ordem em Φ' , Φ e η . As condições de fronteira são agora

$$\begin{aligned} \rho'(\Phi'_t + U'\Phi'_x + i\eta) &= \rho(\Phi_t + U\Phi_x + i\eta) \\ \eta_t + U'\eta_x - \Phi'_y &= 0 \\ \eta_t + U\eta_x - \Phi_y &= 0 \\ \Delta\Phi' &= \Delta\Phi = 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

e $\Phi', \Phi \rightarrow 0$ com $y \rightarrow \infty, y \rightarrow -\infty$. Soluções elementares são da forma

$$\begin{aligned}\Phi' &= B' \exp(i(kx - wt) - ky) \\ \Phi &= B \exp(i(kx - wt) + ky) \\ \eta &= A \exp(i(kx - wt)),\end{aligned}\tag{5.21}$$

As condições de fronteira (5.20) fornecem a relação de dispersão

$$\frac{w}{k} = \rho \frac{U + \rho U'}{\rho + \rho'} = \pm \left\{ \frac{g\rho - \rho'}{k\rho + \rho'} - \frac{\rho\rho'}{(\rho + \rho')^2} (U - U')^2 \right\}^{1/2}\tag{5.22}$$

No caso de $U = U' = 0$, temos

$$w = \left\{ gk \left(\frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'} \right) \right\}^{1/2}$$

e no caso de $\frac{\rho'}{\rho} \rightarrow 0$ chegamos a relação (5.18).

- (i) Se $U = U' = 0$. A solução é instável se $\rho' > \rho$.
- (ii) Se $g = 0$ e $U \neq U'$. A solução é instável (instabilidade de Helmholtz)
- (iii) Se $\rho' = \rho$ e $U \neq U'$. Mesmo caso do item (ii).
- (iv) Se $\rho' \neq \rho$ e $U \neq U'$. Solução instável por ondas curtas.

Modificações devido a tensão de superfície.

Para desvios pequenos $g = \eta(x_1, x_2, t)$ do plano e o efeito é de uma força normal $T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_2}$ por unidade de área e a condição de pressão vira

$$p + T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_2} = p_0\tag{5.23}$$

Neste caso as condições linearizadas são modificadas a

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad e \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0 \quad em \quad y = 0\end{aligned}$$

levando a relação de dispersão à

$$w^2 = gk \tanh(kh_0) \left(1 + \frac{T}{g\rho} k^2 \right)\tag{5.24}$$

Bibliografia

- [1] Russel, J. S., and Macmillan, D.H.: *Waves and tides*. 348pp. (15 plates). London: Hutchinson's Scientific and Technical Publications 1952.
- [2] Shuleikin, V. V.: *Fizika morya*. (Physics of the sea.) 3rd ed. 989pp. Moscow: Izdatel'stvo Akad. Nauk SSSR 1953.
- [3] Maruo, Hajime.: *Modern developments of the theory of wave-making resistance in the non-uniform motion*. The Society of Naval Architects of Japan, 60th anniversary series, Vol. 2, pp. 1-82. Tokyo, 1957

Capítulo 6

Choques e Explosões Fortes na Atmosfera

Recordamos que em termos das velocidades relativas $v = V - u$ as condições de choque para o fluxo estacionário podem ser dadas na forma

$$\begin{aligned}\rho_1 v_1 &= \rho_2 v_2 \\ p_2 + \rho_2 v_2^2 &= p_1 + \rho_1 v_1^2 \\ h_2 + \frac{1}{2} v_2^2 &= h_1 + \frac{1}{2} v_1^2\end{aligned}$$

e no caso de um gás adiabático,

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \\ h &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \\ c^2 &= \gamma \frac{p}{\rho}\end{aligned}$$

Em termos de

$$M_1 = \frac{V - u_1}{c_1},$$

temos

$$\frac{u_2 - u_1}{c_1} = \frac{2|M|^2 - 1}{(\gamma + 1)M_1} l \quad (6.1)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}$$

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\gamma(M_1^2 - 1)}{\gamma + 1}$$

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{(2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1))^{1/2} ((\gamma + 1)M_1^2 + 2)^{1/2}}{(\gamma + 1)M_1} \quad (6.2)$$

Tomando p_2 como dado, é conveniente introduzir a “força” do choque z ,

$$z = \frac{p_2 - p_1}{p_1}$$

e resolva as equações de choque na forma

$$M_1 = \frac{V - u_1}{c_1} = \left(1 + \frac{(\gamma + 1)z}{2\gamma}\right)^{1/2}$$

$$\frac{u_2 - u_1}{c_1} = \frac{z}{\gamma \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma}z\right)^{1/2}}$$

Assim, o único parâmetro dimensional associado com o gás ambiental é sua massa específica ρ_0 . As relações de choque fortes aplicadas, onde

$$u = \frac{2}{\gamma + 1}V, \quad \rho = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\rho_0, \quad p = \frac{2}{\gamma + 1}\rho_0V^2$$

atrás do choque movimentando-se com velocidade V .

O comprimento $k(t)$ baseado em

$$E \left(\frac{ML^2}{T^2}\right) \quad e \quad \rho_0 \left(\frac{M}{c^3}\right) \quad e \quad R(t) = k \left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/5} t^{2/5}$$

Também

$$V = R'(t)$$

$$p = \frac{8}{25}k^2\rho_0 \left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/5} t^{-6/5}$$

$$p = \frac{4k}{5(\gamma + 1)} \left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/5} t^{-3/5}$$

$$u = \frac{2}{\gamma + 1}V$$

$$u = \frac{2}{\gamma + 1}R'$$

Equivalentemente,

$$p = \frac{8}{25} \frac{k^5}{\gamma + 1} ER^{-3}$$

$$u = \frac{4}{5} \frac{k^{5/2}}{\gamma + 1} \left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/2} R^{-3/2}$$

Introduzindo

$$J = \frac{Et^2}{\rho_0 r^5} \quad \text{e} \quad \xi = r$$

temos que

$$\xi \alpha \tau^{-1/5}, \quad \frac{ut}{R}, \quad \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \frac{pt^2}{\rho R^2}$$

são não dimensional e funções somente de ξ . Segundo Taylor,

$$\begin{aligned} u &= \frac{2}{5} R \varphi(\xi) \\ \rho &= \rho_0 \psi(\xi) \\ p &= \left(\frac{2R}{5t} \right)^2 \frac{p_0}{\gamma} f(\xi) \end{aligned} \tag{6.3}$$

Existem outras formas equivalentes e a escolha

$$\begin{aligned} u &= \frac{2r}{5t} V(\xi) \\ \rho &= \rho_0 R(\xi) \\ p &= \left(\frac{2R}{5t} \right)^2 p_0 P(\xi) \end{aligned}$$

serve.

Claramente,

$$\varphi = \xi V, \quad \psi = R, \quad f = \gamma \xi^2 p$$

O choque é encontrado em $\xi = 1$ e a velocidade do choque V é

$$\begin{aligned} R' &= \frac{2R}{5t} \\ \frac{p_2}{p_1} &= \frac{1 + \frac{(\gamma+1)}{2\gamma} z}{1 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} z} \\ \frac{c_2}{c_1} &= \left[\frac{(1+z)(1 + (\gamma-1)z/2\gamma)}{(1 + (\gamma-1)z/2\gamma)} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Sabemos que

$$S = c_V \frac{\log p}{\rho^\gamma}$$

e conseqüentemente

$$\frac{S_2 - S_1}{c_2} = \log \left\{ \frac{(1+z) \left(1 + z \frac{(\gamma-1)}{2\gamma} \right)^\gamma}{\left(1 + z \frac{(\gamma-1)}{2\gamma} \right)^\gamma} \right\}$$

Um caso importante é de choques fortes, isto é, $V \gg u_1$ onde $z \rightarrow +\infty$ e $M_1 \sim V/c_1$ e $M_1 \gg 1$. Neste caso, as relações (6.1) e (6.2) acima são aproximadas por

$$u_2 \sim \frac{2}{\gamma+1}V, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} \sim \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad p_2 \sim \frac{2}{\gamma+1}\rho_1 V^2$$

Vamos reabordar o problema da modelagem da explosão da bomba atômica feita independentemente por Taylor, Sedov e Von Neumann. Suponhamos que a explosão pode ser idealizada como:

- (1) A descarga respectiva de uma quantidade de energia E concentrada em um ponto, a única quantidade dimensional introduzida pela explosão;
- (2) No movimento resultante a pressão inicial e velocidade do som do ar ambiental são negligenciáveis em relação a pressão de velocidade produzida no fluxo perturbado.

Segue-se que as condições de choque tomam a forma

$$\varphi(1) = \frac{2}{\gamma+1}, \quad \psi(1) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad f(1) = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \quad (6.4)$$

Substituindo (6.3) nas equações de movimento

$$\begin{aligned} \rho du + \nabla p &= \rho F \\ \frac{dp}{dt} + \rho \operatorname{div} u &= 0 \\ \frac{dS}{dt} &= 0 \quad \text{onde} \quad \frac{dp}{dt} - c^2 \frac{d\rho}{dt} = 0 \end{aligned}$$

obtemos três equações ordinárias para φ , ψ e f integradas de $\xi = 1$ a $\xi = 0$ com condições iniciais (6.4).

k é fixo na expressão para a energia

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{R(t)} \left(\frac{\rho}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho u^2 \right) 4\pi r^2 dr \\ 1 &= 4\pi k^5 \left(\frac{2}{5} \right)^2 \int_0^1 \left(\frac{f}{\gamma(\gamma+1)} + \frac{1}{2}\psi\varphi^2 \right) \xi^2 d\xi \end{aligned}$$

Uma discussão detalhada deste problema é dada no livro de Sedov [1] ou no trabalho original de Sir Geoffrey Taylor [2]. As fotografias da explosão da bomba atômica no Novo México apresentadas aqui podem se encontradas no trabalho de Taylor e também publicadas no livro de Sedov, fornecendo dados experimentais sobre o problema. Uma boa discussão geral de aspectos da Teoria de Choques é dada no livro Whitham [3].

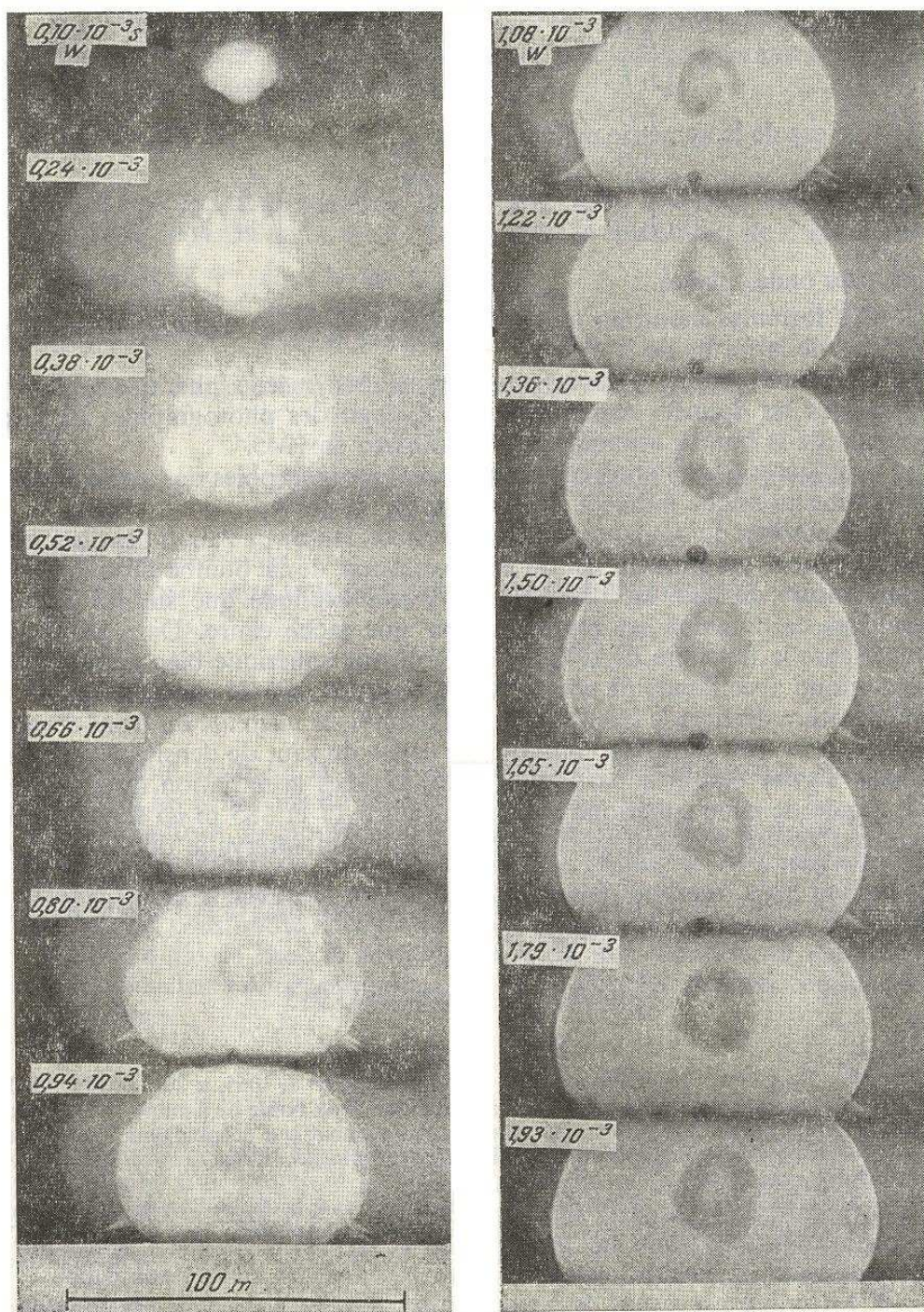


Figura 6.1: Fotografia sucessiva da bola de fogo para $t = 0,1 \times 10^{-3}$ segundos em uma explosão de uma bomba atômica no Novo Mexico

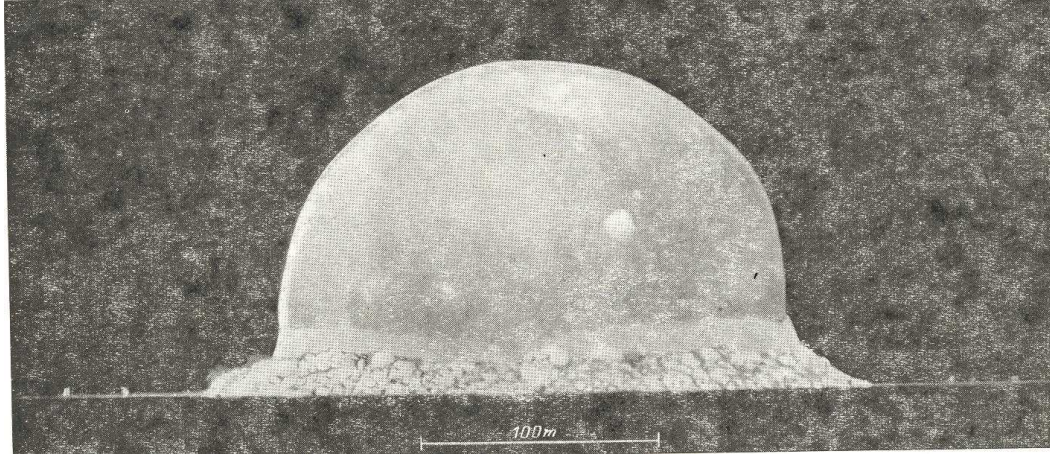


Figura 6.2: Fotografia da bola de fogo a $t = 15 \times 10^{-3}$ segundos

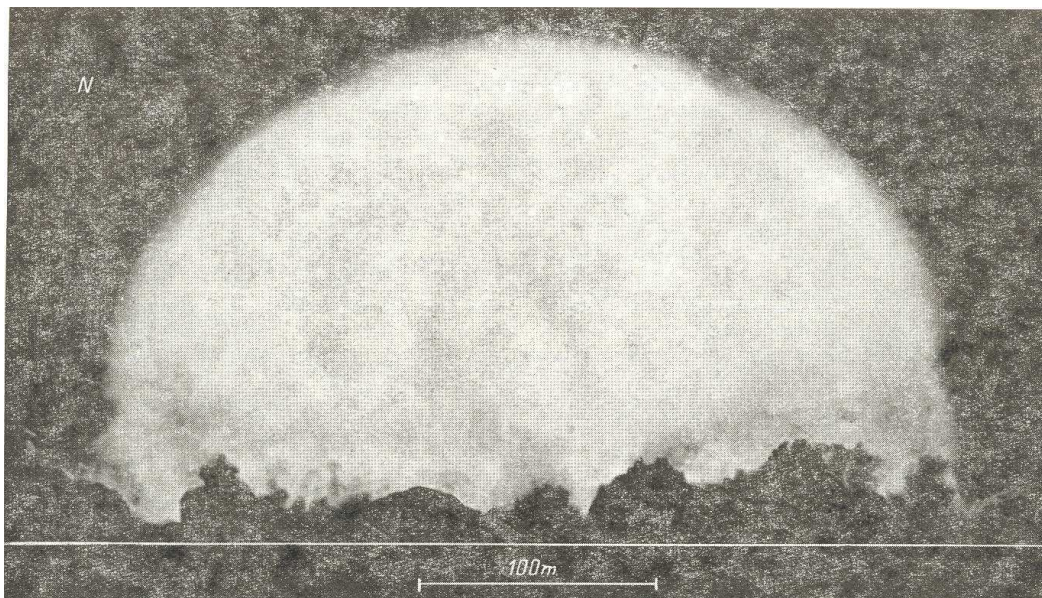


Figura 6.3: Fotografia da explosão em $t = 127 \times 10^{-3}$ segundos

Bibliografia

- [1] Sédov, L.: *Similitude et dimensions en mécanique*. Éditios Mir, Moscou 1977.
- [2] Taylor, G. I.: *The formation of a blast by a very intense explosion*. Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 201, 159-189(1950).
- [3] Whitham, G. B.: *Linear and Nonlinear Waves* . New York, Wiley, 1974.

Capítulo 7

Conseqüências Físicas da Viscosidade

7.1 A Fórmula de Stokes

Consideramos uma esfera de raio R movimentando-se com velocidade V_0 paralelo ao eixo uniformemente em um fluido com viscosidade ν . Suponha que a velocidade é baixa e negligencie as formas inerciais $u\nabla u$.

As equações de Navier-Stokes neste caso, reduzem-se a (no caso de fluxo estacionário)

$$\nu\Delta u = \nabla p \quad (7.1)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad (\rho = 1) \quad (7.2)$$

Existe uma abordagem relativamente sistemática como no livro de Lamb [11] para resolver este problema, mas por simplicidade tratamos o problema ad hoc. Lembramos que a força F na esfera é dada pela expressão

$$\underline{F} = - \int p n dS + \int \tau_{ij} n_j dS \quad (7.3)$$

Vamos tentar a solução de (7.1) e (7.2) na forma

$$\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \nabla\Phi + \underline{u}_2, \quad \Delta\underline{u}_2 = 0$$

Assim,

$$\nabla p = \nu\Delta\nabla\Phi + \nu\Delta\underline{u}_2 = \nu\nabla\Delta\Phi + \nu\Delta\underline{u}_2$$

e conseqüentemente,

$$p = \nu\Delta\Phi + p_0$$

De (7.2),

$$\operatorname{div} \Delta\Phi + \operatorname{div} \underline{u}_2 = \Delta\Phi + \operatorname{div} \underline{u}_2 = 0 \quad (7.4)$$

Vamos supor que $\underline{u}_2 = (u_2, 0, 0)$ e $\Delta u_2 = 0$. Uma possível solução é

$$u_2 = a/r \quad e \quad \underline{u}_2 = a/r\hat{i}$$

Segue-se que

$$\operatorname{div} \underline{u}_2 = i \cdot \nabla(a/r) = a \frac{\partial(1/r)}{\partial x}$$

e de (7.4)

$$\Delta \Phi + a \frac{\partial(1/r)}{\partial r} = 0 \quad (7.5)$$

Considere agora a expressão

$$-\frac{a}{2} \frac{\partial r}{\partial x}$$

calculando

$$\begin{aligned} \Delta \left(-\frac{a}{2} \frac{\partial r}{\partial x} \right) &= -\frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial x} \Delta r \\ &= -\frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \Delta r \\ &= -\frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3} \right) \\ &= -\frac{a}{2} \frac{\partial(1/r)}{\partial x} \end{aligned}$$

onde

$$\Phi_1 = -\frac{a}{2} \frac{\partial r}{\partial x}$$

Observe que $\Phi_1 + \Phi_2$ resolve (7.5) com $\Delta \Phi_2 = 0$ por linearidade. Em particular, uma solução da forma

$$\Phi_2 = b \frac{\partial(1/r)}{\partial x}$$

de uma solução da forma $V_0 x$ dando a forma assintótica ao infinito (o truque de fazer o fluido movimentar-se com respeito a esfera em relação ao resto). A condição de fronteira é $\underline{u} = 0$ em $|x| = R$. Uma solução é

$$\underline{u} = \nabla \left(V_0 x + b \frac{\partial(1/r)}{\partial x} - \frac{a}{2} \frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{a \underline{i}}{r}$$

com constantes a e b e temos de estabelecer que esta solução satisfaça $\underline{u} = 0$ em $|x| = R$, $\underline{u} \rightarrow V_0 \underline{i}$ ao infinito com escolha de a e b e subsequente, calculamos \underline{F} através de (7.3). Em termos de componentes, temos $\underline{n} = (u_1, u_2, u_3)$,

$$\begin{aligned} u_1 &= V_0 + b \frac{\partial^2(Vr)}{\partial x^2} - \frac{a}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{a}{r} = V_0 + b \left(\frac{3x^2}{r^3} - \frac{1}{r^3} \right) + \frac{a}{r} \\ u_2 &= b \frac{\partial^2(1/r)}{\partial x \partial y} - \frac{a}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} = b \frac{3xy}{r^5} + \frac{a}{2} \frac{xz}{r^3} \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} u_3 &= b \frac{\partial^2(1/r)}{\partial x \partial z} - \frac{a}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z} = b \frac{3xz}{r^5} + \frac{a}{2} \frac{xz}{r^3} + \frac{a}{r} \\ u_2 &= u_3 = 0 \quad \text{em } |x| = R \quad \text{se } b = -\underline{aR} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Em u_1 o termo envolvendo x^2 é automaticamente zero e $u_1 = 0$ se

$$a = -V_0 \frac{3R}{2}$$

e conseqüentemente,

$$b = V_0 \frac{R^3}{4} \quad \text{de} \quad (7.7)$$

Utilizando (7.6) e (7.7) toma a forma

$$\begin{aligned} u_1 &= V_0 \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{1R^3}{4r^3} \right) - \frac{3}{4} V_0 \frac{R}{r^3} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) x^2 \\ u_2 &= \frac{3V_0 R^3}{4r^3} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) xz \quad e \\ p &= p_0 + v\Delta\Phi = p_0 - av \frac{\partial(1/r)}{\partial x} = p_0 - \frac{3}{2V_0} \frac{vR}{r^3} \end{aligned}$$

A força na esfera é calculada de (7.3) utilizando a expressão do tensor de tensores τ_{ij} em termos de \underline{u} ($\rho = 1$, $\nu = \mu$), fazendo referência a derivação das equações de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= 2\nu \frac{u_1}{\partial x} & \tau_{12} = \tau_{21} &= \nu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \\ \tau_{22} &= 2\nu \frac{u_2}{\partial y} & \tau_{23} = \tau_{32} &= \nu \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \\ \tau_{33} &= 2\nu \frac{u_3}{\partial z} & \tau_{31} = \tau_{13} &= \nu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Devido a simetria, somente o termo no componente de x sobrevive e

$$F_1 = - \int_S p \underline{i} dS + \int_S \tau_{ji} n_i dS$$

Agora observe que

$$\text{div}(\tau_{1i} - p\underline{i}) = \text{div}(\tau_{1i}) - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

da derivação das equações de Navier-Stokes levando a (7.1). Portanto, podemos aplicar o Teorema da Divergência para a região V , obtendo que

$$F_1 = - \int_{\Sigma} p \underline{i} dS + \int_{\Sigma} \tau_{ji} n_i dS \quad (7.8)$$

Σ esfera contendo S com raio grande. Segue que em Σ ,

$$\begin{aligned} u_1 &\sim V_0 + \frac{a}{2r} + \frac{a x^2}{2 r^3} \\ u_2 &\sim \frac{a xy}{2 r^3} \\ u_3 &\sim \frac{a x^2}{2 r^3} \end{aligned}$$

com $a = -(3/2)V_0R$. Também observamos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x} &\sim \frac{a}{2} \frac{x}{r^2} \left(-1 \frac{3x^2}{r^2} \right) \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} &\sim -\frac{3axy^2}{r^5} \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} &\sim -\frac{3azx^2}{r^5}\end{aligned}\quad (7.9)$$

Utilizando (7.8) em (7.9), obtemos que

$$\begin{aligned}F_1 &= \int_{\sigma} \left[av \frac{x}{r^3} \left(1 - \frac{3x^2}{r^2} \right) \underline{i} - \frac{3avyx^2}{r^5} \underline{i} - \frac{3av2x^2}{r^5} \underline{k} - \underline{i} \left(p_0 + \frac{2vx}{r^3} \right) \right] d\underline{S} \\ &= - \int_{\sigma} 3av \left(\frac{x^3}{r^5} \underline{i} + \frac{yx^2}{r^5} \underline{i} + \frac{2x^2}{r^5} \underline{k} \right) d\underline{S} - \int_{\sigma} p_0 \underline{i} d\underline{S} \\ &= - \int_{\sigma} 3av \frac{x^2}{r^5} \underline{r} d\underline{S} - \int_{\sigma} p_0 \underline{i} d\underline{S} \\ &= - \int_{\sigma} 3av \frac{x^2}{r^5} \underline{r} d\underline{S} - 0\end{aligned}\quad (7.10)$$

O último termo é zero, pois

$$\int_{\sigma} p_0 \underline{i} d\underline{S} = \int_V dw(p_0 \underline{i}) dx = 0$$

Mas

$$\begin{aligned}\frac{d\underline{S}}{r^2} &= \underline{r} \sin \theta d\theta d\phi \\ \frac{x^2}{r^2} &= \cos^2 \theta \\ F_1 &= -3av \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi \\ &= -4\pi av, \quad a = -\frac{3V_0R^3}{2} \\ &= 6\pi v V_0R, \quad \text{utilizando (7.10)}\end{aligned}$$

No caso $\rho \neq 1$,

$$v \rightarrow A = \gamma \rho e F_1 = 6\pi \nu \rho V_0R \quad (7.11)$$

A expressão (7.11) foi utilizada por Millikan [12] em uma famosa experiência para medir a carga eletrônica.

7.2 Algumas considerações matemáticas sobre cisalhamento.

7.2.1 Introdução

Um dos desafios teóricos apresentados pelo problema de turbulência em sistemas de fluidos é derivar resultados quantitativos diretamente das equações do movimento - as Equações de Navier-Stokes. Na ausência de soluções analíticas exatas que correspondem a fluxos turbulentos, a maior parte das abordagens teóricas consistem em tratamentos aproximados de um tipo ou outro, partindo da imposição de suposições estatísticas e truncagem de hierarquia de momento, até a introdução de hipóteses escalares [16]. Resultados rigorosos seguem diretamente do modelo primário, sendo assim importantes para conferir a validade das aproximações, e para avaliação quantitativa da qualidade de predições de teorias secundárias.

Neste artigo se estuda especificamente numa quantidade física específica, a taxa de dissipação de energia viscosa, e estabeleceron um método para su estimação prática e rigorosa diretamente das equações de movimento (Equações de Navier-Stokes incompressíveis para um fluido Newtoniano) para fluxos boundary-driver. O método consiste em derivar princípios variacionais para limites na taxa média de dissipação de energia no tempo, utilizando uma decomposição referida como o método de “background flux”. Os princípios variacionais aplicam-se em fluxos laminares e turbulentos e, com modificações apropriadas, para forças externas ou sistemas conduzidos termicamente.

A taxa de dissipação de energia em fluxos boundary-driver é de interesse fundamental para aplicações, pois em uma condição de estado estacionario, é a taxa na qual o trabalho deve ser realizado contra às forças de arraste viscosas para forçar as condições de fronteira. Limites na taxa de dissipação de energia traduzem-se em limites na magnitude das forças de arraste exercidas pelo fluido nas fronteiras. Por exemplo, se um fluido viscoso é cisalhado entre placas paralelas como na figura (7.1), então a potencia deve ser gastado por um agente externo para manter a placa num estado de movimento com respeito à outra. Se a placa do fundo é fixa e a placa do topo está movendo-se uniformemente a velocidade U , então a taxa média de dissipação de energia viscosa no fluido é o produto FU , onde F é a média das forças de arrasto exercida pelo fluido na placa. Outro exemplo fundamental é esboçado na figura (7.2). Uma esfera que se move à velocidade constante U através de um meio viscoso que deve estar sujeita a uma força que contraria a força líquida do fluido em sua superfície. Na média em um estado estacionario, a taxa de dissipação de energia é FU , onde F é a magnitude comum à força de arrasto.

Um ponto importante que é freqüentemente ignorado no trabalho teórico em problemas como estes é que geralmente não são conhecidos onde o modelo primário admite soluções únicas, ou se as soluções existentes são suaves [2]. Isto é, para três dimensões, não foi mostrado que as soluções das equações de Navier-Stokes incompressíveis podem exibir singularidades dentro de um intervalo finito a partir de condições iniciais arbitrariamente suaves. Este problema matemático tem suas raízes nos fenômenos físicos de alongamentos de vórtice, um dos mecanismos fundamentais de dinâmica turbulenta, não foram resolvidos ainda e deixam em aberto a questão da validade destas equações hidrodinâmicas no regime

turbulento; As equações macroscópicas do movimento são derivadas das considerações microscópicas sobre a suposição que as soluções são livres de singularidades [10]. As existências destas singularidades ainda não foram estabelecidas -correspondendo a uma violação da hipótese de uma separação de escala entre a dinâmica microscópica e as estruturas macroscópicas. Estas considerações significam que resultados rigorosos, livres das hipóteses secundárias ou aproximações adicionais descontroladas, são importante para a avaliação do modelo básico.

Na próxima seção serão formulados princípios variacionais para limites dissipação de energia média no tempo para uma classe de fluxos dirigida por condições de fronteira não-homogênea. A análise engloba, em geral, sistemas fechados, sistemas limitados e abertos, sistemas ilimitados. A base do princípio do limite superior é uma decomposição do campo de fluxo em um “fundo” e uma “flutuação reminiscente”, mas distinto da decomposição de Reynolds no meio e componentes flutuantes. A Seção (7.2.2) culmina com a discussão de um problema de minimização para limites superiores que, quando garantidos fluxos de background de testes, pode ser usado para derivar estimativas explícitas. Como exemplo da aplicação da técnica, na seção (7.2.3) analisamos a geometria de fluxo de cisalhamento fronteira-dirigida, ilustrada na figura (7.1). Combinado com estimativas funcionais elementares, a abordagem variacional leva a limites explícitos na taxa de dissipação de energia e no arrasto, inclusive para este problema com um número alto de Reynolds.

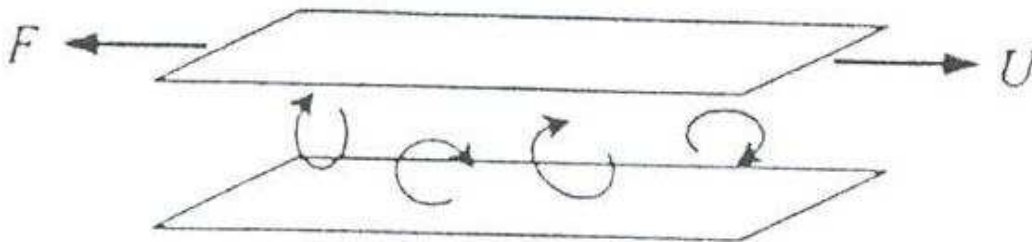


Figura 7.1: Fluido é cisalhado entre placas paralelas. A diferença de velocidade é mantida por uma força que opõe-se ao arraste viscoso e a taxa de dissipação de energia média é a força média gastado por esta força, i.e., o produto dos tempos das forças médias a velocidade FU .

A discussão na seção (7.2.4) cobre vários pontos. Comparamos os resultados rigorosos obtidos para o problema de fluxo de cisalhamento com ambas as predições de um modelo de fechamento estatísticos convencional e recentes resultados experimentais. Esta comparação conduz naturalmente a perguntas de como os limites superiores poderiam ser abaixados, e apresentamos algumas possíveis direções para melhoria, inclusive uma discussão das equações de Euler-Lagrange que conduzem a ótimas estimativas que esta aproximação pode render. Problemas de fluxo abertos como esses sugeridos na figura (7.2) apresentam outros desafios que também esboçados nesta seção. Encerrando a discussão, mostra-se uma conexão entre este princípio variacional de limite superior e uma hipótese heurística de estabilidade marginal para fluxos turbulentos.

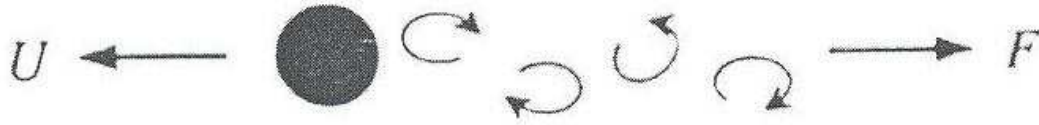


Figura 7.2: Uma esfera que move a velocidade U por um fluido viscoso tem que ter uma força que age para manter seu movimento. A taxa de dissipação de energia no fluido é, em média, o produto dos tempos de força com a velocidade FU .

7.2.2 Princípios variacionais para limites de dissipação de energia.

Suponha um fluido Newtoniano incompressível limitado em região espacial Ω com fronteira estacionária $\partial\Omega$. Denotamos a viscosidade cinética por ν , e sem perda de generalidade a unidade de massa pode ser escolhida de forma que a densidade é 1. A velocidade vetor campo $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ do fluido satisfaz as Equações de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{p} = \nu \Delta \mathbf{u} \quad (7.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (7.13)$$

onde $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ é o campo de pressão, junto com condições de fronteira apropriadas e condição inicial $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$.

A região Ω pode, ou não, ser compacta, e parte da fronteira $\partial\Omega$ pode corresponder a um fronteira rígida não-fixa, fronteiras quando $|x| = 0$, e condições periódicas. Presume-se que o campo de velocidade é prescrito por parte de $\partial\Omega$ que corresponde às fronteiras rígidas, e em particular tomamos o fluxo zero nestas fronteiras. Quer dizer, se \mathbf{n} é a normal na fronteira perto de uma fronteira rígida, então

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} |_{x \in \partial B} \quad (7.14)$$

Todos os componentes do campo de vetor velocidade são especificados em $|x| = \infty$ (se aplicável). Consideram-se fronteiras e condições iniciais organizadas de tal modo que as soluções de energia cinéticas finitas existem (em algum molde de Galilean) e possuem bastante regularidade para manipularmos as equações de movimento e executar operações semelhantes como integrações por partes.

A taxa de dissipação de energia instantânea (por unidade de massa) no fluido está definida como

$$\nu \|\nabla \mathbf{u}\|_2^2 = \nu \sum_{i,j=1}^d \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_2^2 \quad (7.15)$$

onde $\|f\|_2$ denota a norma de L_2 de uma função $f(x)$ em Ω :

$$\|f\|_2 = \left(\int |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (7.16)$$

Estamos interessados com o tempo médio do cálculo da taxa de dissipação de energia,

$$\langle \nu \|\nabla u\|_2^2 \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \nu \|\nabla u(\cdot, t)\|_2^2 dt \quad (7.17)$$

Note que um limite de longo tempo de tempo-finito em média não precisa existir, embora possam estar sujeitos a médias de tempo-finito. Além disso, médias de longo tempo não precisam ser únicas, mesmo se o limite $T \rightarrow \infty$ existir, geralmente dependendo das condições iniciais.

Um princípio variacional para limites inferiores em $\langle \nu \|\nabla u\|_2^2 \rangle_T$ é fácil de formular:

Teorema 7.1 (princípio do limite inferior). *Para toda solução $u(x, t)$, a partir de cada condição inicial $u_0(x)$,*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \langle \nu \|\nabla u\|_2^2 \rangle_T \geq \inf \{ \nu \|\nabla U\|_2^2 / \nabla \cdot U = 0 \} \quad (7.18)$$

com $U(x)$ satisfazendo as condições de fronteira u' s.

Este teorema simplesmente afirma que a menor taxa de dissipação média de energia ao longo do tempo para uma solução das Equações de Navier-Stokes é pelo menos tão grande quanto o menor valor consistente possível com as limitações impostas pela divergência desaparecendo e condições de fronteira, desconsiderando-se as equações de dinâmica. Sua utilidade vem do fato que podemos derivar as equações diferenciais parciais para o campo minimizado. Realmente, o campo de vetor de velocidade $U(x)$ minimizado $\|\nabla U\|_2$ sujeito as limitações na equação (7.18) satisfaz as equações de Stokes,

$$0 = -\nu \Delta U + \nabla P \quad (7.19)$$

$$0 = \nabla \cdot U \quad (7.20)$$

juntamente com as mesmas condições de fronteira de u em ∂B . É válido, pois o sistema de Stokes nas Eqs. (7.19) e (7.20) são as equações de Euler-Lagrange que correspondem ao problema variacional de minimizar o funcional,

$$F\{U\} = \int_B \{ \nu |\nabla U|^2 - 2P \nabla \cdot U \} dx \quad (7.21)$$

onde $-2P(x)$ é o multiplicador de Lagrange para o $\nabla \cdot U = 0$ limitado.

Note que as equações de Stokes são a parte linear das Equações estacionárias de Navier-Stokes para o problema. Normalmente espera-se uma solução única para certo sistema linear elíptico, de forma que uma aproximação direta provê a desenvolve mais baixos saltos explícitos no possível longo-tempo menor taxa média de dissipação de energia.

Formulando um princípio variacional para saltos superiores em $\langle \nu \|\nabla u\|_2^2 \rangle_T$ é mais envolvido. Temos o seguinte teorema:

Teorema 7.2 (princípio do limite superior). *Para cada solução $u(x, t)$, a partir de cada condição inicial $u_0(x)$ integrável ao quadrado,*

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \langle \nu \|\nabla u\|_2^2 \rangle_T \leq \inf \left\{ \nu \|\nabla U\|_2^2 + \int_{\Omega} U \cdot \nabla \nabla \cdot U dx / \nabla \cdot U = 0 \right\} \quad (7.22)$$

U satisfaz a fronteira e as condições espectrais, onde o campo de vetor $V(x)$ é a solução do sistema linear não-homogêneo

$$0 = -\nu\Delta V + 2(\nabla U)_{sym}\cdot V + \nabla P + U\cdot\nabla U \quad (7.23)$$

$$0 = \nabla\cdot V \quad (7.24)$$

com condições de fronteira desaparecendo nas partes rígidas de $\partial\Omega$ e para $|x| \rightarrow \infty$, e condições de fronteira periódicas em fronteiras periódicas. Aqui, $(\nabla U)_{sym}$ é a parte simétrica do tensor ∇U . Se $U\cdot\nabla U$ não é um gradiente, a limitação espectral $U(x)$ é a condição que o operador auto-adjunto que age em V nas Eqs. 7.23 e 7.24 é positivo e inversível. Se $U\cdot\nabla U$ é um gradiente é necessário que o operador seja não-negativo, para o caso em que a limitação espectral pode ser posta como um problema de autovalores,

$$\lambda W = -\nu\Delta W + 2(\nabla U)_{sym}W + \nabla P \quad (7.25)$$

$$0 = \nabla\cdot W \quad (7.26)$$

com W satisfazendo o mesmo desaparecimento ou condição de fronteira periódica em V , e exigindo que os autovalores satisfaçam $\lambda \geq 0$.

Introduzindo um multiplicador de Lagrange para a limitação espectral e derivam-se as equações de Euler-Lagrange associadas na seção (7.2.4) abaixo, mas estas não serão resolvidas aqui. Porém, mesmo sem resolver as equações de Euler-Lagrange esta formulação variacional é útil para estabelecer estimativas superiores rigorosas. Para derivar tais limites temos que produzir um campo de background de teste $U(x)$ satisfazendo a condição de fronteira e a limitação espectral, e - se $U\cdot\nabla U$ não for um gradiente - resolva o sistema linear não-homogêneo (de coeficiente tipicamente não-constante) nas Eqs. (7.23) e (7.24) para V . Idealmente resolve-se o problema de autovalores linear nas Eqs. (7.25) e (7.26) para assegurar a limitação espectral para um candidato a fluxo de background de teste, mas isto nem sempre é necessário. Este processo de construir limites superiores será contrastado com aqueles exigidos quando os limites inferiores forma estabelecidos. Temos que encontrar o campo de velocidade minimizado resolvendo o sistema de Stokes nas Eqs. (7.19)-(7.20).

7.2.3 Fluxo de cisalhamento fronteira-dirigido

Considere o problema mostrado na Fig.3 um fluido de viscosidade ν é limitado entre planos paralelos localizados a $z = 0$ e $z = h$, e tomamos as condição de fronteira periódica nos intervalos em $[0, L_x]$ e $[0, L_y]$, respectivamente nas direções x e y . A velocidade na placa inferior é zero, e ao longo da placa superior é iU ($i, j, e k$ formam os vetores de unidade no $x, y, e z$ direções). Defina o número de Reynolds

$$R = Uh/\nu \quad (7.27)$$

A solução das equações de Stokes para esta estrutura é “fluxo planar de Couette,”

$$U(x) = i(U/h)z \quad (7.28)$$

$$P(x) = \text{constante} \quad (7.29)$$

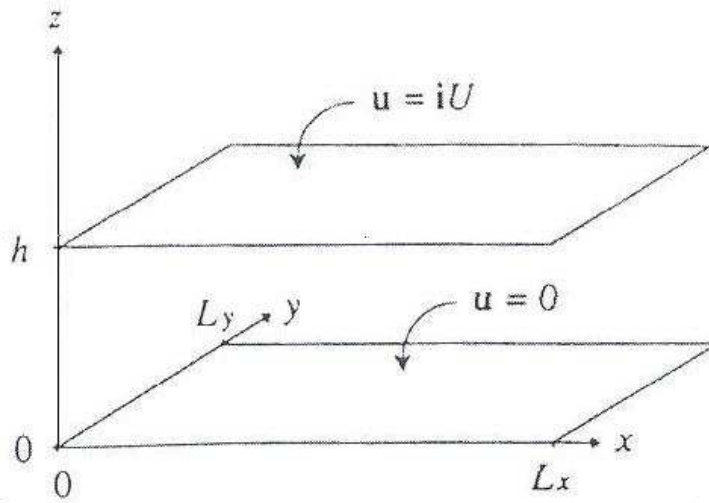


Figura 7.3: Placas de dimensão $L_x \times L_y$ estão separados por uma altura h na direção de z . A placa em $z=0$ é estacionária e em $z = h$ está movendo-se a velocidade U na direção de x . As condições de fronteira são periódicas nas direções de x e y .

A taxa de dissipação de energia neste fluxo é

$$\nu \|\nabla u\|_2^2 = \nu \frac{U^2}{h^2} L_x L_y h \quad (7.30)$$

e para qualquer solução das Equações de Navier-Stokes com estas condições de fronteira,

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \langle \nu \|\nabla u\|_2^2 \rangle_T \geq \nu \frac{U^2}{h^2} L_x L_y h \quad (7.31)$$

A força exigida para deslizar a placa superior sobre o fundo lubrificado pelo fluido é a taxa total e dissipação de energia por unidade de velocidade, que também é a tensão τ de cisalhamento da parede r vezes a área das placas. Quando o fluido está no estado laminar dado pela Eq. (7.28), a força mínima é

$$F_{min} = \tau_{min} L_x L_y h \quad (7.32)$$

Esta é a expressão familiar para a força de arrasto em textos elementares de física, proporcional ao produto da viscosidade, a taxa de cisalhamento, e a área de contato. É útil expressar esta força em termos adimensionais. Medindo comprimento, massa, e tempo em unidades do parâmetro geométrico h e os parâmetros material $\rho = 1$ e ν , temos

$$h^2 \tau_{min} / \nu^2 = Uh / \nu = R \quad (7.33)$$

O número de Reynolds é então, precisamente, a medida da tensão mínima (média ao longo do tempo) necessária aplicada para a manutenção das condições de fronteira.

Neste exemplo a solução das equações de Stokes satisfaz

$$U \cdot \nabla U = 0 \quad \text{e} \quad \Delta U = 0,$$

também é uma solução estacionária das Equações de Navier-Stokes para esta geometria. O baixo número de Reynolds deste perfil da velocidade linear estacionária é de fato não-linearmente estável [6], de forma que um único limite ao longo do tempo existe para todas condições iniciais de energia finita. Esta situação é especial porque a situação da equação Stokes para o limite inferior na taxa de dissipação de energia não é genericamente uma situação estacionária das Equações de Navier-Stokes. Quando for, entretanto, o fluxo minimizado pode ser percebido e assim o limite inferior é agudo. Quando a solução minimizada das equações de Stokes não é solução das Equações não-lineares completas de Navier-Stokes, o limite inferior nunca pode ser obtido. Para produzir um limite superior temos que prover um fluxo de background teste livre de divergência que satisfaça a fronteira e as condições espectrais. O perfil do fluxo linear Couette na Eq. (7.28) satisfaz a condição de fronteira, e um lugar natural para se começar a investigar é a escolha $U(x) = iU_z/h$ que satisfaz a condição espectral. O princípio variacional Rayleigh-Ritz habitual implica que a limitação espectral $U(x)$ é equivalente a positividade de um certo funcional. Quer dizer, a limitação espectral pode ser expressa como a condição

$$\int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy \int_0^h dz \left\{ \frac{1}{2} v |\nabla v|^2 + v \cdot (\nabla U)_{sym} \cdot v \right\} \geq 0 \quad (7.34)$$

para todos os campos de vetores livres de divergência $v(x) = iv_x(x, y, z) + jv_y(x, y, z) + kv_z(x, y, z)$ periódicos em, respectivamente, $[0, L_x]$ e $[0, L_y]$ nas direções x e y e satisfazendo a condição de fronteira $v(x, y, 0) = 0 = v(x, y, h)$. Quando $U \cdot \nabla U = 0$, o sinal $>$ na Eq. (7.34) pode ser substituído pelo sinal \geq . Para fluxo de Couette,

$$(\nabla U)_{sym} = U/2h(ik + ki) \quad (7.35)$$

assim a condição é

$$\int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy \int_0^h dz \left\{ \frac{1}{2} v |\nabla v|^2 + (U/h)v_x v_z \right\} \geq 0 \quad (7.36)$$

O termo $\sim |\nabla v|^2$ no integrando do funcional na Eq. (7.36) é positivo, mas o segundo termo em $\sim v_x v_z$ é de sinal indefinido. Assim não será surpreendente que o termo positivo domina os baixos números de Reynolds, enquanto correspondendo a v grande ou U pequeno. Esta expectativa pode ser estabelecida formalmente calculando as magnitudes relativas das duas condições. De acordo com a desigualdade de Schwarz e a relação $2ab \leq a^2 + b^2$,

$$\left| \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy \int_0^h dz \right| \leq \|v_x\|_2 \|v_z\|_2 \leq \frac{1}{2} \|v\|_2^2 \quad (7.37)$$

Como cada componente de v é periódico em x e y e desaparece em $z = 0$ e $z = h$, a desigualdade de Poincaré implica

$$\|v\|_2^2 \leq \frac{h^2}{\pi^2} \|\nabla v\|_2^2 \quad (7.38)$$

Então,

$$\int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy \int_0^h dz \left\{ \frac{1}{2} v |\nabla v|^2 + (U/h)v_x v_z \right\} \geq \frac{v}{2} \left[1 - \frac{R}{\pi^2} \right] \|\nabla v\|_2^2 \quad (7.39)$$

Se $R \leq \pi^2 \sim 10$, então o perfil de fluxo de Couette satisfaz a condição espectral e podemos afirmar que sua taxa de dissipação é um limite superior bem como um limite inferior. Quando R for maior que isto, então este argumento já não assegura que a limitação espectral seja satisfeita pelo fluxo de Couette e outros perfis devem ser experimentados derivando uma estimativa superior. (Notamos que este limite grosseiro, $R \leq \pi^2$ sob o qual o limite laminar é realizado é muito conservativo).

O desafio técnico para R maiores é escolher um campo de fluxo de background livre de divergência que satisfaz as condições de fronteira nas placas, mas que também satisfaz a limitação espectral. Recorrendo à Eq. (7.34), é aparente que isto só será possível se o termo $|\nabla v|^2$ domina o termo de $v \cdot (\nabla u)_{sym} \cdot v$ para a classe pertinente de campos de vetor $v(x)$. Como sugerido pela invariância da translação do problema nas direções x e y , restringiremos nossa atenção ao fluxo de background teste da forma

$$U(x) = i\phi(z), \quad (7.40)$$

onde o perfil da função ϕ satisfaz a condição de fronteira $f(0) = 0$ e $\phi(h) = U$. A limitação espectral é expressa então,

$$\int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy \int_0^h dz \left\{ \frac{1}{2} v |\nabla v|^2 + \phi' v_x v_z \right\} \geq 0 \quad (7.41)$$

Um perfil com $\phi' = 0$ bastaria, entretanto ϕ não pode satisfazer suas condições de fronteira. Lembrando que as condições de fronteira em v exigem que v_x e v_z desapareçam em $z = 0$ e $z = h$, vemos que pode ser possível satisfazer a limitação espectral com uma escolha de perfil onde a taxa de cisalhamento $\phi'(z)$ é pequena na maioria do intervalo $[0, h]$, mas onde necessariamente os valores de ϕ' não desaparecem estão concentrados próximos a 0 e h onde os componentes de v são relativamente pequenos. Este resultado esperado pode ser percebido no perfil de fluxo de background,

$$\phi = \begin{cases} Uz/2\delta & 0 \leq z \leq \delta \\ U/2 & \delta \leq z \leq h - \delta \\ (U/2)\delta(z - h + 2\delta) & -\delta \leq z \leq h \end{cases} \quad (7.42)$$

ilustrado na figura 7.4 recorreremos ao parâmetro δ como “densidades da camada limite”. A um determinado valor de R , δ será ajustado para assegurar que a limitação espectral seja satisfeita. Como será mostrado abaixo, o menor δ é escolhido, o funcional mais positivo na Eq.(7.41) será, embora às custas de um deficiente (maior) limite superior na taxa de dissipação de energia.

Para ver como isto funciona, limita-se o termo de $\phi' v_x v_z$ na Eq.(7.41). Assim, temos

$$\int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy \int_0^h dz \left\{ \frac{1}{2} v |\nabla v|^2 + \phi' v_x v_z \right\} \geq \frac{v}{2} \left[1 - \frac{U\delta}{4v\sqrt{2}} \right] \|\nabla v\|_2^2 \quad (7.43)$$

e a espessura da camada limite pode ser ajustada de forma que a condição espectral é cumprida escolhendo

$$\delta = 4\sqrt{2}(v/U) = 4\sqrt{2}hR^{-1} \quad (7.44)$$

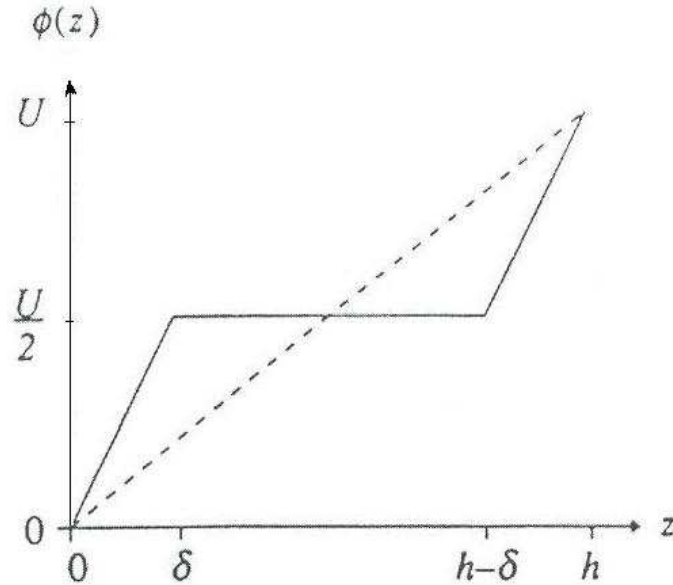


Figura 7.4: Perfil de fluxo de fundo $\phi(z)$. A linha direta é o fluxo planar de Couette.

Para fluxos de background da forma em Eq. (7.40) $U \cdot \nabla U \equiv 0$ e a solução para o campo auxiliar V no teorema 7.1 é $V \equiv 0$. Assim o limite superior na taxa de dissipação de energia que corresponde à restrição na Eq. (7.44) é

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup \langle \nu \|\nabla u\|_2^2 \rangle = \nu L_x L_y \int_0^h \phi'(z)^2 dz = \frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{U^3}{h} L_x L_y h \quad (7.45)$$

Este é um limite superior rigoroso na dissipação de energia, válido quando $R \geq 8\sqrt{2}$ tal que $\delta \leq h/2$. Isto é interessante por várias razões. Primeiro, é independente da viscosidade de acordo com a escala Kolmogorov de dissipação de energia turbulenta. Além, o prefactor $(8\sqrt{2})^{-1} \approx 0.088$ é substancialmente menor que $O(1)$ indicando que este resultado é mais que um argumento de análise dimensional formalizada. Além disso, nossa análise, e em particular o perfil de background na Eq. (7.40), sugere a forma da camada limite genérica dos fluxos com alto número de Reynolds. A limitação espectral leva a considerar a estrutura de camada limite para as configurações de fluxo de background de teste. O limite superior na média da força de arrasto implicada por Eq. (7.45) é $F \leq F_{max}$ onde

$$F_{max} = \tau_{max} L_x L_y = 1/(8\sqrt{2}) (U^2 L_x L_y), \quad (7.46)$$

e em termos adimensionais temos

$$\frac{h^2 \tau_{max}}{\nu^2} = \frac{U^2 h^2}{8\sqrt{2} \nu^2} = \frac{R^2}{8\sqrt{2}} \quad (7.47)$$

Resumindo os resultados desta seção, foi provado que para o fluxo de cisalhamento de fronteira dirigida considerado, o arraste viscoso $(h^2 \tau / \nu^2)$ é limitado acima e abaixo em termos

do número de Reynolds de acordo com

$$R \leq \frac{h^2 \tau}{\nu^2} = \frac{R^2}{8 \sqrt{2}} \quad (7.48)$$

7.2.4 Discussão

É de interesse comparar os limites analíticos rigorosos derivados na seção anterior com teorias aproximadas ou com experiências. Na figura (7.5), delineamos os limites superiores e inferiores rigorosos derivados em Sec. (7.2.2) junto com os resultados da aproximação de fechamento, com o valor habitual do parâmetro ajustando. A teoria prediz a “lei de fricção logarítmica” para o arraste com comportamento assintótico quando $R \rightarrow \infty$,

$$\frac{h^2 \tau}{\nu^2} \rightarrow \frac{k^4 R^2}{4(\ln R)^2} \approx 0.04 \frac{R^2}{(\ln R)^2} \quad (7.49)$$

onde a constante de Von Kármán (o parâmetro ajustando k) tem valor nominal $k \equiv 4/10$. Isto será comparado com o limite superior derivado,

$$\frac{h^2 \tau}{\nu^2} \leq \frac{R^2}{8 \sqrt{2}} \approx 0.088 R^2 \quad (7.50)$$

O alto R da teoria e a estimativa superior rigorosa tem o mesmo número de expoentes de Reynolds e um prefactor comparável, mas a teoria aproximada tem fatores logarítmicos adicionais. A predição da teoria e os resultados da análise rigorosa podem ser comparadas com recentes números altos de Reynolds analisados em fluxos turbulentos entre cilindros concêntricos ([8], [9]), pelo menos no limite de relação de aspecto grande e uma abertura estreita. (Um cálculo semelhante a isso na sec. (7.2.3) pode ser levado em coordenadas cilíndricas apropriadas para a geometria do cilindro concêntrica, rendendo o mesmo limite assintótico como na Eq. (7.50) [1].) o ajuste para os dados experimentais de [9] também é graficado na Fig. 7.5, mostrando que a lei de fricção logarítmica ajusta muito bem os dados experimentais dentro da distância $R \equiv 10^4 - 10^6$. Isto conduz à conjectura razoável que a lei de fricção logarítmica empírica aproximada pode estar capturando o comportamento assintótico quantitativamente. Se este é o caso, então a estimativa superior na Eq. (7.50) - pelo menos tão distante a medida que a dependência do número de Reynolds é afetada - é agudo para dentro de logaritmos.

Idealmente, o problema variacional para o melhor campo de fluxo de background no teorema (7.2) será resolvido exatamente, enquanto rendendo as melhores estimativas que este método tem a oferecer. Na aplicação na Sec. (7.2.3), foram tomados dois cortes pequenos para obter resultados explícitos. Primeiro foram provados perfis de teste de uma classe muito restrita de funções, isto é, piecewise simples funções lineares de uma variável como na figura (7.4). Isto era feito principalmente para conveniência analítica. Segundo, a condição espectral no perfil não foi verificada explicitamente. Foram empregadas estimativas elementares e

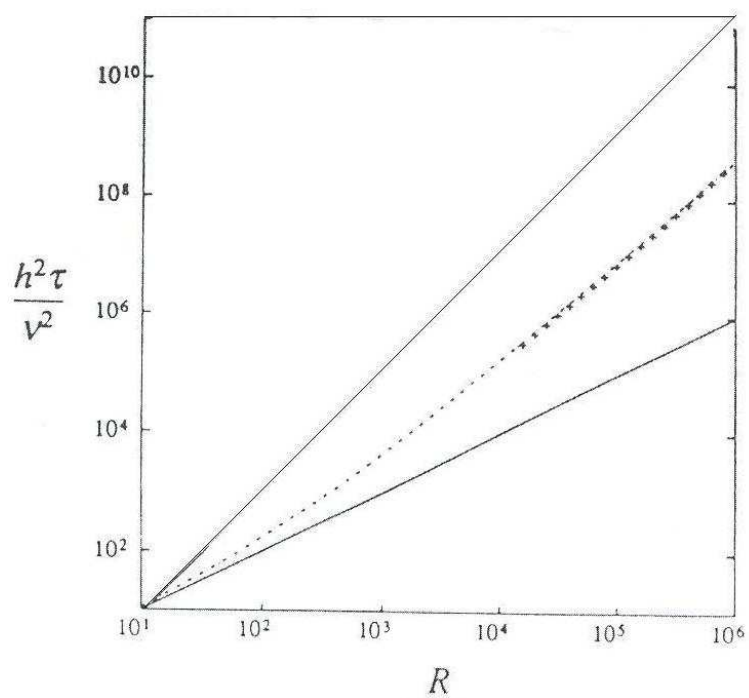


Figura 7.5: Arraste viscoso e número de Reynolds. Linhas sólidas são os limites superiores e inferiores de Eq. (7.48).

um pouco grosseiras para assegurar que a limitação seja satisfeita. Em toda a probabilidade a limitação acima é satisfeita resultando uma estimativa melhor do limite.

O que está sendo negligenciado na verificação da limitação espectral para o piecewise perfis lineares na Séc. (7.2.3) é a restrição divergência-livre nas funções no domínio do operador nas Eqs. (7.25) e (7.26) ou, equivalentemente, no domínio do funcional na Eq. (7.41). Para otimilização confira a limitação espectral para um determinado perfil de background de teste, o problema de autovalores na Eqs. (7.25) and (7.26) realmente deveria ser resolvido exatamente, e os menores autovalores deveriam ser determinados como um funcional do perfil de background de teste ϕ . No caso de piecewise linear $\phi(z)$, o problema de autovalores é um conjunto de equações diferenciais de coeficiente lineares, piecewise-constantes. Estas equações foram resolvidas exatamente em duas dimensões ($u_y = 0 = v_y, \partial/\partial y = 0$) para os perfis lineares piecewise, rendendo o mesmo poder-lei de R2 limitada no arraste, mas com o prefator reduzido mais que uma ordem de magnitude [4].

O próximo passo será derivar o perfil optimal do princípio variacional, a limitação espectral conduz a um tipo interessante de problema variacional para o fluxo de background optimal. Um problema variacional mais simples com tal limitação espectral (resultando um problema de escalar do relaxamento da condição divergência-livre no teste funciona para a condição espectral) foi resolvido recentemente exatamente [3], rendendo equações de Euler-Lagrange da forma não-linear denominada equação de Schrödinger. A função de perfil "optimal" foi computada analiticamente, e o limite superior resultante tem escala igual à na Eq. (7.50) com um prefactor ligeiramente melhorado. Queremos acentuar que o fluxo extremum do problema variacional não será, nem significa ser, um fluxo ruim no senso habitual de teoria de turbulência estatística. Rendendo as seguintes lições:

- (i) obrigando a condição divergência-livre na limitação espectral exatamente para um perfil não-optimal, e
- (ii) achando o perfil optimal enquanto relaxando a condição divergência-livre na limitação espectral, é que qualquer aproximação rende o tipo Kolmogorov pesando na Eq. (7.50). Isto indica melhoria qualitativa nos limites, na forma de correções para escalamento, requererá que resolvamos ambos os problemas simultaneamente.

As equações de Euler-Lagrange para o perfil optimal são não-lineares e ainda não solucionado. Ilustramos a derivação agora considerando (por simplicidade) o exemplo de fluxos de duas dimensões no plano

$$x - z \quad (u_y = 0 = v_y, \frac{\partial}{\partial y} = 0).$$

Restringindo atenção para fluxos de background com planos paralelos, o princípio de variacional do limite superior pode ser declarado,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{L_x h} \langle v \| \nabla u \|_2^2 \rangle_T \leq \inf \left[v \frac{U^2}{h^2} + \frac{v}{h} \int_0^h \Phi(z)^2 dz / \int_0^h \Phi(z) dz = 0, \lambda_0\{\Phi\} \geq 0 \right] \quad (7.51)$$

7.2. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES MATEMÁTICAS SOBRE CISALHAMENTO. 137

onde $\Phi(z)$ é a divergência do cisalhamento de background do perfil de Couette e $\lambda_0\Phi$ é o menor autovalor do problema de valor de fronteira,

$$\lambda u = -v\Delta u + \frac{\partial p}{\partial x} + [U/h + \Phi(z)]w \quad (7.52)$$

$$\lambda w = -v\Delta w + \frac{\partial p}{\partial z} + [U/h + \Phi(z)]u \quad (7.53)$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (7.54)$$

onde as componentes $u(x, z)$ e $w(x, z)$ desaparecem em $z = 0$ e $z = h$, e é periódico em x . É fácil ver que o conjunto do quadrado-completo médio - o zero da função $\Phi(z)$ satisfaz a limitação espectral $\lambda_0\{\Phi\} \geq 0$ é convexo, assim não desaparecendo no extremo acontecerão na fronteira deste conjunto.

Conseqüentemente a desigualdade pode ser substituída por uma igualdade, $\lambda_0\{\Phi\} = 0$, e a limitação pode ser imposta pelo método dos multiplicadores de Lagrange. Quer dizer, buscamos pontos críticos do funcional,

$$F\{\Phi\} = \frac{v}{h} \int_0^h \Phi(z)^2 dz + \alpha \int_0^h \Phi(z) dz + \beta \lambda_0\{\Phi\} \quad (7.55)$$

onde α e β são os multiplicadores de Lagrange. As equações de Euler-Lagrange são

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \Phi} = 2\frac{v}{h}\Phi(z) + \alpha + \beta \frac{\partial \lambda}{\partial \Phi} \quad (7.56)$$

Embora o funcional $\lambda_0\{\Phi\}$ não possa ser expresso de qualquer forma explícita, a variação que aparece nas equações de Euler-Lagrange é o resultado da teoria elementar de perturbação de primeira-ordem. Com um $\exp(ikx)$ depende de u , w , e p , podemos substituir $\partial/\partial x$ com ik , eliminando u e p , e podemos expressar tudo em termos de $w(z) = \exp(ikx)w(xz)$ e $w' = dw/dz$:

$$\frac{1}{k} \frac{\delta \lambda_0}{\delta \Phi(z)} = \frac{i[w(z)^* w'(z) - w(z) w'(z)^*]}{\int_0^h [|w'(z')|^2 + k^2 |w(z')|^2] dz'} \quad (7.57)$$

Conseqüentemente as equações de Euler-Lagrange em (7.56) expressam o perfil Φ do cisalhamento em termos das autofunções de $\lambda_0 = 0$, e o problema se torna não-linear de valor de fronteira

$$v \left[\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right] w + ik \frac{d}{dz} \left[\left(\frac{U}{h} + \Phi(z) \right) w \right] + ik \left[\frac{U}{h} + \Phi(z) \right] \frac{dw}{dz} = 0 \quad (7.58)$$

$$\alpha' - \alpha' i [w(z)^* w'(z) - w(z) w'(z)^*] = \Phi(z) \quad (7.59)$$

onde $w(0) = 0 = w(h)$, $w'(0) = 0 = w'(h)$, e α' é ajustado de forma que Φ tem significado zero w é normalizado de acordo com

$$1 = \int_0^h i [w(z)^* w'(z) - w(z) w'(z)^*] dz \quad (7.60)$$

Este é um tipo de equação de Orr-Sommerfield não-linear (surge em estabilidade de hidrodinâmica linear; veja [6]) para qual uma aproximação numérica foi desenvolvida [5], e que poderia ser forçada prosperamente pelas ferramentas de análise assintótica quando $R \rightarrow \infty$.

Considerações técnicas aparte, uma pergunta que está em aberto para o problema do fluxo de cisalhamento é: podemos deduzir a forma funcional da lei de fricção logarítmica, como um limite superior, diretamente das Equações de Navier-Stokes incompressíveis?

Também permanece o desafio de desenvolver decomposições semelhantes do fluxo de background e variacional do limite superior para sistemas abertos com grades gerando turbulência ou para fluxo passando por um objeto sólido. No caso de fluxo passando por uma esfera, a solução das equações de Stokes para o limite inferior rende baixos números de Reynolds clássica fórmula para o “Stokes arrasto”

$$F_{mim} = 6\pi\nu Ur \quad (7.61)$$

onde r é o raio da esfera. $F \equiv U^2 r^2$, mas sem as correções logarítmicas aparentes que surgem na parede limitada pelos fluxos de cisalhamento. Esta expectativa não tem sido mostrada rigorosamente para as Equações de Navier-Stokes incompressíveis.

Há várias complicações técnicas associadas com aplicação de Teorema 7.2 (princípio variacional do limite superior) para este problema. Primeiro, não é tão simples construir campos de vetor divergência-livres contínuos que satisfazem as condições de fronteira de não-deslizamento na superfície da esfera e a limitação espectral. A Solução das equações de Stokes são um campo, mas desde que não seja uma solução exata das Equações de Navier-Stokes a menos que $R = 0$, geralmente não pode produzir um limite superior. Também sabemos que o relativamente simples campo irrotational do vetor divergência-livre que correspondendo a uma solução estacionária exata das equações de Euler para esta geometria, i.e., as Equações de Navier-Stokes com $R = \infty$. Mas o campo irrotational não satisfaz a condição de fronteira de não-deslizamento e assim não pode ser usado para R finito. Um candidato apropriado para o campo de teste poderia ser fabricado por alguns meios, entretanto resta o problema de conferir a limitação espectral em um domínio ilimitado onde o espectro do operador nas Eqs. (7.25) e (7.26) poderia ser contínuo. Além disso, será provável o caso que $U \cdot \nabla U$ não é um gradiente assim o campo auxiliar V terá que ser computado e incluído no limite. Estes problemas serão o objeto de pesquisas futuras.

A limitação espectral conduz a consideração do conjunto completo de autofunções do problema de autovalores associados. Quando o perfil de background estiver próximo do optimal, esta aproximação provê um modo moderno para gerar uma base que é adaptada a problemas de fluxo turbulentos. Será interessante olhar para a estrutura destes campos de fluxos, com a esperança que elementos da dinâmica turbulenta podem ser esclarecidas nestas coordenadas. Outra aproximação variacional para limites em quantidades de fluxo, baseado em uma decomposição em média e fluxo de flutuação, foram desenvolvidas neste século [7]. As predições daquele método [15], ambos o escalamento dos números de Reynolds e as magnitudes do prefator, são geralmente iguais as derivadas diretamente das Equações de Navier-Stokes.

Derivamos o princípio variacional no Teorema (7.2) manipulando as equações de movimento e soluções sem levar em conta a existência ou regularidade das soluções. Embora não é conhecido que soluções únicas existam, soluções fracas denominadas estão disponíveis, que

satisfazem versões integradas da equação de evolução de energia na forma de uma desigualdade (veja, por exemplo, Ref [1]). É suficiente assegurar que a análise é levada a cabo, assim podemos afirmar que os limites variacionais superiores asseguram as soluções fracas das Equações de Navier-Stokes .

Uma observação geral sobre o princípio variacional para os limites superiores é que a limitação espectral pode ser considerada uma condição da estabilidade não-linear no campo de fluxo de background. Quer dizer, $U(x)$ satisfaz a limitação espectral se e somente se uma solução estacionária estável adequadamente não-linear das Equações de Navier-Stokes com as mesmas condições de fronteira, meio viscoso, e um pouco de força aplicada no corpo. Por “adequadamente” não-linear estável queremos dizer que a energia cinética em qualquer divergência se deteriora a uma taxa uniforme na perturbação inicial. Estamos assim esperançosos que, pela aproximação de fluxo de background, métodos e resultados desenvolvidos da teoria de estabilidade não-linear [6] podem ser assumidos em estudos mais gerais não-estacionários e fluxos turbulentos.

O princípio variacional do limite superior derivado neste artigo também pode ser reformulado para fazer uma conexão com um argumento antigo da teoria de turbulência, isto é uma “hipótese de estabilidade” marginal. A idéia de Malkus’ trabalha em transmissão [13], são aqueles fluxos turbulentos que se organizam em marginally configurações estáveis.

A hipótese que um centro turbulento bem misturado é limitado por camadas de limite de laminar ralas cujos thicknesses são determinados pela condição de estabilidade marginal, conduz a predições para as propriedades de transporte globais do fluxo. (Para a geometria cilíndrica de Couette, é a predição de um arraste $\sim R^{5/3}$ dependendo do número de Reynolds [14]). Isto é um princípio heurístico, entretanto nunca foi derivado das equações do movimento. O corolário seguinte do princípio variacional do limite superior é sugestivamente semelhante em essência com a hipótese de estabilidade marginal.

Corolário 7.1. *(princípio de limite superior) Suponha $U(x)$ é uma solução estacionária das equações de Euler [Eqs (7.12) e (7.13) com viscosidade desaparecendo] o qual (i) satisfaz as condições de limite para o problema de Navier-Stokes, e (ii) é não-linearmente estável como se fosse uma solução das equações de Navier-Stokes. Então, $\nu \|\nabla U\|_2^2$ é um limite superior na maior taxa de dissipação de energia tempo-médio para soluções das equações de Navier-Stokes.*

Demonstração. Quando U é uma solução das equações de Euler, $U \cdot \nabla U$ é um gradiente. Então o campo auxiliar $V = 0$ e a limitação espectral é precisamente U ’s estabilidade marginal, na linguagem do método de energia para estabilidade não-linear. \square

Bibliografia

- [1] Constantin, P., SIAM. Rev. 36, 73(1994).
- [2] Constantin, P., and Foias, C.; *The Navier-Stokes Equations*. University of Chicago Press, Chicago, 1988.
- [3] Doering, C., and Constantin, P.(unpublished)
- [4] Doering, C., and Orwoll, M. (unpublished)
- [5] Doering, C., Constantin, P., and Lohse, D. (unpublished)
- [6] Drazin, P. G., and Ried, W. H.: *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1981.
- [7] Howard, N.L., Annu. Rev. Fluid Dyn. 4, 473 (1972).
- [8] Lathrop, D., Fineberg, J., and Swinney, H.: *Turbulent flow between concentric rotating cylinders at large reynolds number*. Phys. Rev. Lett. 68(1992), 1515-1518.
- [9] Lathrop, D., Fineberg, J., and Swinney, H., Phys. Rev. Lett. A 46(1992), 6390.
- [10] Levermore, C., and Golse, F.: *Fluid dinamic limits of kinetic equations I*. J. Stat. Phys. 63(1991), 323-344.
- [11] Lamb, H.: *Hydrodynamics*. 6th ed., Cambridge Univ. Press 1932.
- [12] Millikan, R. A.: *Electrons (+ and -), protons, photons, neutrons, mesotrons, and cosmic rays*. Revised edition. University of Chicago Press, Chicago 1947.
- [13] Malkus, W., Proc. R. Soc. London Ser. A 225, 185 (1954).
- [14] Marcus, P., J. Fluid Mech. 146, 65 (1984).
- [15] Nickerson, E., J. Fluid Mech. 38, 807 (1969).
- [16] Tennekes, H., and Lumley, J.: *A First Course in Turbulence*. MIT Press, Cambridge, MA., 1972.

Capítulo 8

Teoria da Camada Limite Bidimensional

8.1 Introdução

O conceito da camada limite foi introduzido por Ludwig Prandtl em 1904 (ver [19]). A camada limite se origina na condição de fronteira que em fronteiras materiais não deverá existir velocidade tangencial relativa em adição ao critério em que o componente relativo de velocidade normal é zero. Prandtl argumenta que o fluxo pode ser dividido na região próxima à superfície, onde as propriedades viscosas do fluido dominavam devido à condição de velocidade relativa zero e a região mais distante onde o fluido poderá ser considerado ideal.

8.2 Equações da camada limite para fluxo ao longo da superfície plana

Iniciamos estabelecendo as equações para um fluxo bidimensional de um fluido com pequena viscosidade ao longo da superfície plana.

As equações do movimento e continuidade para fluxos bidimensionais são:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (8.3)$$

Onde o xz -plano é tomado como o plano do fluxo da camada limite com o eixo x ao longo da parede plana e o eixo z perpendicular a ela; assim temos que $u = w = 0$ sobre $z = 0$.

A equação de conservação de massa (8.3) implica à existência de uma função de corrente $\psi(x, z, t)$ tal que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (8.4)$$

e uma equação da quarta ordem para ψ pode obter-se eliminando a pressão p das equações (8.1) e (8.2) e usando (8.4). Com

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

Isso pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi) + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2 \psi) = \nu \nabla^2(\nabla^2 \psi) \quad (8.5)$$

Desde que a única componente de vorticidade é $\eta = \partial u/\partial z - \partial w/\partial x = \nabla^2 \psi$, (8.5) pode também escrever-se na forma

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \nu \nabla^2 \eta \quad (8.6)$$

Para derivar a forma limite, uma forma adimensionalizada das equações é conveniente. Se l é uma longitude típica, U uma velocidade típica, e

$$Re = lU/\nu$$

el correspondente número de Reynolds para o fluxo em sua totalidade, se faz a seguinte escolha de variáveis

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{l}, & Z &= \frac{Re^{1/2}z}{l}, & T &= \frac{Ut}{l}, \\ U &= \frac{u}{U}, & W &= \frac{Re^{1/2}w}{U}, & P &= \frac{p}{\rho U^2}, \end{aligned} \quad (8.7)$$

Equações (8.1), (8.2) e (8.3) se escrevem

$$\frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} + W \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \quad (8.8)$$

$$\frac{1}{Re} \left[\frac{\partial W}{\partial T} + U \frac{\partial W}{\partial X} + W \frac{\partial W}{\partial Z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \quad (8.9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (8.10)$$

Nas quais as quantidades denotadas por letras maiúsculas são não dimensionais. Com as hipóteses que todas as derivadas nessas equações são del mesmo ordem de magnitude para valores grandes de Re , na seu forma limite são

$$\frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} + W \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \quad (8.11)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial Z} \quad (8.12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (8.13)$$

8.2. EQUAÇÕES DA CAMADA LIMITE PARA FLUXO AO LONGO DA SUPERFÍCIE PLANA 145

As equações (8.11), (8.12) e (8.13) são as equações da camada limite na sua forma adimensionalizada.

O método original de derivar as equações da camada limite, devido a Prandtl ([19]) e Blasius ([2]), está baseado sobre a consideração de aproximar ordem de magnitude. É menos preciso que o argumento antes dado, mas pode ser fisicamente mais fácil de entender. Suponhamos que l é uma longitude típica e U uma velocidade típica, ao longo da camada limite; e que δ é uma longitude típica e W uma velocidade típica, através da camada. Em algum sentido δ é a espessura da camada limite. Então na equação (8.3) os termos $\partial u/\partial x$ e $\partial w/\partial z$ são respectivamente da ordem U/l e W/δ . Conseqüentemente

$$W/U = O(\delta/l)$$

e o quociente δ/l são supostos pequenos comparados com a unidade.

Na equação (8.1) os termos inerciais $u\partial u/\partial x$ e $w\partial u/\partial z$ são agora da ordem U^2/l . Dos dois termos viscosos do lado direito, $\nu\partial^2 u/\partial z^2$, sendo da ordem $\nu U/\delta^2$ é maior que $\nu\partial^2 u/\partial x^2$ por um factor $(l/\delta)^2$, logo o último termo pode ser negligenciado. Se o outro termo viscoso é requerido para ter o mesmo ordem de magnitude como os termos de inércia, segue que $(\delta/l)^2$ é da mesma ordem como ν/UL , ou

$$\frac{\delta}{l} = O(Re^{-1/2}) \quad (8.14)$$

Sobre as hipóteses adicionais que $\partial u/\partial t$ não é maior que os outros termos, equação (8.1) pode simplificar-se como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (8.15)$$

e isto é formalmente equivalente à (8.11).

Na equação (8.2), cada termo o qual involucra uma componente de velocidade é, comparando com os correspondentes termos da equação (8.1), da menor ordem por um factor δ/l ; portanto $\partial p/\partial z$ pode ser negligenciado em comparação com $\partial p/\partial x$. Isto significa que a pressão é quasi constante através da espessura da camada limite e seu valor em qualquer ponto é portanto determinado por as correspondentes condições da corrente principal. Se $U(x, t)$ denota a velocidade da corrente principal, de modo que

$$-\rho^{-1}\partial p/\partial x = \partial U/\partial t + U\partial U/\partial x,$$

a eliminação da pressão de (8.15) da

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, t) = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} \quad (8.16)$$

Esta equação foi derivada por Kármán (ver [11]) buscando uma solução de (8.5) na forma

$$\psi = \nu^{1/2}\Psi(x, z\nu^{-1/2}, t).$$

8.3 Equações da camada limite para um fluxo ao longo da superfície curva

Quando a superfície na qual a forma da camada limite é curva, os métodos usados na seção (8.2) devem ser modificados para tomar em consideração a curvatura. As equações gerais do movimento bidimensionais de um fluido viscoso com respeito a um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais são (ver [22]):

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_3 \omega_2 = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{1}{2} v_3^2 \right) + \frac{\nu}{h_3} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} \quad (8.17)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} - v_1 \omega_2 = -\frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{1}{2} v_3^2 \right) - \frac{\nu}{h_1} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \quad (8.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (h_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 v_3) = 0 \quad (8.19)$$

onde

$$\omega_2 = \frac{1}{h_1 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 v_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} (h_3 v_3) \right\} \quad (8.20)$$

é a única componente de vorticidade presente.

As coordenadas x, z da seção (8.2) são agora definidas como distancias medidas ao longo

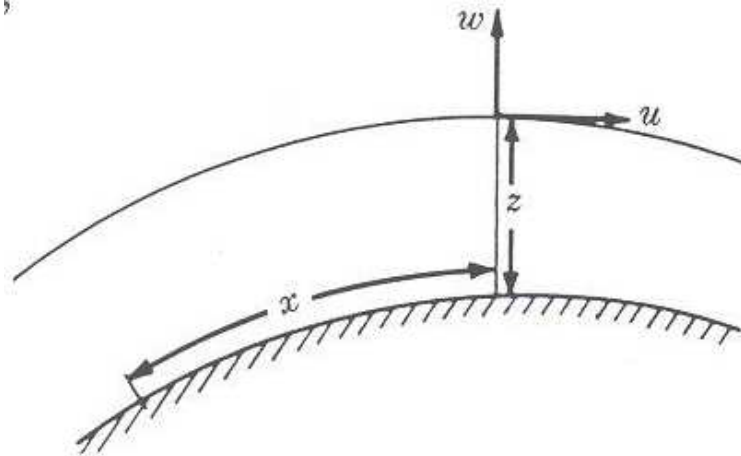


Figura 8.1: Coordenadas para o fluxo da camada limite ao longo de uma superfície curva

da parede e em ângulo recto à ela, de modo que estas formam um conjunto de coordenadas curvilíneas ortogonais. As correspondentes componentes de velocidade são então u, w respectivamente. Estas coordenadas e componentes de velocidade se fazem adimensionais como anteriormente introduzindo as variáveis X, Z, U, W . Quando X, Z são tomadas por as variáveis x_1, x_3 usadas nas equações (8.17)-(8.20),

$$h_1 = l(1 + \kappa l Re^{-1/2} Z) = lH, \quad h_3 = lRe^{-1/2} \quad (8.21)$$

8.3. EQUAÇÕES DA CAMADA LIMITE PARA UM FLUXO AO LONGO DA SUPERFÍCIE CURVA 147

onde κ é a curvatura da parede, considerado positivo no caso da figura (8.1), no qual o centro da curvatura esta no lado $z < 0$. Em termos destas variáveis adimensionais, equações (8.17) e (8.19) ficam

$$H \frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} + W \frac{\partial}{\partial Z}(HU) = - \frac{\partial P}{\partial X} + H \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial Z}(HU) - \frac{1}{ReH} \frac{\partial W}{\partial X} \right\} \quad (8.22)$$

e

$$\frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial W}{\partial T} + \frac{U}{H} \frac{\partial W}{\partial X} + W \frac{\partial W}{\partial Z} \right\} - \frac{U^2}{H} \frac{\partial H}{\partial Z} = - \frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \frac{1}{Re^2} \frac{1}{H} \frac{\partial W}{\partial X} - \frac{1}{ReH} \frac{\partial}{\partial Z}(HU) \right\} \quad (8.23)$$

e também

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Z}(HW) = 0 \quad (8.24)$$

De (8.21), quando $\nu \rightarrow 0$, de modo que $Re \rightarrow \infty$, H tende a 1 e $\partial H/\partial X$, $\partial H/\partial Z$ ambos tendem a zero. Então as formas limite de (8.22)-(8.24) quando $\nu \rightarrow 0$ podem verse que são idênticas com as equações (8.11), (8.12), (8.13) obtidas no caso do fluxo sobre uma superfície plana. Assim, quando Re é grande as equações do movimento mudam às equações da camada limite

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (8.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (8.26)$$

as quais tem a mesma forma para o fluxo sobre uma superfície curva como para o fluxo sobre uma parede plana. É necessário que $\partial H/\partial X$ e $\partial H/\partial Z$ sejam pequenos comparados com 1, de modo que $\kappa\delta$ e $\delta l d\kappa/dx$ devem ser pequenos, onde δ é uma medida da espessura da camada limite vista anteriormente. O gradiente da pressão através da camada está dado por (8.23) e (8.21) como aproximadamente

$$\partial P/\partial Z = \kappa l Re^{-1/2} U^2$$

or

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \kappa \rho u^2 \quad (8.27)$$

Isto é so o gradiente de pressão requerido para balancear o efeito centrífugo de fluxo ao redor da superfície curva.

8.4 Condições de fronteira para um fluxo estacionário

Se a superfície na qual a forma da camada limite é fixa e impermeável as condições a ser satisfeitas pela velocidade são $u = w = 0$ em $z = 0$. Segue que as derivadas $\partial u/\partial x$ e $\partial w/\partial x$ são zero na superfície como também é $\partial w/\partial z$, o qual é proporcional à skin friction, não é em geral zero exceto num ponto de separação. Se a superfície é permeável pode haver sucção normal ou “blowing”, nesse caso as condições são

$$u = 0, \quad w = \mp w_s(x) \quad \text{at} \quad z = 0 \quad (8.28)$$

onde $w_s(x)$ é prescrito. Pode haver sucção oblíqua ou “blowing” e então ni u ni w é zero na superfície. A camada limite pode também ocorrer na forma de jato estreito ou um thin wake, em tais casos a linha $z = 0$ é o eixo central e as condições são $\partial u/\partial z = 0$, $w = 0$ pela simetria do fluxo.

No outro extremo, a camada limite deve unir-se suavemente ao fluxo principal. A forma das soluções para as equações da camada limite é tal que a corrente principal deve ser considerado como sendo no infinito. Assim

$$u \rightarrow U(x) \quad \text{as} \quad z \rightarrow \infty \quad (8.29)$$

para cada valor de x .

Finalmente, o perfil da velocidade $u(z)$ deve ser especificado numa seção inicial, digamos em $x = 0$.

Notamos que não restrições explicitas são colocadas sobre w ou em $x = 0$ ou em $z = \infty$ como seria necessário se uma solução de todas as equações viscosas fosse buscada. As soluciones da camada limite no podem em efeito dar valores reais de w em pontos distantes da superfície. A principal razão é que as aproximações da camada limite reduzem as equações do movimento da quarta ordem à terceira ordem, de modo que alguma redução das condições de fronteira essenciais mínima é inevitável. É possível para soluções de camada limite mostrar o comportamento físico correto em todos os limites. Ainda se as condições colocadas anteriormente asseguram a existência de uma solução das equações da camada limite, elas não podem garantir sua unicidade.

8.5 Dissipação de energia, tensão e vorticidade em camadas limite.

Num fluxo bidimensional existe somente uma componente de vorticidade que é a componente normal ao plano do fluxo e sua magnitude é dado em coordenadas cartesianas pela equação:

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (8.30)$$

A mesma expressão é aproximadamente verdadeira se x e z são coordenadas curvilíneas ortogonais (ver seção 8.3) sempre que $\kappa\delta$ seja pequeno.

Num ponto ordinário de uma camada limite, $\partial w/\partial x$ se espera que seja da menor ordem que $\partial u/\partial z$ por um factor Re^{-1} , portanto é usual adotar pela vorticidade a fórmula mais simplificada $\eta = \partial u/\partial z$. Quando $\partial u/\partial z$ é assim mesmo menor, como na imediata vizinhança de um ponto de separação, as derivadas $\partial w/\partial x$, $\partial u/\partial z$ podem ser da mesma ordem de magnitude, e seria melhor reter a expressão exata (8.30).

As componentes normais da tensão perpendicular e paralelas à superfície reta escritas na forma não dimensional são.

$$\frac{p_{xx}}{\rho U^2} = -\frac{p}{\rho U^2} + 2\frac{\nu}{U^2} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8.31)$$

$$\frac{p_{zz}}{\rho U^2} = -\frac{p}{\rho U^2} + 2\frac{\nu}{U^2} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (8.32)$$

Os últimos termos em cada uma destas equações é da ordem Re^{-1} e assim é negligenciável e a aproximação da camada limite é

$$p_{xx} = p_{zz} = -p$$

The shearing stress sobre superfícies paralelas à parede é

$$p_{xx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (8.33)$$

e, como a vorticidade, isso é aproximadamente

$$p_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (8.34)$$

exceto quando é menor. Deve notar-se que (8.33) e (8.34) são idênticos em pontos sobre uma parede impermeável fixa, onde $w = 0$ e $\partial w/\partial x \equiv 0$. Se a parede é curva, sujeita as mesmas restrição como antes, as fórmulas (8.31)-(8.34) são ainda válidas.

A taxa de dissipação da energia por unidade de volume por unidade de tempo em uma camada limite é, (ver [22]), aproximadamente igual a $\mu(\partial u/\partial z)^2$ e isto tem um limite finito quando $Re \rightarrow \infty$. A ordem da magnitude da espessura da camada limite pode ter sido determinado colocando esta condição.

8.6 Espessura da camada limite, energia de dissipação e skin friction

Na maioria de problemas físicos as soluções das equações da camada limite (8.25) e (8.25) são tal que a componente da velocidade u obter seu valor da corrente principal U so na forma assintótica quando $Re^{1/2}z/l \rightarrow \infty$. A espessura da camada é portanto indefinida.

Na prática a abordagem do limite é rápido e um ponto é rapidamente obtido fora do qual a influência da viscosidade é imperceptível. Portanto seria possível considerar a espessura da

camada limite como a distancia δ da superfície fora do qual $u/U > 0.99$, por exemplo, mas não é suficientemente preciso (desde que $\partial u/\partial z$ é pequeno ali) para trabalho experimental e não é de importância na teoria.

A escala da espessura da camada limite pode ser especificada adequadamente mediante certas longitudes capazes da definição precisa, ambas para medida experimental e para estudo na teoria. Estas medidas da espessura da camada limite são definidas como segue:

A espessura do deslocamento δ_1 :

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dz \quad (8.35)$$

A espessura da quantidade do movimento δ_2 :

$$\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dz \quad (8.36)$$

A espessura da energia δ_3 :

$$\delta_3 = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right) dz \quad (8.37)$$

Na figura a continuação (8.2) podemos ver o significado das diversas espessuras anteriormente definidas.

O limite superior de integração é tomado como infinito devido a aproximação assintótica

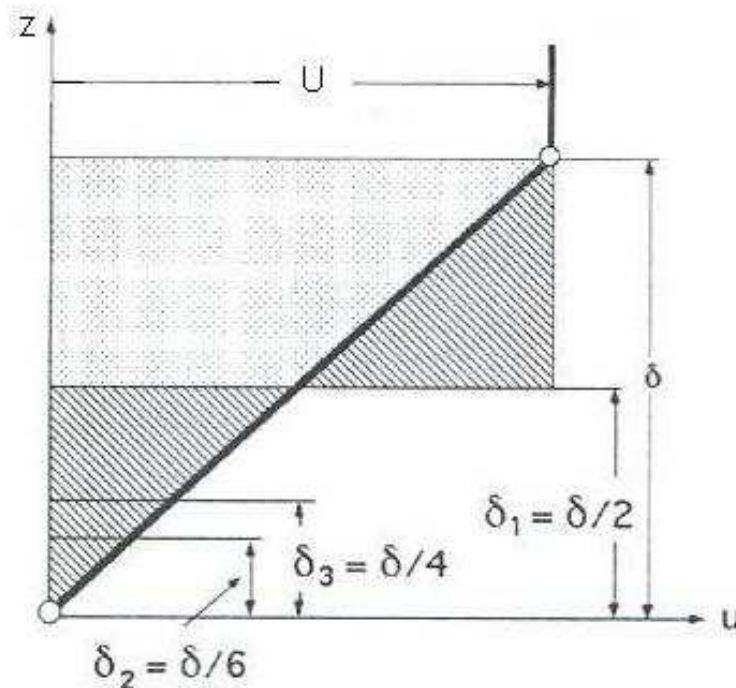


Figura 8.2: As espessuras da camada limite em distribuição triangular

de u/U para 1, mas na prática o limite superior é o ponto fora do qual o integrando é negligenciável.

$U\delta_1$ é a diminuição, devido a camada limite, do fluxo de volume através da normal a superfície; as linhas de corrente do fluxo exterior são assim deslocadas distante da superfície por uma distância δ_1 . Similarmente, $\rho U^2 \delta_2$ é o fluxo do defeito of momentum e $\frac{1}{2}\rho U^3 \delta_3$ é o fluxo do defeito da energia cinética.

Outras quantidades relacionadas a essas espessuras da camada limite são skin friction e a integral de dissipação D . The skin friction τ_w se define como the shearing stress exercido pelo fluido na superfície na qual o fluido flui e é portanto o valor de p_{zx} em $z = 0$, na qual por (8.34) é:

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (8.38)$$

A taxa na qual a energia é dissipada pela ação da viscosidade é $\mu(\partial u/\partial z)^2$ por unidade de tempo por unidade de volume, e D é a integral de isto através da camada:

$$D = \int_0^\infty \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz \quad (8.39)$$

Portanto D é a dissipação total num cilindro de seção transversal pequena com eixo normal à camada por unidade de tempo por unidade de area da seção transversal.

8.7 Equações de momento e da energia

A skin friction e a dissipação são relacionados com a espessura da camada limite por meio das equações as quais apresentam o balance de momento e da energia dentro de uma pequena seção da camada limite e são devidas a Kármán e Leibenson (ver [11] e [14] respetivamente). A equação da energia foi também derivada por Wieghardt (ver [28] e [29]).

A integral de momento:

O mais simples método para obtê-la, como foi mostrado por Pohlhausen (ver [18]), é integrando as equações (8.25) e (8.26). Estas podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} -\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial t}(U - u) + U \frac{\partial U}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x} - w \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 &= (U - u) \frac{\partial u}{\partial x} + (U - u) \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

onde (8.26) foi multiplicado por $(U - u)$. Por adição destes,

$$-\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial t}(U - u) + \frac{\partial}{\partial x}(Uu - u^2) + (U - u) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}(wU - wu)$$

Integrando com respeito a z desde 0 até ∞ temos, desde que $\partial u/\partial z$ e $w(U - u)$ va a 0 quando $z \rightarrow \infty$

$$v \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} (U - u) dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} (Uu - u^2) dz + \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^{\infty} (U - u) dz + w_s U \quad (8.40)$$

onde $w_s = w_s(x) = -w(x, 0)$ é a velocidade de sucção. Quando as integrais são escritas em termos da espessura da camada limite, temos

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{\partial}{\partial t} (U\delta_1) + \frac{\partial}{\partial x} (U^2\delta_2) + U \frac{\partial U}{\partial x} \delta_1 + w_s U \quad (8.41)$$

ou na forma adimensional

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{1}{U^2} \frac{\partial}{\partial t} (U\delta_1) + \frac{\partial}{\partial x} \delta_2 + \frac{\delta_1 + 2\delta_2}{U} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{w_s}{U} \quad (8.42)$$

A derivação original devido a Kármán foi baseado em considerações de momento. É mais simples, mas, para interpretar a equação (8.40), multiplicamos por $\rho \delta x$, como uma equação para a taxa de mudança do momentum defect, $\rho(U - u)$ por unidade de volume, para uma pequena parte da camada limite entre os planos x e $x + \delta x$. No lado direito de (8.40) o primeiro termo representa a taxa de variação local deste momentum defect, o segundo é a taxa de variação devido à convecção através dos planos x e $x + \delta x$ e o último termo representa a convecção através da superfície porosa $z = 0$. Desde que não existe convecção na borda da camada, onde o momentum defect é zero, a taxa variação total é igual a força de fricção oposta, o qual o termo do lado esquerdo, junto com dois termos as quais se cancelam fora da camada limite. Uma desses é a força de pressão oposta

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

por unidade de volume e o outro é a taxa de variação do momento da corrente principal ρU associada com qualquer partícula do fluido na camada limite, ou seja $\rho(\partial U/\partial t + u\partial U/\partial x)$. O net effect desses dois é o termo

$$-\frac{\partial U}{\partial x} \int_0^{\infty} (U - u) dz$$

no lado esquerdo de (8.40), o qual aparece como o terceiro termo do lado direito com o sinal trocado.

A integral da energia:

As equações (8.25) e (8.26), multiplicadas por $2u$ e $(U^2 - u^2)$ respectivamente, são

$$\begin{aligned} -2uv \frac{\partial u}{\partial z^2} &= 2u \frac{\partial}{\partial t} (U - u) + 2uU \frac{\partial U}{\partial x} - 2u^2 \frac{\partial u}{\partial x} - 2uw \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 &= (U^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} + (U^2 - u^2) \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

e por adição segue que

$$\begin{aligned} 2\nu\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - 2\nu\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ = \frac{\partial}{\partial t}(Uu - u^2) + U^2\frac{\partial}{\partial t}\left(1 - \frac{u}{U}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(U^2u - u^3) + \frac{\partial}{\partial z}(wU^2 - wu^2) \end{aligned}$$

Desde que $w(U^2 - u^2)$ e $\partial u/\partial z$ tendem a 0 quando $z \rightarrow \infty$, integrando esta equação com respeito a z de 0 a ∞ temos

$$\frac{2D}{\rho} = \frac{\partial}{\partial t}(U^2\delta_2) + U^2\frac{\partial}{\partial t}\delta_1 + \frac{\partial}{\partial x}(U^3\delta_3) + w_s U^2 \quad (8.43)$$

Isto pode ser escrito na forma adimensional como

$$\frac{2D}{\rho U^3} = \frac{1}{U}\frac{\partial}{\partial t}(\delta_1 + \delta_2) + \frac{2\delta_2}{U^2}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{U^3}\frac{\partial}{\partial x}(U^3\delta_3) + \frac{w_s}{U} \quad (8.44)$$

A integral da energia pode também considerar-se como uma equação para kinetic energia defect $\frac{1}{2}\rho(U^2 - u^2)$ por unidade de volume, é dizer

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \frac{1}{2}\rho(U^2 - u^2)dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{1}{2}\rho(U^2 - u^2)udz + \frac{1}{2}\rho U^2 w_s \\ = D + \rho \frac{\partial U}{\partial t} \int_0^\infty (U - u)dz \end{aligned} \quad (8.45)$$

Nesta equação, o lado esquerdo representa a soma da taxa de variação convectiva local da contribuição da energia cinética . Do lado direito o primeiro termo é a contribuição da dissipação viscosa. O segundo termo é a adição de

- (i) A taxa da energia perdida devido às forças de gradiente de pressão, o qual é

$$u\frac{\partial p}{\partial x} = -u\rho\left(\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x}\right)$$

por unidade de volume

- (ii) A taxa de variação da energia cinética da corrente principal $\frac{1}{2}\rho U^2$ associado com uma partícula do fluido na camada limite, é dizer

$$\frac{\partial(\frac{1}{2}\rho U^2)}{\partial t} + u\frac{\partial(\frac{1}{2}\rho U^2)}{\partial x}$$

por unidade de volume.

8.8 Separação e formação de vórtice

A camada limite próximo de uma placa plana num fluxo paralelo e com incidência zero é particularmente simple pois a pressão estática é constante em todo o campo do fluxo. Desde que fora da camada limite a velocidade fica constante, o mesmo se aplica a pressão porque em o fluxo sem fricção a equação de Bernoulli fica válida. Ademais a pressão fica constante sobre a largura da camada limite numa distancia dada x . Portanto a pressão sobre a largura da camada limite tem igual magnitude como fora da camada limite na mesma distancia, e o mesmo se aplica aos casos das formas arbitrarías de corpos quando a pressão fora da camada limite varia ao longo da parede com a longitude de arco. Este feito se expressa dizendo que a pressão externa é impressed sobre a camada limite. Portanto no caso do movimento passando por uma placa a pressão fica constante em toda a camada limite. O fenômeno da separação da

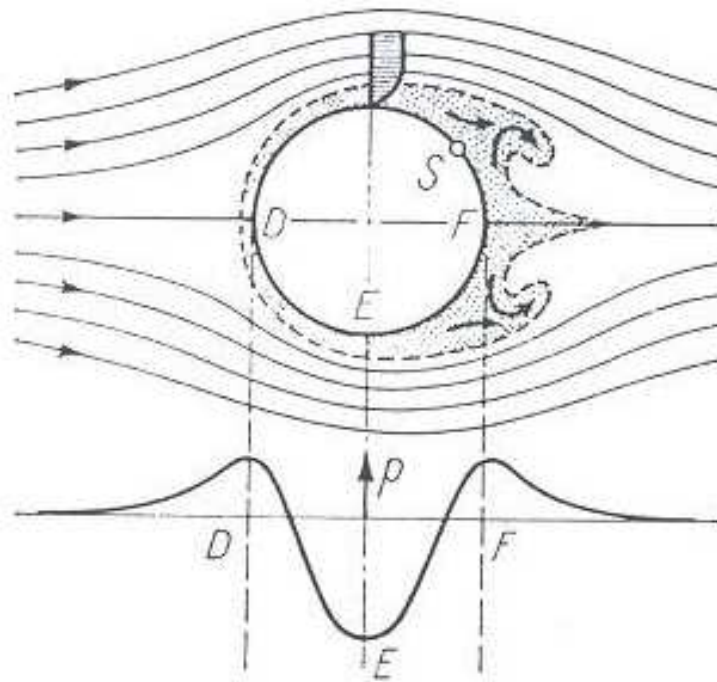


Figura 8.3: Separação da camada limite e formação de vórtice num cilindro circular S=ponto de separação.

camada limite mencionado previamente esta ligado com a distribuição da pressão na camada limite. Na camada limite sobre uma placa não acontece separação quando não ocorre back-flow. Para explicar o fenômeno da separação da camada limite consideremos o fluxo ao redor de um blunt body, por exemplo, ao redor de um cilindro circular como se mostra na figura (8.3). Num fluxo sem fricção, as partículas do fluido são aceleradas na metade rio acima de D até E e desaceleradas na metade rio embaixo de E até F . Portanto a pressão decresce de D até E e aumenta de E até F . Quando o fluxo se inicia encima do movimento no primeiro

instante é quase sem fricção, e permanece desse feito desde que a camada limite fica delgada. Fora da camada limite existe uma transformação da pressão em energia Cinética ao longo de DE , o reverso acontece ao longo de EF , de modo que uma partícula chega a F com a mesma velocidade que tinha em D . A partícula de fluido que se move na vizinhança imediata da parede na camada limite fica sob a influencia do mesmo campo de pressão como aquele fora, pois a pressão externa esta impressed sobre a camada limite. Devido à grande força da fricção na fina camada limite tal partícula consome tanto de sua energia Cinética em seu caminho de D a E que o resto é demasiado pequeno para superar a “pressão da colina” de E até F . Tal partícula não pode mover-se distante na região do aumento da pressão entre E e F e seu movimento é ,eventualmente, detido. A pressão externa o face então mover-se na direção oposta. As fotografias na figura (8.4) ilustram a sucessão de eventos quando o fluxo do fluido começa proximo do lado aguas abaixo de um corpo redondo. A pressão aumenta ao longo do contorno do corpo de esquerda a direita. A camada limite pode ser facilmente reconhecida como se mostrara na figura. Na figura (8.4a) tomada imediatamente depois do inicio do movimento se mostra que o movimento reverso começa aparecer. Na figura (8.4b) o movimento reverso ha penetrado uma considerable distancia e a camada limite tem uma apreciável espessura. Na figura (8.4c) mostra como este movimento reverso origina um vórtice onde seu tamanho aumenta como na figura (8.4d). O vórtice atinge a separar-se depois e mover-se aguas abaixo no fluido. Essa circunstância cambia completamente o campo do fluxo na esteira e a distribuição da pressão sofre um cambio radical, como comparado com um fluxo sem fricção. O estado final do movimento pode deduzir-se da figura (8.5). Na região de redemoinho atrás do cilindro existe uma considerável sucção. Esta sucção causa uma gram resistência de pressão sobre o corpo. A uma grande distância do corpo é possível distinguir um padrão regular de vortices as quais movem-se em forma alternada em sentido horário e anti-horário e o qual é conhecido como trajetória do vórtice de Kármán ([10]), ver figura (8.6). Na figura (8.5) um vórtice movendo-se em uma direção horária pode ser visto a ponto de separar-se do corpo. Kármán ([13]) provou que esses vortices são geralmente instáveis com respeito a pequenas perturbações paralelas assim mesmas. O único arranjo o qual mostra equilíbrio neutral é aquele com $h/l = 0.281$ (figura 8.7). Separação é também importante para as propriedades de elevação de um aerofólio. Em pequenos ângulos de incidência (até aproximadamente 10 graus) o fluxo não se separa de cada lado e aproxima de perto as condições sem fricção (ver figura 8.8a). Com a incidência aumentando existe perigo de separação sobre o lado de sucção do aerofólio, pois a pressão aumenta demais. Para um ângulo dado de incidência, o qual é aproximadamente 15 graus, separação finalmente ocorre. O ponto de separação esta situado bastante próximo detrás do leading edge. The wake, figura (8.8b), mostra uma grande “dead-water” area.

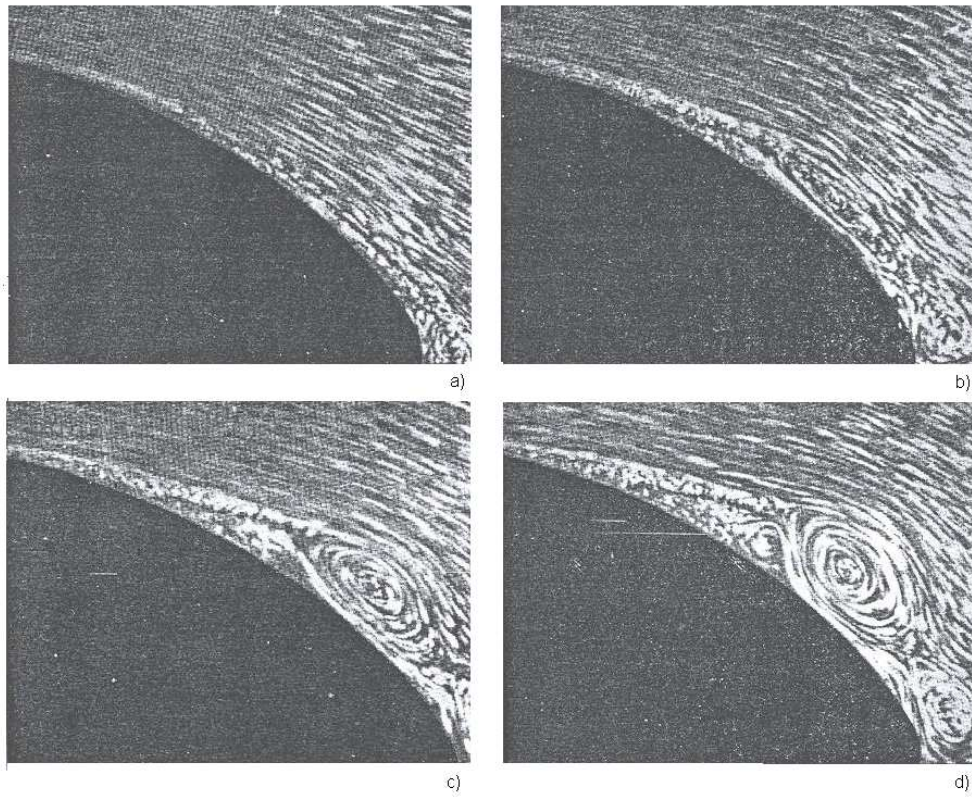


Figura 8.4: Separação da camada limite.

8.9 O teorema de transposição de Prandtl

Prandtl ([20]) observou que desde qualquer solução $u(x, z, t)$, $w(x, z, t)$ das equações da camada limite (8.25) e (8.26) soluções adicionais podem derivar-se escrevendo

$$u^*(x, z, t) = u(x, z + f(x), t) \quad (8.46)$$

onde $f(x)$ é arbitrário. A função de corrente é então

$$\psi^*(x, z, t) = \psi(x, z + f(x), t) \quad (8.47)$$

portanto

$$w^*(x, z, t) = w(x, z + f(x), t) - f'(x)u(x, z + f(x), t) \quad (8.48)$$

Limitando nossa atenção ao fluxo estacionário, por conveniência, as condições de fronteira para u e w em $z = 0$ podem transferir-se a $z = -f(x)$ para u^* , w^* e a condição no infinito (8.29) se manter-se para u^* como também para u . Em particular, desde que $\psi(x, z) - Uz \rightarrow -U\delta_1(x)$

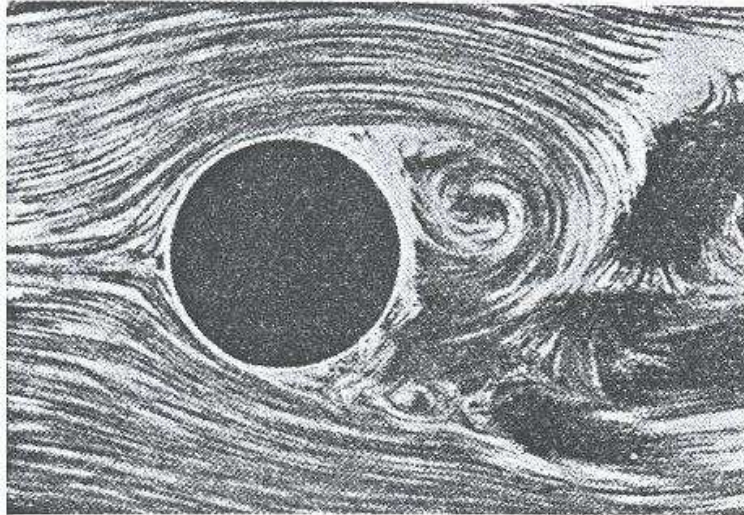


Figura 8.5: Fluxo com completa separação da camada limite.

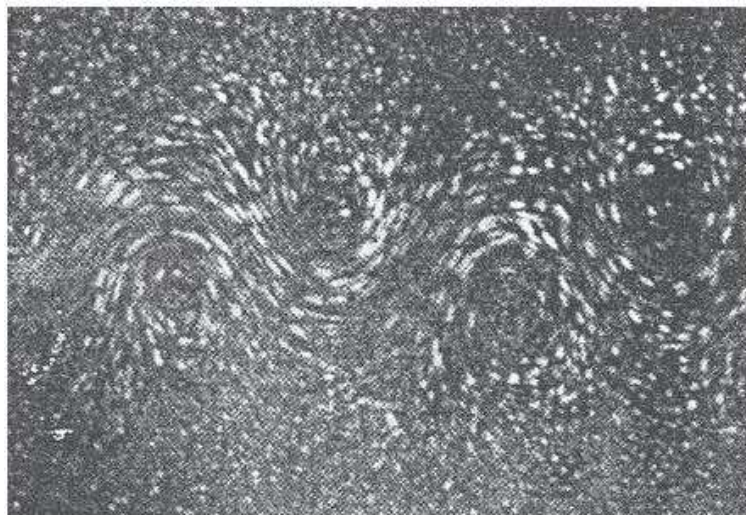


Figura 8.6: Trajetória de vórtice de Kármán.

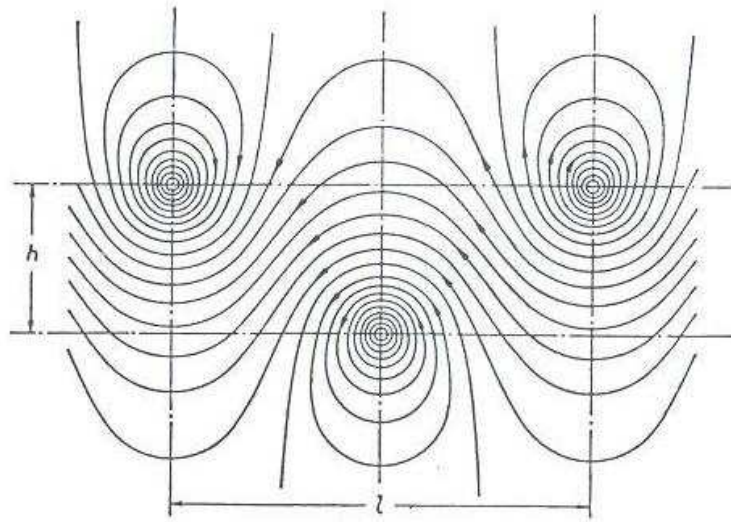


Figura 8.7: Linhas de corrente num sistema de coordenadas movendo-se com a trajetória do vórtice.

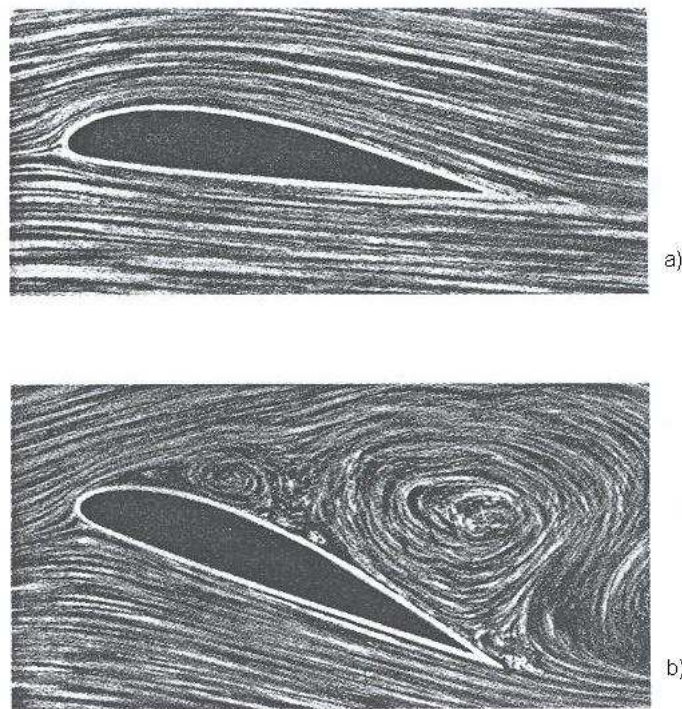


Figura 8.8: Fluxo ao redor de um aerofólio: a) 'sound' flow, b) flux sem separação

8.10. TRANSFORMAÇÕES DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO ESTACIONÁRIO 159

quando $z \rightarrow \infty$, a escolha $f(x) = \delta_1(x)$ nos conduce as condições

$$\begin{aligned} \psi^*(x, z) - Uz &\rightarrow 0 \quad \text{as } z \rightarrow \infty \\ \psi^* &= \frac{\partial \psi^*}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = -\delta_1(x) \end{aligned} \quad (8.49)$$

o qual pode-se utilizar para determinar $\psi^*(x, z)$ e $\delta_1(x)$.

Também, se $u(x, z)$ representa o movimento com back flow, de modo que $u(x, z) = 0$ ambos em $z = 0$ e $z = f(x)$, a solução derivada satisfaz as condições

$$\begin{aligned} u^*(x, 0) &= 0, & w^*(x, 0) &= w(x, f(x)) \\ u^* &\rightarrow U \quad \text{quando } z \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Assim, existe uma nova solução das equações da camada limite com uma certa distribuição de sucção ou blowing. Para uma generalização do problema a um fluxo em três dimensões, com aplicações, ver Glauert ([4]).

8.10 Transformações das equações do movimento estacionário

As equações do movimento para fluxo estacionário numa camada limite são

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ u &= \frac{\partial \psi}{\partial z}, & w &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (8.50)$$

Se $z = 0$ denota uma parede impermeável fixa, as condições de fronteira associadas são $u = w = 0$ e $\psi = 0$. Quando z e ψ tendem a ∞ , $u \rightarrow U(x)$.

Existem dos transformações destas equações as quais são úteis. O primeiro destas transformações (ver [16]) toma como variáveis independentes z e ψ em vez de x e z e usa a variável independente $\chi = U^2 - u^2$ em vez de u . O resultado, obtido por cálculos de rotina é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial x} &= \nu(U^2 - \chi)^{1/2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \psi^2} \\ \psi = 0, \quad \chi &= U^2; & \psi = \infty, \quad \chi &= 0 \end{aligned} \quad (8.51)$$

A variável original z recupera-se da relação

$$z = \int_0^\psi \frac{d\psi}{u} = \int_0^\psi (U^2 - \psi)^{1/2} d\psi$$

e as componentes da velocidade podem determinar-se de

$$u = (U^2 - \chi)^{1/2}, \quad w = \int_0^\psi u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{u} \right) d\psi$$

O shear stress é $\tau = u\mu(\partial u/\partial \psi) = -\frac{1}{2}\mu(\partial \chi/\partial \psi)$ e o ponto de zero skin friction é portanto caracterizado pela condição $\partial \chi/\partial \psi = 0$ em $\psi = 0$.

A equação (8.51) é um exemplo bastante simples de uma equação diferencial parcial do tipo parabólico em sua forma normal. Se χ é dada como uma função de ψ para qualquer valor de x , equação (8.51) implica que $\partial \chi/\partial x$ é automaticamente conhecido, e $\chi(\psi)$ para um valor vizinho de x pode, em princípio, ser calculado. Isto é equivalente a dizer que um perfil de velocidade $u(z)$ num certo valor de x , junto com um conhecimento completo de $U(x)$, a velocidade da corrente principal, é suficiente para determinar condições rio abaixo, ate onde a camada limite aderir-se na parede e fica laminar. Os cálculos numéricos sobre este princípio são afetados pela singularidade possuído pela equação (8.51) onde $\chi = U^2$, é dizer, em qualquer ponto sobre a parede (ver [17]).

A quantidade χ está relacionada com the total head: assim

$$\frac{1}{2}\chi = -\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2\right) + \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}U^2\right)$$

onde o segundo parêntese é constante. A equação (8.51) pode portanto verse como uma equação para a difusão do total head.

A segunda transformação é devida a Crocco (ver [3]), originalmente estudada para camada limite compressível. As equações do movimento se escrevem primeiro como

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial z}$$

onde τ é the shear stress. Então x e u se consideram como variáveis independentes, com z com uma variável dependente. Assim

$$\tau = \mu/(\partial z/\partial u) \quad e \quad z = \mu \int \frac{du}{\tau}$$

Depois de cálculos diretos obtemos

$$\mu \rho u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\tau} \right) + \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} - \mu \frac{dp}{dx} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\tau} \right) = 0 \quad (8.52)$$

No caso especial de uma corrente principal uniforme, $dp/dx = 0$ e (8.52) fica

$$\frac{\mu \rho}{\tau^2} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} \quad (8.53)$$

novamente mostra-se claramente o caráter parabólico da equação diferencial. As condições de fronteira associadas são

$$u = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial u} = 0; \quad u = U, \quad \tau = 0$$

8.11 Analogia com a condução do calor para a camada limite estacionária

Se mostro na seção previa que a equação da camada limite estacionária pode-se transformar numa equação similar a equação do condução do calor; a analogia não é exata desde que a equação da camada limite não é linear. Ainda que, nas regiões fora da camada limite a equação (8.51) é aproximadamente linear e a teoria matemática da condução do calor pode ser utilizada para dar uma solução assintótica apropriada para tal região. Kármán e Millikan ([12]) foram os primeiros a estudar esta analogia nesta maneira. Eles introduziram primeiro um potencial de velocidade da corrente principal

$$\phi = \int_0^x U(x) dx$$

e aparte da diferencia de notação obtida (8.51) na forma

$$\frac{\partial \chi}{\partial \phi} = \nu \frac{u}{U} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \psi^2} = \nu \left(1 - \frac{\chi}{U^2}\right)^{1/2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \psi^2} \quad (8.54)$$

onde χ é pequeno, isto é, fora da camada, esta equação pode-se substituir pela aproximada

$$\frac{\partial \chi}{\partial \phi} = \nu \frac{\partial^2 \chi}{\partial \psi^2} \quad (8.55)$$

isto é equivalente exagerando o termo viscoso de (8.50) na proporção U/u .

As condições de fronteira adotadas por Kármán e Millikan foram

$$\begin{aligned} \psi = 0, \quad \chi = U^2; \quad \psi = \infty, \quad \chi = 0 \quad (\phi > 0) \\ \phi = 0, \quad \chi = 0 \quad (\psi > 0) \end{aligned} \quad (8.56)$$

de modo que existe uma analogia com a condução do calor numa barra semi-infinita inicialmente com temperatura zero e com uma thermometric conductivity igual a ν .

A seguinte objeção pode surgir sobre as condições de fronteira (8.56). A equação aproximada (8.55) deve aplicar-se somente às regiões fora da camada limite, portanto não é formalmente necessário que $\psi = 0$ represente a parede o que o valor de χ em $\psi = 0$ seja igual a U^2 . Com efeito, a adoção da primeira condição de fronteira (8.56) introduz um erro na solução o qual particularmente contra-balança a vantagem de ter linearizado a equação diferencial. Um procedimento melhor, adotado por Tollmien ([24]), é aplicar uma condição de fronteira $\psi = 0, \chi = F_0(\phi)$, onde F_0 é uma função não conhecida, a menos que seja determinado pelo uso de uma "solução interna". Tollmien escreveu a solução de (8.55) na forma

$$\chi(\phi, \psi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\phi F_0(\xi) \frac{\psi/\nu^{1/2}}{(\phi - \xi)^{3/2}} \exp\left\{\frac{-\psi^2/\nu}{4(\phi - \xi)}\right\} d\xi \quad (8.57)$$

e fiz um cambio da variável $\theta = \frac{1}{2}\psi/\sqrt{\nu(\phi - \xi)}$. A equação (8.57) fica

$$\chi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty F_0[\{1 - (a^2/\theta^2)\}\phi] \exp(-\theta^2) d\theta \quad (8.58)$$

onde

$$a = \frac{1}{2}\psi / \sqrt{v\phi} \quad (8.59)$$

Por integrações parciais, assumindo a existência de F'_0 e F''_0 , Tollmien deduziu os seguintes resultados

$$(i) \quad \text{Se } F_0(0) \neq 0, \quad \chi \sim (1/a\sqrt{\pi})F_0(0)\exp(-a^2) \quad (8.60)$$

$$(ii) \quad \text{Se } F_0(0) = 0, \quad \chi \sim (1/a^3\sqrt{\pi})F'_0(0)\phi\exp(-a^2) \quad (8.61)$$

Caso (i) corresponde com à existência de uma singularidade num leading edge, como num fluxo numa placa plana; no caso (ii) o ponto $\phi = \psi = 0$ é um ponto de estagnação como por exemplo no fluxo passando por um obstáculo cilíndrico. Os resultados podem generalizar-se da seguinte maneira.

Assuma $F_0(\phi) = \phi^m g(\phi)$, onde $m \geq 0$ e $g'(\phi)$ é limitado e seja

$$\begin{aligned} I_m(x) &= \int_x^\infty (1 - x^2/t^2)^m \exp(-t^2) dt \\ &= 2^{m-\frac{1}{2}} \Gamma(m+1) \exp(-\frac{1}{2}x^2) U(2m + \frac{1}{2}, x\sqrt{2}) \end{aligned}$$

onde $U(a, x)$ é a função de Weber (ver apêndice de [22]). Portanto

$$I_m(x) \sim \frac{1}{2} \Gamma(m+1) x^{-2m+1} \exp(-x^2)$$

quando $x \rightarrow \infty$.

De (8.58) com uma integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^\infty \phi^m \left(1 - \frac{a^2}{\theta^2}\right)^m g\left\{\phi\left(1 - \frac{a^2}{\theta^2}\right)\right\} \exp(-\theta^2) d\theta \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \phi^m \left[\left\{ - \int_\theta^\infty \left(1 - \frac{a^2}{t^2}\right)^m \exp(-t^2) dt \right\} \cdot g\left\{\phi\left(1 - \frac{a^2}{\theta^2}\right)\right\} \right]_{\theta=a}^{\theta=\infty} \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \phi^m \int_a^\infty \left\{ \int_\theta^\infty \left(1 - \frac{a^2}{t^2}\right)^m \exp(-t^2) dt \right\} \cdot g'\left\{\phi\left(1 - \frac{a^2}{\theta^2}\right)\right\} \frac{2a^2\phi}{\theta^3} d\theta \end{aligned}$$

Dos dois termos do lado direito, o primeiro predomina (sempre que g' seja limitado). Assim,

$$\chi \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \phi^m g(0) I_m(a) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(m+1) g(0) \phi^m a^{-2m-1} \exp(-a^2) \quad (8.62)$$

quando $a \rightarrow \infty$. Os casos especiais $m = 0, 1$ podem corresponder com os resultados de Tollmiens (8.60) e (8.61). Ver também Betz ([1]).

As propriedades fundamentais das camadas limites podem deduzir-se de (8.59) e (8.62), a saber que a vorticidade é exponencialmente pequena para grandes z . Isto é porque a vorticidade é proporcional a $\partial\chi/\partial\psi$ e, para dados x e grandes z as variáveis a , ψ e z são assim mesmos proporcionais.

8.12 Fluxo numa placa plana de zero incidência numa corrente uniforme

Uma placa fina plana se imersa com zero incidência numa corrente uniforme, o qual flui com velocidade U_0 , e se assume não ser afetado pela presença do prato, exceto na camada limite. O fluido se suponha ilimitado e o origem de coordenadas se toma em the leading edge com x medido rio abaixo ao longo da placa e z perpendicular a ela. Em ausência de gradiente de pressão, as equações do movimento estacionário na camada limite se reduzem a

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (8.63)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (8.64)$$

e as condições de fronteira aproximadas são

$$\begin{aligned} z = 0, \quad x > 0 : \quad u = w = 0 \\ z = \infty, \quad \forall x : \quad u = U_0 \\ z = 0 : \quad u = U_0 \end{aligned}$$

O fato que estas condições demandam um gradiente infinito em velocidade em the leading edge $x = z = 0$ implica uma singularidade na solução matemática ali. A solução de Blasius para a função de corrente é da forma

$$\psi = (2\nu U_0 x)^{1/2} f(\eta) \quad (8.65)$$

onde

$$\eta = (U_0/2\nu x)^{1/2} z \quad (8.66)$$

Por diferenciação as componentes de velocidade são

$$u = U_0 f'(\eta), \quad w = (\nu U_0/2x)^{1/2} \{\eta f'(\eta) - f(\eta)\}$$

e equação (8.63) se reduz a

$$f''' + f f'' = 0 \quad (8.67)$$

As condições de fronteira chegam a ser $f(0) = f'(0) = 0$; $f'(\infty) = 1$. A shear stress é dado por

$$\tau = \mu(U_0^3/2\nu x)^{1/2} f''(\eta) \quad (8.68)$$

A equação (8.67) é não linear, e as condições de fronteira são dadas em mas de um ponto. A existência da solução desejada não está portanto garantida e seu tabulação numérica não seria direta exceto pela circunstância especial que $f(0) = 0$. Se $F(\eta)$ é qualquer solução de (8.67), também é $f = aF(a\eta)$ com a uma arbitraria “constante de homologia”. Então

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = a^2 \lim_{\eta \rightarrow \infty} F'(a\eta) = a^2 \lim_{\eta \rightarrow \infty} F'(\eta)$$

e assim, se $f'(\infty) = 1$ a constante a pode ser determinada pela relação

$$a = \left\{ \lim_{\eta \rightarrow \infty} F'(\eta) \right\}^{-1/2}$$

Se ademais $F(0) = F'(0) = 0$, todas as condições de fronteira são satisfeitas tomando $f = aF(a\eta)$ com a solução.

Finalmente, desde que $f''(0) = a^3 F''(0)$ é conveniente prescrever $F''(0) = 1$ e obter a relação

$$f''(0) = \{F'(\infty)\}^{-3/2} \quad (8.69)$$

Um cálculo numérico da solução de Blasius pode portanto realizar-se. A tabela (8.1) da f , f' , f'' e algumas quantidades associadas. Anteriores trabalhos numéricos foram publicados por Blasius ([2]), Töpfer ([25]), Golstein ([5]) e Howarth ([8]). O valor de $f''(0)$ é necessário para obter o shearing stress na superfície da placa o qual por (8.68) é

$$\tau_w = \mu(U_0^3/2\nu x)^{1/2} f''(0) = \rho U_0^2 (2Re_x)^{-1/2} f''(0) \quad (8.70)$$

8.12. FLUXO NUMA PLACA PLANA DE ZERO INCIDÊNCIA NUMA CORRENTE UNIFORME 165

η	f	f'	f''
0.0	0.0000 000	0.0000 00	0.4696 00
0.1	0.0023 480	0.0469 59	0.4695 63
0.2	0.0093 914	0.0939 05	0.4693 06
0.3	0.0211 275	0.1408 06	0.4686 09
0.4	0.0375 492	0.1876 05	0.4372 54
0.5	0.0586 427	0.2342 27	0.4650 30
0.6	0.0843 856	0.2805 75	0.4617 34
0.7	0.1147 447	0.3265 32	0.4571 77
0.8	0.1496 745	0.3719 63	0.4511 90
0.9	0.1891 148	0.4167 18	0.4436 28
1.0	0.2329 900	0.4606 32	0.4343 79
1.1	0.2812 075	0.5035 35	0.4233 68
1.2	0.3336 572	0.5452 46	0.4105 65
1.3	0.3902 111	0.5855 88	0.3959 84
1.4	0.4507 234	0.6243 86	0.3796 92
1.5	0.5150 312	0.6614 73	0.3618 04
1.6	0.5829 560	0.6966 99	0.3424 87
1.7	0.6543 045	0.7299 30	0.3219 50
1.8	0.7288 718	0.7610 57	0.3004 45
1.9	0.8064 429	0.7899 96	0.2782 51
2.0	0.8867 962	0.8166 94	0.2556 69
2.2	1.0549 463	0.8633 03	0.2105 80
2.4	0.2315 267	0.9010 65	0.1675 61
2.6	0.4148 231	0.9306 01	0.1286 13
2.8	0.6032 823	0.9528 75	0.0951 14
3.0	0.7955 666	0.9690 54	0.0677 11
3.2	1.9905 796	0.9803 65	0.0463 70
3.4	2.1874 658	0.9879 70	0.0305 35
3.6	0.3855 888	0.9928 88	0.0193 29
3.8	0.5844 972	0.9959 44	0.0117 59
4.0	2.7838 848	0.9977 70	0.0068 74
4.2	2.9835 535	0.9988 18	0.0038 61
4.4	3.1833 808	0.9993 96	0.0020 84
4.6	0.3832 941	0.9997 03	0.0010 81
4.8	0.5832 520	0.9998 59	0.0005 39
5.0	0.7832 324	0.9999 36	0.0002 58
5.2	3.9832 236	0.9999 71	0.0001 19
5.4	4.1832 197	0.9999 88	0.0000 52
5.6	0.3832 181	0.9999 95	0.0000 22
5.8	0.5832 173	0.9999 98	0.0000 09
6.0	4.7832 170	0.9999 99	0.0000 03

Tabela 8.1: solução da equação (8.67)

onde $Re_x = xU_0/\nu$. Numericamente, $\tau_w/\rho U_0^2 = 0.33206(\nu/U_0x)^{1/2}$. O arraste num lado da placa de longitude l e unidade de largura é então

$$D = \int_0^l \tau_w dx = \rho \left(\frac{1}{2}\nu U_0^3\right)^{1/2} f''(0) \int_0^l x^{-1/2} dx = 2^{1/2} \rho U_0^2 l f''(0) (U_0 l / \nu)^{-1/2}$$

e o coeficiente de arraste é

$$C_D = D / \left(\frac{1}{2} l \rho U_0^2\right) = 2^{3/2} f''(0) Re^{-1/2} = 1.3282 Re^{-1/2} \quad (8.71)$$

onde $Re = lU_0/\nu$.

A espessura do deslocamento é, sem aproximação,

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dz = (2x\nu/U_0)^{1/2} \int_0^\infty (1 - f') d\eta \\ &= (2x\nu/U_0)^{1/2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} (\eta - f) \\ &= 1.7208 (x\nu/U_0)^{1/2} \end{aligned} \quad (8.72)$$

Então se $Re_x = xU_0/\nu$ e $Re_\delta = \delta_1 U_0/\nu$ segue que $Re_\delta = 1.7208 Re_x^{1/2}$ o qual é uma verificação exata de uma relação cuja forma é facilmente encontrada por mas simples, porém menos precisos, métodos (Prandtl [21]). Também, a espessura do momento é

$$\delta_2 = (2x\nu/U_0)^{1/2} f''(0) = 0.6641 (x\nu/U_0)^{1/2} \quad (8.73)$$

que foi derivado de (8.41) e (8.70).

O valor de η correspondente com $z = \delta_1$ é igual para todo x , e de (8.66) e (8.72) é

$$\eta_1 = 1.2168 \quad (8.74)$$

A variável η é, em efeito, uma coordenada apropriada não dimensional para distancias através da camada limite.

Queda considerar a forma aproximada de $f(\eta)$ para pequenos e grandes valores de η respectivamente. A serie de potência de η é

$$f(\eta) = \sum_0^\infty (-1)^n C_n \eta^{3n+2} \quad (8.75)$$

onde (Weyl [26])

$$(3n+2)(3n+1)3nC_n = \sum_0^{n-1} (3i+2)(3i+1)C_i C_{n-1-i} \quad (8.76)$$

e $C_0 = \frac{1}{2} f''(0)$. Os primeiros coeficientes na serie são

$$\begin{aligned} C_1 &= (1/5!)(2C_0)^2, & C_2 &= (11/8!)(2C_0)^3, & C_3 &= (375/11!)(2C_0)^4, \\ C_4 &= (27897/14!)(2C_0)^5, & C_5 &= (3817137/17!)(2C_0)^6 \end{aligned}$$

8.13. FLUXO ESTACIONÁRIO NA CAMADA LIMITE AO LONGO DO CILÍNDRIO PRÓXIMO DE UM

Esta serie é útil em começar uma integração numérica desde $\eta = 0$.

Como Weyl indico, o radio de convergência da serie é finita e portanto sera usado so para valores pequenos de η . Para o caso no qual $f''(0) = 1$, Shanks ([23]) afirmou haver mostrado que o radio de convergência é 3.12735. Para a solução de Blasius actual ele também obteve um resultado equivalente a

$$f'(0) = 0.469600$$

Uma fórmula assintótica valida para grandes valores de η pode achar-se como segue: na equação (8.67), substituir $f(\eta) = \eta - \beta + \phi(\eta)$, onde $\phi(\eta)$ é pequeno. Se o produto $\phi\phi''$ é negligenciado, uma equação linear aproximada para $\phi(\eta)$ é obtida:

$$\phi'' + (\eta - \beta)\phi'' = 0 \quad (8.77)$$

Portanto, escrevendo $\zeta = \eta - \beta$, segue que $\phi'' \sim A \exp(-\frac{1}{2}\zeta^2)$ e que

$$\phi \sim A\zeta^{-2} \exp(-\frac{1}{2}\zeta^2) \quad (8.78)$$

A constante β foi usada, na fórmula para a espessura do deslocamento (8.72), onde

$$\beta = \lim_{\eta \rightarrow \infty} (\eta - f) = 1.21678 \quad (8.79)$$

e de (8.74), $\beta = \eta_1$. Assim, uma fórmula aproximada para $f(\eta)$, valida para grandes η , é

$$f(\eta) \sim \eta - \eta_1 + A(\eta - \eta_1)^{-2} \exp\{-\frac{1}{2}(\eta - \eta_1)^2\} \quad (8.80)$$

Uma imediata consequência deste resultado é que a componente da velocidade transversal w é dado pela fórmula assintótica

$$\frac{w}{U_0} \sim \eta_1 (2Re_x)^{-1/2} \quad (8.81)$$

Assim, w não tende para zero e isto é uma das características especiais das soluções da camada limite.

8.13 Fluxo estacionário na camada limite ao longo do cilindro próximo de um ponto frontal de estagnação

Consideremos um fluxo bidimensional ao redor de um obstáculo cilíndrico com uma camada limite ampliada desde o ponto frontal de estagnação em ambas direções ao redor do cilindro. Não existe curvatura grande da superfície e assim as equações (8.50) são válidas, com x tomada ao longo da superfície desde o ponto de estagnação, e z normal à superfície. Suficientemente próximo de $x = 0$, a velocidade U fora da camada limite pode representar-se por a fórmula $U = U_1 x/l$, e uma serie mas prolongada para U ter esta como seu primer termo. Este problema foi também estudado por Blasius ([2]). Fisicamente, é complemento

do prévio problema: a placa plana representa o caso extremo de um corpo delgado num fluxo bidimensional, a vizinhança de um ponto de estagnação o caso extremo de um bluff body. Em efeito, a solução da camada limite agora a estudar-se tem a mesma forma como para o fluxo viscoso bidimensional mantido perpendicularmente em seu direção original.

As condições de fronteira necessárias são:

$$z = 0, \quad u = w = 0; \quad x = 0, \quad u = 0; \quad z = \infty, \quad u = U_1 x/l$$

Não há razão para introduzir uma singularidade em $x = 0$, como foi feito para a placa plana, e a apropriada solução, escrita em termos da variável

$$\eta = (U_1/l\nu)^{1/2}z = Re^{1/2}(z/l)$$

é

$$\begin{aligned} \psi &= (\nu U_1/l)^{1/2} x f(\eta) \\ f''' + f f'' - f'^2 + 1 &= 0 \\ f(0) = f'(0) &= 0, \quad f'(\infty) = 1 \\ u = (U_1 x/l) f'(\eta) &= U f'(\eta), \quad w = -(U_1 \nu/l)^{1/2} f(\eta) \end{aligned} \tag{8.82}$$

A equação (8.82) foi discutida por Hiemenz ([6]), Howarth ([7]). Na tabela (8.2) apresentamos os resultados da solução para a equação (8.82)

8.13. FLUXO ESTACIONÁRIO NA CAMADA LIMITE AO LONGO DO CILÍNDRIO PRÓXIMO DE UM

η	f	f'	f''
0.0	0.0000 0000	0.0000 000	1.2325 88
0.1	0.0059 9640	0.1182 649	0.1328 31
0.2	0.0233 2226	0.2266 124	1.0344 54
0.3	0.0509 9480	0.3252 411	0.9386 31
0.4	0.0880 5659	0.4144 561	0.8463 25
0.5	0.1335 8522	0.4946 493	0.7583 07
0.6	0.1867 0100	0.5662 805	0.6751 71
0.7	0.2465 7292	0.6298 609	0.5973 50
0.8	0.3124 2302	0.6859 375	0.5251 31
0.9	0.3835 2925	0.7350 793	0.4586 72
1.0	0.4592 2702	0.7778 653	0.3980 13
1.1	0.5389 0971	0.8148 734	0.3430 96
1.2	0.6220 2803	0.8466 711	0.2937 76
1.3	0.7080 8860	0.8738 080	0.2498 36
1.4	0.7966 5179	0.8968 086	0.2110 03
1.5	0.8873 2900	0.9161 682	0.1769 58
1.6	0.9797 7949	0.9323 482	0.1473 51
1.7	1.0737 0688	0.9457 741	0.1218 13
1.8	0.1688 5548	0.9568 338	0.0999 64
1.9	0.2650 0648	0.9658 772	0.0814 25
2.0	1.3619 7417	0.9732 167	0.0658 25
2.2	0.5577 6033	0.9838 534	0.0420 40
2.4	0.7552 5389	0.9905 494	0.0260 20
2.6	1.9538 0683	0.9946 336	0.0155 97
2.8	2.1529 9652	0.9970 457	0.0090 49
3.0	2.3525 5669	0.9984 242	0.0050 78
3.2	0.5523 2542	0.9991 861	0.0027 55
3.4	0.7522 0768	0.9995 931	0.0014 44
3.6	2.9521 4968	0.9998 032	0.0007 31
3.8	3.15212205	0.9999 080	0.0003 57
4.0	3.3521 0931	0.9999 584	0.0001 69
4.2	0.5521 0365	0.9999 819	0.0000 77
4.4	0.7521 0121	0.9999 923	0.0000 34
4.6	3.9521 0020	0.9999 969	0.0000 14
4.8	4.1520 9979	0.9998 988	0.0000 06
5.0	4.3520 9964	0.9999 995	0.0000 02

Tabela 8.2: solução da equação (8.82)

A importância desta solução aumenta devido ao fato que satisfaz as equações exatas de o fluxo viscoso em duas dimensões e não so a aproximação da camada limite, quando x e z são interpretadas como coordenadas Cartesianas. Neste caso o fluxo contra uma superfície plana representada por $z = 0$, e a direção original do fluxo é ao longo das linhas $xz = \text{constant}$.

8.14 A importância do sistema de coordenadas na teoria da camada limite

Para condições de fronteira dadas, a solução aproximada derivada da teoria de camada limite depende sobre o sistema de coordenadas, e o sistema Cartesiano convencional não é necessariamente o melhor. Por exemplo a solução de Blasius para um fluxo numa placa plana é invalidada por uma singularidade ao longo da linha $x = 0$, o qual não sucede se a solução da camada limite é derivada em coordenadas parabólicas (ver section 8.13). O último suposto é mais apropriado para aquele problema. A importância da escolha das coordenadas depende sobre o uso para o qual a teoria da camada limite é usada. Por exemplo, se so the skin friction se necessita, diferentes sistemas de coordenadas dan o mesmo resultado, como se mostrara. Porém se as soluções da camada limite formam parte do cálculo de todo o campo do fluxo, sua dependência sobre o sistema de coordenadas pode ser explorada, como Kaplun ([9]) mostrou.

É usual dividir o campo de fluxo, aparte do wake, em duas regiões; num destes, as equações Eulerianas do movimento inviscoso são usadas para obter um fluxo externo, a qual pode ser corrigido por efeito do deslocamento da camada limite, a qual ocupa a região interna. A linha divisória entre as dois regiões é então, em principio, encontrada por a união suave das duas soluções, porém desde que a solução da camada limite em coordenadas inadequadas se comporta incorretamente distante da parede sólida (por exemplo, ao longo de $x = 0$ no caso de um placa plana), este processo de “matching” pode ser difícil. Se, um certo sistema de coordenadas ótimo é escolhido para a solução da camada limite o problema é facilitado, e ainda eliminado, desde que a solução interna nesse caso pode-se arranjar para conter o fluxo externo.

As anteriores considerações foram estudadas por Kaplun ([9]) em um estudo sistemático da relação entre soluções em diferentes coordenadas para fluxos bidimensionais estacionários incompressíveis sem separação. Ele denotou por $\zeta \equiv (\xi, \eta)$ um conjunto de coordenadas curvilíneas arbitrárias, e por $\chi \equiv (\rho, \sigma)$ outro conjunto, onde requerido. As componentes da velocidade são derivadas da função da corrente ψ pelas relações

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$$

As coordenadas não são necessariamente ortogonais, a única restrição sobre elas é que $\eta - 0$, ou $\sigma = 0$, corresponde com a fronteira sólida onde $u = v = 0$. A teoria também depende sobre um pequeno parâmetro ϵ definido de modo que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (v/\epsilon^2) = \text{constant} \neq 0$$

Seguindo Weyl ([27]) e outros, Kaplun introduziu dois processos de limite:

- (i) Seja $f(\zeta, \nu)$ uma função de posição e viscosidade. No primer processo, ξ e η manter-se fixos enquanto ν tende à zero: o resultado é denotado por $\lim_1 f(\zeta, \nu)$. Se este processo é aplicado numa solução exata ψ das equações de fluxo viscoso, a função resultante ψ_e satisfaz as equações Eulerianas e representam um fluxo externo.
- (ii) No segundo processo ξ permanece fixo, mas η varia de modo que a relação η/ϵ é constante quando $\epsilon \rightarrow 0$. Este limite depende sobre o sistema de coordenadas também como sobre a função f , e o resultado é denotado por $\lim_\zeta f$ or $f_\zeta(\xi, \eta/\epsilon)$. Se este processo se aplica as equações de fluxo viscosos das equações da camada limite para o sistema de coordenadas ζ . A função de corrente e componentes da velocidade na correspondente solução da camada limite são

$$\psi_\zeta = \epsilon \lim_\zeta (\psi/\epsilon), \quad u_\zeta = \lim_\zeta u, \quad v_\zeta = \epsilon \lim_\zeta (\nu/\epsilon)$$

e as equações são definidas se as ζ coordenadas são definidas, de modo que o campo de fluxo esta dado formalmente pela região fora da camada limite.

Desde que $\eta = 0$ em a parede, o primeiro e segundo processo do limite são idênticos ali e os valores do limite obtidos por um ou outro processo não depende sobre o sistema de coordenadas particular usado. Assim, o skin friction pela teoria da camada limite é independente da escolha das coordenadas. Kaplun incorporou seus resultados em dois teoremas, o primeiro dos quais trata com duas aproximações da camada limite para a mesma solução exata, baseadas sobre ζ e χ respectivamente:

Teorema 8.1. *Se $\psi_\zeta = \epsilon f(\xi, \eta/\epsilon)$ é dado, como representando uma solução, a outra pode-se encontrar mediante as substituições*

$$\begin{aligned} \psi_\chi &= \epsilon f(\xi_\chi, \eta_\chi/\epsilon) \\ \xi_\chi &= \lim_\chi \xi = \xi(\rho, 0) \\ \eta_\chi &= \epsilon \lim_\chi (\eta/\epsilon) = \sigma(\partial\eta/\partial\sigma)_{\sigma=0} \end{aligned}$$

Assim, as duas soluções são idênticas se e so se os sistemas ζ e χ são relacionados por

$$\xi(\rho, \sigma) = \xi(\rho, 0), \quad \eta(\rho, \sigma) = \sigma(\partial\eta/\partial\sigma)_{\sigma=0}$$

as quais são equivalentes as equações mais simples

$$\xi = f_1(\rho), \quad \eta = \sigma f_2(\rho)$$

onde f_1, f_2 são funções arbitrias.

O segundo teorema relaciona a aproximação da camada limite para qualquer sistema de coordenadas, especificadas por ψ_ζ , para o fluxo externo dado por ψ_e , e mostra que com uma escolha conveniente de ζ o primeiro pode conter o ultimo. O fluxo externo, ainda que, ten que

primeiro corrigir-se pela presença da camada limite, adicionando uma pequena perturbação $\epsilon\psi'_e$; isto pode formalmente derivar-se pelo primer processo do limite $\epsilon \lim_1(\psi - \psi_e)/\epsilon$, onde ψ imagine-se conhecido e $\psi_e = \lim_1 \psi$. Se o mesmo processo do limite e agora aplicado a aproximação da camada limite, temos $\psi_{\zeta_e} = \lim_1 \psi_{\zeta}$, junto com uma perturbação

$$\epsilon\psi'_{\zeta_e} = \epsilon \lim_1(\psi_{\zeta} - \psi_{\zeta_e})/\epsilon$$

A solução da camada limite portanto contem o fluxo externo (corrigido pela espessura do deslocamento) se

$$\psi'_{\zeta_e} = \psi_e, \quad \psi'_{\zeta_e} = \psi'_e$$

e o sistema de coordenadas produzindo este resultado é chamado ótimo.

Teorema 8.2. *Afirmamos que $\zeta \equiv (\xi, \eta)$ é um sistema ótimo particular se*

$$\xi = \psi'_e, \quad \eta = \psi_e$$

e que qualquer outro sistema $\chi \equiv (\rho, \sigma)$ é ótimo se e so se está relacionado com ζ por

$$\rho = f_1(\xi), \quad \sigma = f_2(\xi)\eta$$

O campo do fluxo dado pela aproximação da camada limite é o mesmo para todo sistema ótimo mas diferente para qualquer outro.

Como exemplos da aplicação destas idéias, Kaplan discutiu três problemas especiais.

Exemplo 1. Fluxo frontal numa placa plana. A solução exata do fluxo viscoso nesse caso foi dado em seção (8.14), quando $\psi = (\nu U_1/l)^{1/2} x f(\eta)$, onde $\eta = (U_1/\nu l)^{1/2} z$. Desde que $f(\eta) \sim \eta$ para grandes valores de η ,

$$\psi_e = \lim_1 \psi = (U_1/l)xz$$

escolhendo o parâmetro ϵ igual a $(\nu/lU_1)^{1/2}$, o segundo processo do limite involucra $\epsilon \rightarrow 0$ com x e η constantes. Assim, la aproximação da camada limite é

$$\begin{aligned} \psi_{\zeta} &= \epsilon \lim_{\zeta}(\psi/\epsilon) = \epsilon \lim_{\zeta} U_1 x f(\eta) = \epsilon U_1 x f(\eta) \\ &= (\nu U_1/l)^{1/2} x f(\eta) \end{aligned}$$

sendo assim idêntico com toda a solução. Sem calculo adicional pode portanto verse que as coordenadas x, z são ótimos e um cálculo de $\psi'_e = \lim_1(\psi - \psi_e)/\epsilon$ confirma isto.

Exemplo 2. O fluxo de Oseen passando uma placa plana semi-infinita. Neste exemplo as equações de Oseen lineares são consideradas como as equações “exatas” do fluxo. A solução das equações de Oseen para este problema é conhecido (ver [15] e [22]) e o ponto de interesse é que a aproximação da camada limite, escritas em coordenadas parabólicas (as quais são ótimas nesse caso), é idêntico com a solução “exata”. Por outro lado, se as coordenadas cartesianas usuais x, z são empregadas, a aproximação da camada limite demonstra todas as anomalias da solução de Blasius.

Exemplo 3. Flow against a wedge. O starting-point nesse caso deve ser o fluxo potencial com $\nu = 0$, o qual é dado como um potencial complexo $\omega = \phi + i\psi$. A parte imaginária é então ψ_e . Também, a solução da camada limite é conhecida. As coordenadas ótimas demonstram ser $\xi = \Re\omega^{1/2}$, $\eta = L\omega^{1/2}$ as quais são conformes e chamadas “linhas de corrente parabólica” por Kaplun. As coordenadas ótimas nos exemplos 1 e 2 são casos especiais de esses, quando o ângulo da wedge é 180° or 0 , mas é somente no primeiro caso que a solução da camada limite ótima acontece ser uma solução exata das equações de Navier-Stokes.

Bibliografia

- [1] Betz, A.: *Zur Berechnung des Überganges laminarer Grenzschichten in die Aussenströmung*. 50 Jahre Grenzschichtforschung. Vieweg, Braunschweig. 63-70 (1955).
- [2] Blasius, H.: *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*. Z. Math. Phys., 56 (1908), 1-37.
- [3] Crocco, L.: *A characteristic transformation of the equations of the boundary layer in gases*. Rep. aero. Res. Coun., Lond., 4582 (1939).
- [4] Glauert, M. B.: *A boundary layer theorem, with applications to rotating cylinders*. J. Fluid Mech., 2 (1957), 89-99.
- [5] Goldstein, S.: *Concerning some solutions of the boundary-layer equations in hydrodynamics*. Proc. Camb. phil. Soc., 26 (1930), 1-30.
- [6] Hiemenz, K.: *Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder*. Dinglers J., 326 (1911), 321-4, 344-8, 357-62, 372-6, 391-3, 407-10.
- [7] Howarth, L.: *On calculation of the steady flow in the boundary layer near the surface of a cylinder in a stream*. Rep. Memor. aero. Res. Coun., Lond. I, 1632 (1934-5).
- [8] Howarth, L.: *On the solution of the laminar boundary layer equations*. Proc. Roy. Soc. A, 164 (1938), 547-79.
- [9] Kaplun, S.: *The rôle of co-ordinate systems in boundary-layer theory*. Z. angew. Math. Phys., 5 (1954), 111-35.
- [10] Kármán, T.v.: *Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erzeugt*. Math. Phys. Klasse, 1(1911), 509–517.
- [11] Kármán, T.v.: *Über laminare und turbulente Reibung*. Z. angew. Math. Mech., 1 (1921), 233–52.
- [12] Kármán, T.v., and Millikan, C.B.: *On the theory of laminar boundary layers involving separation*. Rep. nat. adv. Comm. Aero., Wash., 504 (1934).

- [13] Kármán, T.v., and Rubach., H.: *Über den Mechanismus des Flüssigkeits-und Luftwiderstandes*. Phys. Z., 13 (1912), 49-59.
- [14] Leibenson, L.S.: *The energy form of the integral condition in the theory of the boundary layer*. Dokl. Ak. Nauk S.S.S.R., 2 (1935), 22–24.
- [15] Lewis, J.A., and Carrier, G.F.: *Some remarks on the flat plate boundary layer*. Quart. appl. Math., 7 (1949), 228-34.
- [16] Mises, R.v.: *Bemerkungen zur Hydrodynamik*. Z. angew. Math. Mech., 7 (1927), 425-31.
- [17] Mitchell, A. R., and Thomson, J.Y.: *Finite difference methods of solution of the von Mises boundary layer equation with special reference to conditions near a singularity*. Z. angew. Math. Phys., 9 (1958), 26-37.
- [18] Pohlhausen, K.: *Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht*. Z. angew. Math. Mech., 1 (1921), 252-68.
- [19] Prandtl, L.: *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*. int. Math. Kongr., Heidelberg. III(1904), 484-91.
- [20] Prandtl, L.: *Zur Berechnung der Grenzschichten*. Z. angew. Math. Mech., 18 (1938), 77-82.
- [21] Prandtl, L.: *Essentials of fluid dynamics*. Blackie, London. (1952).
- [22] Rosenhead, L.E.: *Laminar boundary layers*. Clarendon. Press. (Oxford 1963).
- [23] Shanks, D.: *The Blasius and Weyl constants in boundary-layer theory*. Phys. Rev., 90 (1953), 377.
- [24] Tollmien, W.: *On the behaviour of a flow along a wall at the outer edge of its boundary layer*. Rep. aero. Res. Coun., Lond., 9739(1946).
- [25] Töpfer, K.: *Bemerkung zu dem Aufsatz von H. Blasius 'Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung'*. Z. Math. Phys., 60 (1912), 397-8.
- [26] Weyl, H.: *Concerning the differential equations of some boundary-layer problems*. Proc. nat. Acad. Sci., Wash. II, 28 (1942), 100-2.
- [27] Weyl, H.: *On the differential equations of the simplest boundary-layer problems*. Ann. Math., Princeton., 43 (1942), 381-407.
- [28] Wieghardt, K.: *On an energy equation for the calculation of laminar boundary layers*. Rep. aero. Res. Coun., Lond., 9825(1946).
- [29] Wieghardt, K.: *Über einen Energiesatz zur Berechnung laminarer Grenzschichten*. Ingen.-Arch., 16 (1948), 231-42.

Capítulo 9

A formulação analítica do problema de Stokes

Neste capítulo fazemos uma abordagem em termos de análise funcional do problema de Stokes utilizando conseqüentemente ferramentas matemáticas relativamente mais sofisticadas que nos capítulos anteriores

9.1 Introdução

O movimento de um fluido viscoso, homogêneo e incompressível é descrito pelas equações de Navier-Stokes [4]. Neste trabalho, estudaremos essas equações no caso de um fluxo estacionário com pequeno número de Reynolds. Ou seja, trataremos do problema de Stokes: determinar a velocidade $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ e a pressão p , num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, tais que

$$\begin{aligned} -\nu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u}|_{\Gamma} &= \mathbf{g} & \text{em } \Gamma. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Aqui Γ é o contorno de Ω . Detalhes sobre a linearização das equações e considerações físicas sobre o problema podem ser vistos no Capítulo 2.

O estudo de propriedades de soluções para o problema de Stokes tem um papel essencial na teoria matemática de fluxos viscosos governados pelas equações de Navier-Stokes. Questões relativas à existência, unicidade e estimativas *a priori* em espaços de Sobolev para esse problema são fundamentais em toda discussão básica relacionada às equações de Navier-Stokes, tais como existência, regularidade e comportamento assintótico no tempo ([26], [15], [10]). Isso explica a extensa literatura tratando de questões analíticas e numéricas relativa ao problema. De fato, as dificuldades associadas às predições teóricas de fluxos com $Re \rightarrow 0$ vem sendo pesquisadas desde o tempo de Stokes [36]. Nesse limite, expansões em potências de Re não mais envolvem perturbações singulares; o termo não linear de convecção $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ não é o de mais alta ordem, e é matematicamente razoável desconsiderá-lo [5].

Isso foi feito por Stokes, que assim definiu uma nova classe de fluxos ideais agora comumente chamados *creeping flows*. Stokes deduziu, dessa aproximação, a fórmula $D = 6\pi\mu cv$ para a resistência encontrada por uma esfera sólida de raio c , movendo-se suavemente com velocidade v através de um fluido com viscosidade μ . A dedução faz uso, essencialmente, da hipótese de simetria axial do fluxo e a fórmula é confirmada experimentalmente para $Re < 0.2$ (ver [20]). Nesse contexto seria razoável aplicar o mesmo método para cilindros circulares, entretanto isso constitui o Paradoxo de Stokes: Nenhum "creeping flow" passando por um cilindro circular é possível (a demonstração pode ser vista no Capítulo 4). Mais precisamente, sob hipóteses adequadas sobre o comportamento do campo de velocidades no infinito, não há nenhum fluxo viscoso incompressível bidimensional estacionário passando por um obstáculo, no qual os componentes da velocidade são infinitesimais de primeira ordem. Por outro lado, fluxos desse tipo em três dimensões são explicitamente conhecidas (ver [26], [13], [17], [7], [3]).

Segundo Finn [14] uma explicação para a discrepância nos resultados é que no fluxo passando por uma esfera a hipótese sobre a razão entre forças viscosas e inerciais a qual é usada para derivar as equações de movimento é violada numa vizinhança do infinito. Este fenômeno implica em sérias questões de validação de resultados conhecidos nos sentidos físico e matemático e é imperativo investigar em qual sentido o problema de contorno é corretamente colocado (ver [22], [23], [8], [13]).

Nesse contexto abordaremos questões relativas à existência e unicidade de soluções para o problema de Stokes nos casos em que o domínio Ω é limitado (problema interior) e não limitado (problema exterior). No último caso consideraremos também o caso bidimensional. Para Ω limitado seguiremos o argumento variacional dado em [19], cuja restrição com relação ao contorno Γ de Ω é que este seja Lipschitz. Com relação ao problema exterior restringimos Γ a ser de classe C^2 , conforme trabalho de Galdi e Simader [17] que faz uso de teoria potencial para estabelecer existência e unicidade de soluções.

Denotaremos por $L^q(\Omega)$, $H^{k,q}(\Omega)$, $H_0^{k,q}(\Omega)$, $C^k(\Omega)$,... os espaços usuais de funções para $1 \leq q \leq \infty$, $k = 1, 2, \dots$. Resultados padrões de espaços de Sobolev, como por exemplo, teoremas de traço, extensão e imersão serão utilizados ([1], [39]).

9.2 As equações de Stokes e aspectos físicos

Consideremos as equações de Navier-Stokes que descrevem o movimento n -dimensional de um fluido viscoso incompressível

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho f_i, \quad (9.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

$1 \leq i \leq n$. Onde, $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}(\mathbf{u})$, $1 \leq i, j \leq n$ e $D_{ij}(\mathbf{u}) = (1/2)(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$. Nessas equações, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ é a velocidade do fluido, ρ sua densidade (assumida constante),

$\mu > 0$ é sua viscosidade (também assumida constante) e P é sua pressão; (σ_{ij}) é o tensor de tensões e $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ representa uma densidade de forças externas por unidade de massa.

Colocando $p = P/\rho$, $\nu = \mu/\rho$, pode ser escrita como

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - 2\nu \sum_{j=1}^n \frac{\partial D_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i, \quad (9.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

$1 \leq i \leq n$ e, utilizando a identidade

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial D_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} = (1/2)\Delta u_i,$$

obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad (9.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

O seguinte argumento de *scaling* é padrão: Para um dado problema, seja L um comprimento característico e U uma velocidade característica. Isso determina um tempo característico $T = L/U$. Então, introduzindo as variáveis adimensionais $x' = x/L$, $\mathbf{u}' = \mathbf{u}/U$, $t' = t/T$, as equações de Navier-Stokes tornam-se

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \sum_{j=1}^n u'_j \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x'_j} - \frac{\nu}{LU} \Delta' \mathbf{u}' + \nabla' p' = \mathbf{f}',$$

$$\operatorname{div}_{x'} \mathbf{u}' = 0.$$

Através da definição de número de Reynolds $Re = LU/\nu$ obtemos as equações de Navier-Stokes na sua forma adimensionalizada

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

Considerando somente o caso estacionário, isto é, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$ e o caso em que \mathbf{u} é suficientemente pequeno tal que podemos ignorar o termo convectivo não linear $u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, obtemos as equações de Stokes

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad (9.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

As simplificações introduzidas acima são razoáveis se considerarmos processos biológicos e industriais ([33], [9], [32]) que envolvam fluxos nos quais a viscosidade é grande e/ou o

tamanho das partículas envolvidas é pequeno. O número de Reynolds é um importante indicador de fluxos desse tipo, pois é a razão entre forças inerciais e viscosas. Assim fluxos com viscosidade não desprezível, constituídos de movimentos suaves ou compreendido de pequenas partículas terão pequeno número de Reynolds. Evidentemente, o número de Reynolds nunca pode se anular, ou equivalentemente as forças inerciais nunca são nulas, mas pode se mostrar que a aproximação $Re \sim 0$ produz uma representação apurada do campo de fluxo na vizinhança de pequenas partículas [4]. Esses regimes de fluxo, chamados de fluxos de Stokes têm algumas características físicas que os distinguem significativamente dos demais:

- Para fluxos estacionários, pressão e forças friccionais estão em equilíbrio a cada instante. Assim o movimento do fluido não depende de sua história temporal mas sim é induzido e sustentado através de condições de contorno. Isto é, o movimento de uma partícula depende sobre as forças às quais está sujeita em cada instante; na ausência dessas forças o movimento cessará quase imediatamente ([29], [32], [21]). Essa ausência de inércia faz com que o fluxo seja laminar, e configurações complexas como turbulência e fluxos secundários não ocorrem.
- Fluxos de Stokes são completamente reversíveis e isto pode levar à identificação de simetrias.
- Devido ao fato que as forças friccionais são dominantes, é razoável esperarmos que qualquer perturbação cause efeitos não desprezíveis e o fluxo é influenciado pelas interações entre partículas. Implementações numéricas devem levar isso em consideração ([33], [31], [30], [11]).

9.3 Problema Interior

O problema interior de Stokes corresponde ao problema (9.1) no caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado. Esse problema tem sido extensivamente estudado (ver [26], [17]).

Em especial, no paper de Cattabriga [7] um tratamento completo é dado no espaço de Sobolev $W^{l,q}$, $l \geq -1$, $1 < q < \infty$ para o caso de dimensão $n = 3$. O resultado de Cattabriga estabelece, essencialmente, que se Ω é um domínio limitado em \mathbb{R}^3 de classe C^m , $m = \max(l + 2, 2)$, $l \geq -1$, então dado $\mathbf{f} \in W^{l,q}(\Omega)^3$, $\mathbf{g} \in W^{l+2-1/q,q}(\Gamma)^3$, $1 < q < \infty$, existe uma e somente uma solução $\mathbf{v} \in W^{l+2,q}(\Omega)^3$, $p \in W^{l+1,q}(\Omega)$ para (9.1). Além do mais tal solução satisfaz a estimativa

$$\|\mathbf{v}\|_{l+2,q} + \inf_{k \in \mathbb{R}} \|p + k\|_{l+1,q} \leq c(\|\mathbf{f}\|_{l,q} + \|\mathbf{g}\|_{l+2-1/q,q}).$$

Para $n \geq 2$ arbitrário Kozono e Sohr [25] tem demonstrado um resultado geral para domínios com contorno $C^{2+\mu}$, $1 < \mu < \infty$ com estimativas *a priori*- L^r , $1 < r < \infty$ através da teoria de Giga [18] de potências fracionais de espaços de Sobolev. No trabalho de Galdi e Simader [17] o resultado de Cattabriga é estendido ao caso $n \geq 2$ sem qualquer hipótese adicional sobre Γ , por meio da Teoria de Calderón-Zygmund.

Um resultado de existência e unicidade bem como de regularidade da solução do problema de Stokes num polígono convexo no \mathbb{R}^2 pode ser visto em [24]. Brown e Shen [6] estabeleceram através dos resultados de Verchota (em especial [12]) que o domínio do operador de Stokes $A = -P\Delta$ está contido em $W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{3/2,2}(\Omega)$ quando $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio Lipschitz. Certas estimativas L^∞ são também estabelecidas nesse trabalho. Estimativas L^p ótimas para a solução em domínios Lipschitz em três dimensões podem ser vistas em [34].

Seguiremos aqui o argumento em [19] para estabelecer existência e unicidade de soluções para o caso em que Ω é Lipschitz .

Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um subconjunto limitado com contorno Γ Lipschitz. Iniciamos introduzindo os seguintes espaços de funções livres de divergência: $\mathcal{V} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\Omega)^n; \text{div } \mathbf{u} = 0\}$, $V = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n; \text{div } \mathbf{v} = 0\}$. Consideraremos $H_0^1(\Omega)^n$ equipado com a norma $\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{1,\Omega}^2\right)^{1/2}$ a qual é equivalente á norma $\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{1,\Omega}^2\right)^{1/2}$, pela desigualdade de Poincaré.

Como V é um subespaço fechado de $H_0^1(\Omega)^n$, temos a decomposição $H_0^1(\Omega)^n = V \oplus V^\perp$, onde V^\perp denota o complemento ortogonal de V em $H_0^1(\Omega)^n$ com relação ao produto escalar $(\nabla u, \nabla v)$ associado à $|\cdot|_{1,\Omega}$.

Lema 9.1. *Se $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^n$ satisfaz*

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (9.6)$$

então existe $p \in L^2(\Omega)$ tal que $\mathbf{f} = \nabla p$. Quando Ω é conexo, p é único a menos de uma constante.

Demonstração: Primeiro observamos que $-\nabla \in B(L^2(\Omega); H^{-1}(\Omega)^n)$ é o operador dual de $\text{div} \in B(H_0^1(\Omega)^n; L^2(\Omega))$. Então, como $\mathcal{R}(\nabla)$ é um subespaço fechado de $H^{-1}(\Omega)^n$, podemos aplicar o Teorema da Imagem Fechada de Banach (ver, por exemplo, [39]):

$$\mathcal{R}(\nabla) = (\mathcal{N}(\text{div}))^0 = V^0,$$

onde V^0 denota o conjunto polar de V :

$$V^0 = \{\mathbf{y} \in H^{-1}(\Omega)^n; \langle \mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle = 0, \forall \mathbf{u} \in V\}. \quad (9.7)$$

Isso fornece o resultado. □

A seguinte definição é útil para uma caracterização de V^\perp

Definição 9.1. *Definimos $(-\Delta)^{-1} \in B(H^{-1}(\Omega)^n; H_0^1(\Omega)^n)$ como o operador de Green relacionado ao problema de Dirichlet homogêneo para $-\Delta$ em \mathbb{R}^n , isto é, $\mathbf{u} = (-\Delta)^{-1}\mathbf{f}$ se e só se \mathbf{u} é a solução de:*

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} &= \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{em } \Gamma. \end{aligned}$$

Corolário 9.1. $V^\perp = \{(-\Delta)^{-1}\nabla q; q \in L^2(\Omega)\}$.

Demonstração: É fácil ver que $(-\Delta^{-1})\nabla q \in V^\perp$ para todo $q \in L^2(\Omega)$. Por outro lado, tomamos $\mathbf{u} \in V^\perp$ e consideramos o funcional linear l definido em $H_0^1(\Omega)^n$ por $\langle l, \mathbf{v} \rangle = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})$. l pertence a $H^{-1}(\Omega)^n$ e se anula em V . Assim, pelo Lema 9.1, existe $p \in L^2(\Omega)$ tal que:

$$\langle l, \mathbf{v} \rangle = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) = \langle \nabla p, \mathbf{v} \rangle, \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n.$$

Portanto \mathbf{u} tem a expressão: $\mathbf{u} = (-\Delta^{-1})\nabla p$. □

O próximo corolário estabelece que $\mathcal{R}(\text{div}) = L_0^2(\Omega)$

Corolário 9.2. *Seja Ω conexo. Então:*

(i) *o operador ∇ é um isomorfismo sobrejetor de $L_0^2(\Omega)$ em V^0 .*

(ii) *o operador div é um isomorfismo sobrejetor de V^\perp em $L_0^2(\Omega)$.*

Demonstração: (i) Sabemos que $\nabla \in B(L_0^2(\Omega); V^0)$. Além disso o Lema 9.1 assegura que esta aplicação é uma bijeção. Como V^0 e $L_0^2(\Omega)$ são ambos espaços de Banach, segue que ∇ é um isomorfismo.

(ii) Em virtude de (i), e desde que div é o operador dual de $-\nabla$, temos que div é um isomorfismo sobrejetor de $(V^0)'$ em $(L_0^2(\Omega))'$. Agora, é suficiente provar que V^0 pode ser identificado com $(V^\perp)'$. Seja \mathbf{g} qualquer elemento de $(V^0)'$ e vamos estender \mathbf{g} a $H_0^1(\Omega)^n$ colocando:

$$\langle \tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{g}, \mathbf{v}^\perp \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n,$$

onde \mathbf{v}^\perp denota a projeção ortogonal de \mathbf{v} sobre V^\perp . Claramente, $\tilde{\mathbf{g}} \in V^0$ e a aplicação linear sobrejetiva $\mathbf{g} \rightarrow \tilde{\mathbf{g}}$ aplica isometricamente $(V^\perp)'$ em V^0 . Isso permite identificar $(V^\perp)'$ e V^0 . □

No próximo lema \mathbf{n} denota a normal exterior unitária a Γ

Lema 9.2. *Seja Ω conexo. Para cada $\mathbf{g} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^n$ satisfazendo $\int_\Gamma \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$ existe uma função $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^n$, que é única a menos de uma função aditiva de V , tal que*

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{em } \Gamma.$$

Além do mais,

$$\inf_{\mathbf{v} \in V} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leq C \|\mathbf{g}\|_{\frac{1}{2},\Gamma}, \tag{9.8}$$

onde a constante $C > 0$ é independente de \mathbf{u} e de \mathbf{g}

Demonstração: Obviamente tal função \mathbf{u} ser única em $[H^1(\Omega)^n]/V$. Verificaremos sua existência. Seja \mathbf{w} qualquer função de $H^1(\Omega)^n$ que satisfaz $\mathbf{w} = \mathbf{g}$ em Γ . Então a fórmula de Green fornece

$$\int_\Omega \text{div } \mathbf{w} \, dx = \int_\Gamma \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0.$$

Assim $\text{div } \mathbf{w} \in L_0^2(\Omega)$ e pelo Corolário (9.2)(ii) há um único \mathbf{v} em V^\perp tal que

$$\text{div } \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{w},$$

e

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leq C_1 \|\operatorname{div} \mathbf{w}\|_{0,\Omega}.$$

Claramente, $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$ é a função requerida. Resta checar (9.8). Primeiro, observamos que

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq C_2 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}$$

com $C_2 > 0$ e independente de \mathbf{w} e \mathbf{u} . Tomando o ínfimo em ambos os lados dessa inequação e usando a norma em $H^{1/2}(\Gamma)$ obtemos (9.8). \square

A seguir construiremos uma formulação abstrata bem adaptada à solução de uma variedade de problemas de valor de fronteira com restrições, como o problema de Stokes.

Sejam X e M dois espaços de Hilbert reais com normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_M$ respectivamente. Sejam X' e M' seus respectivos duais com normas $\|\cdot\|_{X'}$ e $\|\cdot\|_{M'}$. Introduzimos duas formas bilineares contínuas:

$$a(.,.) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad b(.,.) : X \times M \rightarrow \mathbb{R},$$

com normas

$$\|a\| = \sup_{u,v \in X, u,v \neq 0} \frac{a(u,v)}{\|u\|_X \|v\|_X}, \quad \|b\| = \sup_{v \in X, \mu \in M, v \neq 0, \mu \neq 0} \frac{b(v,\mu)}{\|v\|_X \|\mu\|_M}.$$

Vamos considerar o seguinte problema variacional, o qual denominaremos Problema (Q):

Dados $l \in X'$ e $\chi \in M'$, encontrar um par $(u, \lambda) \in X \times M$ tal que

$$a(u, v) + b(v, \lambda) = \langle l, v \rangle, \quad \forall v \in X \quad (9.9)$$

$$b(u, \mu) = \langle \chi, \mu \rangle \quad \forall \mu \in M. \quad (9.10)$$

Associamos às formas $a(.,.)$ e $b(.,.)$ os operadores $A \in B(X; X')$ e $B \in B(X; M')$ definidos por

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle, \quad \forall u, v \in X \quad (9.11)$$

$$b(u, \mu) = \langle Bv, \mu \rangle \quad \forall v \in X, \forall \mu \in M. \quad (9.12)$$

Seja $B' \in B(M; X')$ o operador dual de B , isto é

$$\langle B'\mu, v \rangle = \langle \mu, Bv \rangle = b(v, \mu), \quad \forall v \in X, \forall \mu \in M. \quad (9.13)$$

Pode-se verificar facilmente que

$$\|A\|_{B(X; X')} = \|a\|, \quad \|B\|_{B(X; M')} = \|b\|. \quad (9.14)$$

Com esses operadores, o Problema (Q) pode ser escrito equivalentemente na forma:

Encontrar $(u, \lambda) \in X \times M$ satisfazendo

$$\begin{aligned} Au + B'\lambda &= l \quad \text{em } X' \\ Bu &= \chi \quad \text{em } M'. \end{aligned}$$

Introduzimos o operador $\Phi \in B(X \times M; X' \times M')$ definido por:

$$\Phi(v, \mu) = (Av + B'\mu, Bv).$$

Dizemos que o Problema (Q) é bem-posto se Φ é um isomorfismo sobrejetor de $X \times M$ em $X' \times M'$. Vamos derivar condições necessárias e suficientes para que o Problema (Q) seja bem-posto.

Colocamos $V = \mathcal{N}(B)$, e mais geralmente, para cada $\chi \in M'$, definimos a variedade afim $V(\chi) = \{v \in X; Bv = \chi\}$. Equivalentemente, temos:

$$\begin{aligned} V(\chi) &= \{v \in X; b(v, \mu) = \langle \chi, \mu \rangle \quad \forall \mu \in M\}, \\ V &= V(0). \end{aligned} \tag{9.15}$$

Além disso, como B é contínuo, V é um subespaço fechado de X .

Associamos ao Problema (Q) o Problema (P):

Encontrar $u \in V(\chi)$ tal que

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle, \quad \forall v \in V. \tag{9.16}$$

É evidente que, se $(u, \lambda) \in X \times M$ é uma solução do Problema (Q), então $u \in V(\chi)$ e u é uma solução de (9.16), isto é, u é uma solução do Problema (P). Queremos encontrar condições para que essa afirmação se verifique no sentido oposto. Para isso, definimos o conjunto polar V^0 de V a ser $V^0 = \{g \in X'; \langle g, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V\}$.

Lema 9.3. *As seguintes três propriedades são equivalentes:*

(i) *há uma constante $\beta > 0$ tal que*

$$\inf_{\mu \in M} \sup_{v \in M} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_X \|\mu\|_M} \geq \beta; \tag{9.17}$$

(ii) *o operador B' é um isomorfismo sobrejetor de M em V^0 e*

$$\|B'\mu\|_{X'} \geq \beta \|\mu\|_M, \quad \forall \mu \in M; \tag{9.18}$$

(iii) *o operador B é um isomorfismo sobrejetor de V^\perp em M' e*

$$\|Bv\|_{M'} \geq \beta \|v\|_X, \quad \forall v \in V^\perp. \tag{9.19}$$

Demonstração: Inicialmente mostramos que as propriedades (i) e (ii) são equivalentes. Por (9.13), (i) significa que

$$\|B'\mu\|_{X'} = \sup_{v \in X, v \neq 0} \frac{\langle B'\mu, v \rangle}{\|v\|_X} \geq \beta \|\mu\|_M \quad \forall \mu \in M,$$

logo (9.17) é equivalente a (9.18). Portanto (ii) implica (i). Para provar que (i) implica (ii), resta mostrar somente que, sob a condição (9.18), B' é um isomorfismo sobrejetor de M em

V^0 . Claramente, segue-se de (9.18) que B' é um operador 1-1 que aplica M na sua imagem $\mathcal{R}(B')$ com inverso contínuo. Portanto B' é um isomorfismo sobrejetor de M em $\mathcal{R}(B')$ tal que $\mathcal{R}(B')$ é um subespaço fechado de X' . Assim, temos somente de provar que $\mathcal{R}(B') = V^0$. Para isso, aplicamos o Teorema da Imagem Fechada de Banach ([39]) o qual assegura que

$$\mathcal{R}(B') = (\mathcal{N}(B))^0 = V^0.$$

Isso prova a primeira parte.

Mostraremos agora que as propriedades (ii) e (iii) são equivalentes. Primeiro, observamos que V^0 pode ser isometricamente identificado com $(V^\perp)'$. De fato, para $v \in X$, seja v^\perp denotando a projeção ortogonal sobrejetiva de v em V^\perp . Então, para cada $g \in (V^\perp)'$, associamos um elemento $\tilde{g} \in X'$ definido por

$$\langle \tilde{g}, v \rangle = \langle g, v^\perp \rangle \quad \forall v \in X.$$

Obviamente, $\tilde{g} \in V^0$ e é fácil checar que a correspondência $g \rightarrow \tilde{g}$ é uma bijeção isométrica sobrejetiva de $(V^\perp)'$ em V^0 . Assim podemos identificar $(V^\perp)'$ e V^0 .

Como uma consequência, temos que B é um isomorfismo sobrejetor de V^\perp em M' com

$$\|B^{-1}\|_{B(M';V^\perp)} \leq \beta^{-1}$$

se e somente se B' é um isomorfismo sobrejetor de M em $(V^\perp)' = V^0$ com

$$\|(B')^{-1}\|_{B(V^0;M)} \leq \beta^{-1}.$$

Assim propriedades (ii) e (iii) são equivalentes. □

Para estabelecer o resultado principal, introduzimos o operador $\pi \in B(X'; V')$ por

$$\langle \pi f, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall f \in X', \quad \forall v \in V.$$

Claramente, temos $\|\pi f\|_{V'} \leq \|f\|_{X'}$.

Teorema 9.1. *O Problema (Q) é bem-posto se e só se as seguintes condições se verificam:*

- (i) o operador πA é um isomorfismo sobrejetor de V em V' ;
- (ii) a forma bilinear $b(., .)$ satisfaz a condição inf-sup (9.17).

Demonstração: (i) e (ii) são suficientes. De fato, de (9.17) e Lema 9.3, há um único elemento $u_0 \in V^\perp$ tal que

$$\begin{aligned} Bu_0 &= \chi, \\ \|u_0\|_X &\leq (1/\beta)\|\chi\|_{M'}. \end{aligned}$$

Assim o Problema (P) pode ser estabelecido equivalentemente na seguinte forma:

Encontrar $w = u - u_0 \in V$ satisfazendo

$$a(w, v) = \langle l, v \rangle - a(u_0, v) \quad v \in V$$

ou satisfazendo

$$\pi A w = \pi(l - Au_0).$$

Desde que πA é um isomorfismo sobrejetor de V em V' , o Problema (P) tem uma única solução $u = u_0 + w \in V(\chi)$ e assim

$$\|w\|_X \leq C_1 \|\pi(l - Au_0)\|_{V'} \leq C_1 \|l - Au_0\|_{X'},$$

e

$$\|u\|_X \leq C_2 (\|l\|_{X'} + \|\chi\|_{M'}).$$

Agora, $l - Au \in V^0$. Assim, de acordo com o Lema 9.3 há um único $\lambda \in M$ tal que $B'\lambda = l - Au$ com

$$\|\lambda\|_M \leq (1/\beta) \|l - Au\|_{X'} \leq C_3 (\|l\|_{X'} + \|\chi\|_{M'}).$$

Portanto o Problema (Q) tem uma única solução (u, λ) e a aplicação $(l, \chi) \rightarrow (u, \lambda)$ é contínua e sobrejetiva de $X' \times M'$ em $X \times M$. Isso significa que Φ é um isomorfismo sobrejetor de $X' \times M'$ em $X \times M$.

Provaremos agora a necessidade das condições (i) e (ii). Para isso, assumimos que Φ é um isomorfismo sobrejetor de $X \times M$ em $X' \times M'$. Verifiquemos que a condição (9.17) se verifica. Seja $\chi \in M'$ e coloca $(u, \lambda) = \Phi^{-1}(0, \chi)$. Temos $Bu = \chi$ logo $\mathcal{R}(B) = M'$. Portanto B é uma aplicação 1-1, sobrejetiva e contínua de V^\perp em M' , e assim um isomorfismo sobrejetivo de V^\perp em M' . Assim, em virtude do Lema 9.3, a condição (9.17) se verifica.

Vamos provar que πA é um isomorfismo sobrejetivo de V em V' . Primeiro provaremos que o operador πA é injetivo em V . De fato, seja $u \in V$ satisfazendo $\pi Au = 0$, ou $Au \in V^0$. Desde que a condição (9.17) se verifica, segue-se do Lema 9.3 que B' é um isomorfismo sobrejetivo de M em V^0 . Portanto há um único $\lambda \in M$ tal que $B'\lambda = -Au$. Assim, nós temos $\Phi(u, \lambda) = (0, 0)$ e assim, $u = 0$.

Agora, mostraremos que πA é sobrejetivo. Seja $g \in V'$. Pelo teorema de Hahn-Banach, existe pelo menos um elemento $l \in X'$ tal que $g = \pi l$. Colocamos $(u, \lambda) = \Phi^{-1}(l, 0)$. Claramente, $u \in V$ e

$$Au + B'\lambda = l.$$

Desde que para todo $v \in V$

$$\langle \pi B'\lambda, v \rangle = \langle B'\lambda, v \rangle = \langle \lambda, Bv \rangle = 0,$$

temos $\pi B'\lambda = 0$, ou $\pi Au = \pi l = g$.

Portanto, πA é uma aplicação linear, 1-1, contínua e sobrejetiva de V em V' e assim um isomorfismo sobrejetivo de V em V' . □

Corolário 9.3. *Assuma que a forma bilinear $a(.,.)$ é V -elíptica, isto é, há uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v, v) \leq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in V. \quad (9.20)$$

Então o Problema (Q) é bem-posto se e só se a forma bilinear $b(.,.)$ satisfaz a condição (9.17).

Demonstração: Seja $l \in V'$. Como $a(.,.)$ é V -elíptica, podemos aplicar o Teorema de Lax-Milgram para garantir a existência de um único $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle \quad v \in V,$$

ou equivalentemente $\pi Au = l$. Além disso, a aplicação $l \rightarrow u$ é contínua de V' em V . Portanto, πA é um isomorfismo sobrejetivo de V em V' e o resultado segue do Teorema 9.1. \square

No contexto da formulação acima estabeleceremos que o problema interior de Stokes constitui um problema bem-posto.

Teorema 9.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado, conexo e com contorno Γ Lipschitz. Dados $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^n$ e $\mathbf{g} \in H^{1/2}(\Omega)$ tal que*

$$\int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} ds = 0, \quad (9.21)$$

existe um único par $(\mathbf{u}, p) \in H^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ solução das equações

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{em } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 & \text{em } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} & \text{em } \Gamma. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Demonstração: Em virtude de (9.21) e Lema 9.2, há uma função $\mathbf{u}_0 \in H^1(\Omega)^n$ tal que

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{g} \quad \text{em } \Gamma.$$

Colocaremos o Problema (9.22) na formulação discutida anteriormente. Para isso, sejam $X = H_0^1(\Omega)^n$, $M = L_0^2(\Omega)$ com normas $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{1,\Omega}$, $\|\cdot\|_M = \|\cdot\|_{0,\Omega}$,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}), \quad (9.23)$$

$$b(\mathbf{v}, q) = -(q, \operatorname{div} \mathbf{v}),$$

$$\langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - a(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}), \quad \chi = 0.$$

Então

$$V = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}.$$

Devemos checar que a forma $a(., .)$ é V -elíptica a forma $b(., .)$ satisfaz a condição (9.17). A propriedade de elipticidade é óbvia, já que

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \nu |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2.$$

Por outro lado, a condição (9.17) diz que

$$\sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n} \frac{(q, \operatorname{div} \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}} \geq \beta \|q\|_{0,\Omega}, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \quad (9.24)$$

Seja $q \in L_0^2(\Omega)$; em virtude do Corolário 9.2, existe uma única função $\mathbf{v} \in V^\perp$ tal que

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = q, \quad |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \leq C \|q\|_{0,\Omega}.$$

Portanto

$$\frac{(q, \operatorname{div} \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}} = \frac{\|q\|_{0,\Omega}^2}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}} \geq (1/C) \|q\|_{0,\Omega}.$$

Escolhendo $\beta = 1/C$ obtemos (9.24).

Podemos agora aplicar o Corolário 9.3: existe um único par de funções $(\mathbf{w}, p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ tais que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n \\ b(\mathbf{w}, q) &= 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

Equivalentemente $(\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}, p) \in [\mathbf{u}_0 + H_0^1(\Omega)^n] \times L_0^2(\Omega)$ é a solução das equações

$$\begin{aligned} \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n \\ (q, \operatorname{div} \mathbf{u}) &= 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

Aplicando novamente o Corolário 9.2, essa última equação é equivalente a $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Além disso, $\mathbf{u} \in \mathbf{u}_0 + H_0^1(\Omega)^n$ se e só se

$$\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^n, \quad \mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{g}.$$

Portanto, existe um único par $(\mathbf{u}, p) \in H^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{u}|_\Gamma &= \mathbf{g}. \end{aligned}$$

Agora usando argumentos clássicos é fácil mostrar que este problema é equivalente ao Problema (9.22). □

9.4 Problema Exterior

Nessa seção estudaremos o problema (9.1) no caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio exterior, ou seja, Ω^c é um subconjunto compacto do \mathbb{R}^n .

Como observado na introdução desse trabalho, a imposição de condições de contorno inadequadas pode levar a situações matemáticas não compatíveis com a experiência, como por exemplo, o Paradoxo de Stokes. Nesse contexto, há uma vasta literatura versando sobre questões de existência, unicidade e estimativas *a priori* para diversas situações envolvendo o problema exterior. Destacamos os trabalhos pioneiros de Finn e Noll [14], Finn [13] e Chang e Finn ([8], [13]). Em particular, o resultado sob condições para a unicidade de soluções estabelecido em [8] para fluxos bidimensionais passando por obstáculos com contorno suaves.

A discussão de tais questões em domínios exteriores com contornos mais gerais incluem modificações significativas quando se reduzem as hipóteses de regularidade sobre Γ . Resultados de unicidade podem ser violados, como é destacado no trabalho de Heywood [23]. Soluções explícitas via teoria potencial para o caso em que $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ podem ser vistas no trabalho de Ukai [37]. Tais soluções são rediscutidas no extenso trabalho de Simader [35]. A relevância desses casos vem do fato de que as estimativas *a priori* resultantes constituem uma base para derivar correspondentes resultados no caso em que Ω é limitado ou é um domínio exterior com características especiais, como por exemplo, cilindros com contorno suficientemente suave ([23], [37], [35]).

Resultados de regularidade, existência e unicidade de soluções para o caso em que Ω é de classe $C^{2+\mu}$, $0 < \mu < 1$ aparecem em [25], no caso de $n = 3$. Galdi e Simader [17] tem estendido os resultados de Cattabriga [7] para o caso de domínios exteriores de classe C^2 , para $n \geq 2$. Essa abordagem seguiremos nesse capítulo.

Resultados mais técnicos em domínios exteriores Lipschitz podem ser vistos em [28], onde são estabelecidos, através do uso de técnicas de teoria potencial e espaços de Besov, resultados de regularidade para o problema de Stokes, os quais são extensões dos resultados em [15]. Em particular, soluções explícitas em termos de Potenciais Newtonianos são obtidas.

Classicamente existem numerosas soluções exatas para o problema exterior de Stokes em três dimensões sem forças externas, isto é, para o caso em que $\mathbf{f} = 0$. Elas podem ser encontradas, em detalhes em [21] e [27]. Conforme [10] essas soluções podem ser utilizadas para testar a precisão de métodos numéricos. Citamos alguns exemplos, retirados de [10]. Em coordenadas polares (r, θ) o fluxo axissimétrico em torno de uma esfera de raio a em translação uniforme U é dada por

$$\psi = 1/4Ur^2 \sin^2 \theta \left[\left(\frac{a}{r} \right)^3 - 3 \left(\frac{a}{r} \right) \right].$$

A pressão (para uma dada pressão p_∞) torna-se

$$p = p_\infty + \frac{3}{2}\eta a U \frac{\cos \theta}{r^2}.$$

A solução exata para o fluxo numa região Ω entre duas esferas concêntricas com raios a e b ,

a esfera de raio a em repouso e a de raio b se movendo com velocidade U , é dada por

$$\psi = \alpha U \sin^2 \theta \left[\frac{15}{40}(\lambda^5 - \lambda^3) \frac{r^4}{a^2} - \frac{3}{4}(1 - \lambda^5)ar + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{5}{4}\lambda^3 - \frac{9}{4}\lambda^5 \right) r^2 + \frac{1}{4}(1 - \lambda^3) \frac{a^3}{r} \right]$$

onde

$$\lambda = \frac{a}{b} < 1; \quad \alpha = \left(1 - \frac{9}{4}\lambda + \frac{5}{2}\lambda^3 - \frac{9}{4}\lambda^5 + \lambda^6 \right)^{-1}.$$

As seguintes soluções também podem ser encontradas em [27] ou [21]:

- Fluxo uniforme em torno de um elipsóide de revolução;
- Fluxo uniforme em torno de cilindros muito longos perpendiculares ou paralelos aos eixos;
- Fluxo uniforme em torno de objetos quase esféricos;
- Fluxo uniforme em torno de duas esferas...

Soluções explícitas para geometrias mais gerais não são inteiramente conhecidas, no entanto muitos métodos numéricos têm sido desenvolvidos, especialmente utilizando elementos finitos. Referenciamos o trabalho de Girault e Raviart [19] para uma discussão detalhada do assunto. Métodos que utilizam equações integrais e que, em certo sentido são semi-analíticos, são extensivamente discutidos em [11], [38], [10], [33], [29], [31], [30].

Iniciamos nossa discussão analítica fornecendo uma prova para o caso de um domínio suave por partes, do Paradoxo de Stokes, conforme discussão em [14]

Teorema 9.3. *Para um domínio Ω com contorno Γ suave por partes, a única solução suave limitada em Ω^c para o problema de Stokes (9.1) com $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ é $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$.*

Demonstração: Resultados elementares de teoria potencial mostram que

$$w = \text{rot } \mathbf{v} = O(r^{-1}), \quad p = O(r^{-1}) \tag{9.25}$$

onde r é a distância de Γ a Ω^c .

Também,

$$\int_{\mathcal{U}_r} (\text{rot } \mathbf{v})^2 dA = \int_{C_r} [p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{v} \times \mathbf{n})] ds, \tag{9.26}$$

onde \mathcal{U}_r é a região entre Ω e o círculo C_r de raio r suficientemente grande. A partir de (9.25) e da limitação de \mathbf{v} podemos concluir somente que a integral

$$I = \int_{\mathcal{U}} (\text{rot } \mathbf{v})^2 dA = \int_{\mathcal{U}} w^2 dA \tag{9.27}$$

sobre o exterior \mathcal{U} de Ω é convergente. Além disso, sabemos que w é harmônica em \mathcal{U} e que $w = O(r^{-1})$. Portanto, w é da forma

$$w = w(Q + r\mathbf{e}) = r^{-1}s_0(\mathbf{e}) + O(r^{-2}) \quad (9.28)$$

e portanto

$$w^2 = r^{-2}s_0^2 + O(r^{-3}). \quad (9.29)$$

Aqui \mathbf{e} é um vetor unitário, Q é a origem e s_0 é um harmônico esférico de ordem 0.

Seja \mathcal{U}_{r_0r} a área entre os dois círculos C_{r_0} e C_r ambos exteriores a Ω , tais que \mathcal{U}_{r_0r} está contido em \mathcal{U} . Nós temos de (9.29)

$$\int_{\mathcal{U}_{r_0r}} w^2 dA = \log \frac{r}{r_0} \int_w s_0^2 dw + \int_{\mathcal{U}_{r_0r}} O(r^{-3}) dA \quad (9.30)$$

Isto tende para um limite finito quando $r \rightarrow \infty$, pois a integral (9.27) converge. O segundo termo do lado direito certamente converge e portanto, desde que $\log \frac{r}{r_0}$ não é limitado quando $r \rightarrow \infty$, nós concluímos que $\int_w s_0^2 dw = 0$ e portanto $s_0 = 0$.

Portanto, por (9.29), $w = O(r^{-2}), \dots$ $p = w = O(r^{-2})$ segue. Voltando para a equação (9.26) nós vemos que a integral à direita tende para zero quando $r \rightarrow \infty$ e portanto $\text{rot } \mathbf{v}$, $\text{div } \mathbf{v} = 0$ e $\Delta \mathbf{v} = 0$ em \mathcal{U} . Assim \mathbf{v} é harmônica em uma vizinhança do infinito. Desde que, \mathbf{v} é também limitado segue que para $n = 2$, \mathbf{v} é harmônica em ∞ e portanto uniforme no infinito. Entretanto, para alguma escolha de coordenadas cartesianas, nós temos $v_x \rightarrow v_0$, $v_y \rightarrow 0$, onde v_x e v_y são as componentes de \mathbf{v} . O princípio do máximo para funções harmônicas implica que $v_y \equiv 0$. Assim, $\text{rot } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$, $\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$, e portanto $v_x = \text{const}$. Mas, desde que $v_x = 0$ em Ω , nós temos $v_x \equiv 0$ em todo lugar. \square

Agora analisaremos a existência, unicidade e a validade de estimativas nos espaços $H_0^{1,q}(\Omega)$ para soluções de (9.1) para o caso em que $\mathbf{g} = 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio exterior de classe C^2 , $n \geq 2$ e $\mathbf{f} \in H_0^{-1,q}(\Omega)^n$. Aqui $H_0^{1,q}(\Omega)$, $q \geq 1$, é o complemento de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $\|u\|_{1,q} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^q \right)^{1/q}$.

O interesse nesses espaços reside essencialmente no caso em que Ω é não limitado, já que, se Ω é limitado pelo menos em uma direção, em vista da desigualdade de Poincaré, $H^{1,q}(\Omega) = W_0^{1,q}(\Omega)$. Apresentamos abaixo resultados de caracterização desses espaços que, precisamente, fornecem condições para que uma função $u \in L_{loc}^q(\Omega)$ com $\nabla u \in L^q(\Omega)^n$ pertence a $H_0^{1,q}(\Omega)$. Estudos detalhados podem ser vistos em [17], [16].

Lema 9.4. *Seja Ω um domínio exterior, ou $\Omega = \mathbb{R}^n$, e seja $u \in L_{loc}^q(\Omega)$ com $\nabla u \in L^q(\Omega)^n$, $1 \leq q < n$. Então existe um unicamente determinado $u_0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\int_{S_n} |u(x) - u_0|^q \leq c|x|^{q-n} \int_{|y| \geq |x|} |\nabla u(y)|^q dy,$$

onde S_n é a superfície da bola unitária e $c = c(q, n)$. Além do mais, se Ω é Lipschitz, então $u - u_0 \in L^{\frac{nq}{n-q}}(\Omega)$ e

$$\|u - u_0\|_{\frac{nq}{n-q}} \leq \gamma \|u\|_{1,q},$$

onde $\gamma = \gamma(n, q)$.

Teorema 9.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, um domínio exterior Lipschitz, ou $\Omega = \mathbb{R}^n$. Seja $u \in L^q_{loc}(\Omega)$, $\nabla u \in L^q(\Omega)^n$, $1 \leq q < \infty$. Para $1 \leq q < \infty$, $u \in H^{1,q}_0(\Omega)$ se e só se u é zero em Γ e $u_0 = 0$, onde u_0 é a constante do Lema (9.4). Para $n \leq q < \infty$, $u \in H^{1,q}_0(\Omega)$ se e só se u tem traço zero em $\partial\Omega$.*

Teorema 9.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, um domínio exterior Lipschitz, ou $\Omega = \mathbb{R}^n$. Então para $f \in C^\infty_0(\Omega)$, funcionais da forma (f, u) para $u \in H^{1,q'}(\Omega)_0$ que satisfazem $(f, 1) = 0$ quando $n \leq q' < \infty$ e $\Omega = \mathbb{R}^n$ são limitados em $H^{1,q'}(\Omega)_0$, $1 \leq q' < \infty$. Além do mais seu completamento na norma $H^{-1,q}(\Omega)$ é isomófico e isométrico a $H^{-1,q}(\Omega)$ para $1 < q < \infty$.*

Voltamos agora ao tratamento do problema (9.1). É conveniente introduzirmos o seguinte espaço de funções $D^{1,q}_0(\Omega) = \{\mathbf{u} \in H^{1,q}_0(\Omega)^n : \text{div } \mathbf{u} = 0\}$. Mostraremos que se $1 \leq q < n$ ($1 \leq q \leq n$ se $n = 2$), então a única solução de (9.1) de classe $D^{1,q}_0(\Omega)$ é $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$. Entretanto, se $q \geq n$ ($q > n$ se $n = 2$) há n soluções linearmente independentes $\mathbf{h}^{(i)} \in D^{1,q}_0(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$, tal que qualquer outra solução $\mathbf{v} \in D^{1,q}_0(\Omega)$ é uma combinação linear dos $\mathbf{h}^{(i)}$.

Iniciamos com a prova de existência e unicidade e estimativas- L^q para o problema de Stokes em \mathbb{R}^n

Teorema 9.6. *Dado $\mathbf{f} \in H^{-1,q}(\mathbb{R}^n)^n$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 < q < \infty$, existe uma e somente uma solução distribucional $v \in H^{1,q}(\mathbb{R}^n)^n$, $p \in L^q(\mathbb{R}^n)$ ao seguinte problema em \mathbb{R}^n*

$$\Delta \mathbf{v} = \nabla p + \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = g. \tag{9.31}$$

Essa solução satisfaz

$$|v|_{1,q} + \|p\|_q \leq c(\|\mathbf{f}\|_{-1,q} + \|g\|_q) \tag{9.32}$$

com $c = c(n, q)$.

Demonstração: É suficiente provar o teorema para $f_i, g \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$. O caso geral segue por densidade com a ajuda de (9.32) e do Teorema 9.5. Assim, para \mathbf{f} e g suaves, uma solução pode ser da forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{h}, \quad p = p_1 + p_2$$

onde $\mathbf{h} = \nabla(\mathcal{E} * \mathbf{g})$,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{U} * \mathbf{f}, & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{U} * \Delta \mathbf{h} \\ p_1 &= -\mathbf{q} * \mathbf{f}, & \zeta_2 &= -\mathbf{q} * \Delta \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Aqui \mathcal{E} e $\mathbf{U} = U_{ij}$, $\mathbf{q} = q_i$ são soluções fundamentais das equações de Laplace e de Stokes, respectivamente,

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} c_1(n)|x|^{2-n} & \text{se } n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \ln|x-y| & \text{se } n = 2, \end{cases} \tag{9.33}$$

$$U_{ij}(x) = \begin{cases} c_2(n) \left[\delta_{ij}|x|^{2-n} + (n-2) \frac{x_i x_j}{|x|^n} \right] & \text{se } n \geq 3, \\ \frac{1}{4\pi} \left[\delta_{ij} \ln|x-y| - \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right] & \text{se } n = 2, \end{cases} \tag{9.34}$$

$$q_i(x) = \begin{cases} c_3(n) \frac{x_i}{|x|^n} & \text{se } n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \frac{x_i}{|x|^2} & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

O uso repetido do Teorema de Calderón-Zygmund sobre integrais singulares fornece

$$\|\Delta \mathbf{v}_2\|_q + \|\Delta \mathbf{h}\|_q + \|p_2\|_q \leq c\|g\|_q, \quad (9.35)$$

com $c = c(n, q)$. Por outro lado, conforme [7], para uma bola aberta B_ρ de raio ρ e $\mathbf{w} \in L^{q'}(B_\rho)^n$ nós temos (estendendo \mathbf{w} a ser nulo em B_ρ^c)

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{v}_1\|_{q, B_\rho} &\leq \sup_{0 \neq \varphi \in L^{q'}(B_\rho)^n} \frac{|(\nabla \mathbf{v}_1, \mathbf{w})|}{\|\mathbf{w}\|_{q'}} \\ &= \sup_{0 \neq \mathbf{w} \in L^{q'}(B_\rho)^n} \frac{\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \mathbf{U}(x-y) \cdot \mathbf{w}(x) dx \right] dy \right|}{\|\mathbf{w}\|_q}. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Colocando $\mathbf{W} = \nabla \mathbf{U} * \mathbf{w}$, $\{\mathbf{W}\} \rightarrow \mathbf{0}$ com $|x| \rightarrow \infty$ e, novamente pelo Teorema de Calderón-Zygmund,

$$\|\nabla \mathbf{W}\|_{q', \mathbb{R}^n} \leq c\|\mathbf{w}\|_{q', B_\rho}, \quad (9.37)$$

onde c é independente de ρ . Portanto $\mathbf{W} \in H_0^{1, q'}(\mathbb{R}^n)^n$, $1 < q' < \infty$. As desigualdades (9.36) e (9.37) implicam no limite $\rho \rightarrow \infty$ que

$$\|\nabla \mathbf{v}_1\|_q \leq c\|\mathbf{f}\|_{-1, q}. \quad (9.38)$$

Analogamente,

$$\|p_1\|_q \leq c\|\mathbf{f}\|_{-1, q}. \quad (9.39)$$

Portanto, de (9.35), (9.38) e (9.39) deduzimos (9.32). A unicidade segue de uma aplicação simples do teorema do valor médio para funções harmônicas. \square

Consideraremos o problema homogêneo

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{v} + \nabla p &= 0 & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{v} &= 0 & \text{em } \Gamma, \end{aligned} \quad (9.40)$$

como base para obtenção do resultado geral, conforme [17]. Definimos

$$T(\mathbf{w}, \varphi) = \{T_{ij}(\mathbf{w}, \varphi) = \left\{ -\varphi \delta_{ij} + \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \right\}\} \quad (9.41)$$

como o tensor de tensões associado com \mathbf{w} , φ . Também denotamos Ω_0 o exterior de uma bola aberta de raio R_0 contendo Ω^c . Com essa definição obtemos o seguinte lema de representação

Lema 9.5. *Seja \mathbf{v}, p uma solução C^∞ de (9.1) no domínio Ω_0 , correspondendo a $f \in C_0^\infty(\bar{\Omega})^n$. Então, se $\nabla \mathbf{v} \in L^q(\Omega)^{n^2}$ para algum $1 \leq q < \infty$, existem um vetor e constante escalar \mathbf{v}_0, p_0 tais que*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x) &= \mathbf{v}_0 + \tau \mathbf{U}(x) + \sigma(x), \\ p(x) + p_0 &= \tau q(x) + \eta(x) \end{aligned} \tag{9.42}$$

onde \mathbf{U}, \mathbf{q} é a solução fundamental (9.34),

$$\tau = \left(\int_{\Omega_0} \mathbf{f} - \int_{\partial\Omega_0} T(\mathbf{v}, p) \cdot \mathbf{n} \right) \tag{9.43}$$

e $\sigma(x)$ e $\eta(x)$ satisfazem

$$|D^m \sigma(x)| = O(|x|^{1-n-|m|}), \quad |D^m \eta(x)| = O(|x|^{-n-|m|}) \tag{9.44}$$

com $|x| \rightarrow \infty$ para todo $|m| \geq 0$.

O caso $2 \leq q < \infty$ é demonstrado em [8] e o caso $1 \leq q < 2$ em [16]. Uma consequência imediata desse lema é que se $\mathbf{v} \in D_0^{1,q}(\Omega)$ é uma solução para o problema (9.40) com $1 \leq q < n$ ($1 \leq q \leq n$ para $n=2$), então $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$.

Voltamos agora a atenção ao caso $q \geq n$ ($q > n$ para $n = 2$). Consideremos, inicialmente, o caso $n \geq 3$

Lema 9.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio exterior, $n \geq 3$, de classe C^2 . Para qualquer $\{\mathbf{v}\}_\infty \in \mathbb{R}^n$ existe uma e somente uma solução $\{\mathbf{v}\} \in \mathbf{D}_0^{1,q}(\Omega)$, $p \in L^q(\Omega)$, $q \geq n$, para o problema (9.40) tal que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty$.*

Demonstração: Seja $\xi \in C^\infty(\Omega)$ a qual é igual a 1 próxima de Γ e zero em pontos suficientemente distantes de Γ . Seja $\mathbf{b} = (1/2)\mathbf{v}_\infty(x_2^2, x_3^2, \dots, x_n^2, x_1^2)$ e colocamos

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}_\infty - \Delta(\xi \mathbf{b}) + \nabla[\text{div}(\xi \mathbf{b})]. \tag{9.45}$$

Obviamente, $\mathbf{a} \in [C^\infty(\Omega)]^n$, $\mathbf{a} = \mathbf{v}_\infty$ a grandes distâncias de Γ e $\text{div} \mathbf{a} = 0$. Procuramos uma solução de (9.40) da forma $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{a}$. Como $\Delta \mathbf{a} \in [C^\infty(\Omega)]^n$, argumentos padrões (detalhes em [26]) podem ser usados para mostrar que tal solução existe com $\mathbf{w} \in D_0^{1,q}(\Omega)$ e $p \in L^2(\Omega)$. Além disso, do Lema 9.4 segue-se que $\int_{S_n} |\mathbf{w}(x)| = O(|x|^{2-n})$. Assim \mathbf{v} e p obedecem (9.42) com $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_\infty$ e $p_0 = 0$, e, assim $\nabla \mathbf{v} \in L^q(\Omega_R)^{n^2}$, $p \in L^q(\Omega^R)$ para todo $q > n/(n-1)$. Por outro lado, do resultado de existência e unicidade para o problema interior é fácil ver que $\nabla \mathbf{v} \in L^q(\Omega_R)^{n^2}$, $p \in L^q(\Omega_R)$ e então $\nabla \mathbf{v} \in L^q(\Omega)^{n^2}$, $p \in L^q(\Omega)$. Como \mathbf{v} se anula na fronteira, pelo Teorema 9.4 concluímos que $\mathbf{v} \in D_0^{1,q}(\Omega)$, $q \geq n$, e a existência é assim estabelecida. Notamos que $\mathbf{v} \notin D_0^{1,q}(\Omega)$ para $q \in (n/(n-1), n)$, mesmo se $\nabla \mathbf{v} \in L^q(\Omega)^{n^2}$, para tais valores de q . Com relação à unicidade, denotamos por \mathbf{u} a diferença de duas soluções. Então $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(x) = 0$ e consequentemente, por bem conhecidos argumentos (como pode ser visto em [8]), deduzimos que $\mathbf{u} \equiv 0$. □

O próximo passo é mostrar que o subespaço \mathcal{D}_q de $D_0^{1,q}(\Omega)$, $q \geq n$, consistindo de soluções de (9.40), tem dimensão n . Para esse intento, denotamos por $\mathbf{h}^{(i)}, \pi^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, as soluções construídas no Lema 9.6 correspondendo ao dado no infinito $\mathbf{h}_\infty^{(i)} = \mathbf{e}_i$, \mathbf{e}_i sendo o vetor unitário na direção x_i . Se $\mathbf{v} \in D_0^{1,q}(\Omega)$, $q \geq n$, é qualquer solução de (9.40) (que não se anula identicamente) correspondendo ao campo de pressão p , então pelo Lema 9.5 \mathbf{v} obedece a representação assintótica (9.42) para algum vetor $\mathbf{v}_0 \neq 0$. Como conseqüência, existem números $v^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, nem todos nulos, tais que $\mathbf{v}_0 = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{e}_i$. Assim, $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{h}^{(i)}$ satisfaz (9.40) e, além do mais, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathbf{w}(x) = 0$. Novamente pelo resultado de unicidade em [8], inferimos que $\mathbf{v}(x) = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{h}^{(i)}(x)$ para todo $x \in \Omega$ e que $p(x) = \sum_{i=1}^n v^i \pi^{(i)}(x)$ para o campo de pressão correspondente. Concluímos que os espaços $\mathcal{D}_q \subset D_0^{1,q}(\Omega)$ e $\mathcal{L}_q \subset L^q(\Omega)$ de funções \mathbf{v}, p satisfazendo (9.40) tem dimensão n se $q \geq n \geq 3$.

Consideremos agora o caso $n = 2$. Iniciamos mostrando a existência de duas soluções independentes para o problema (9.40) no espaço $D_0^{1,q}(\Omega)$, $q > n = 2$. Para isso, colocamos

$$\mathbf{u}^{(1)} = (U_{11}, U_{12}), \quad \tau^{(1)} = q_1$$

and

$$\mathbf{u}^{(2)} = (U_{12}, U_{22}), \quad \tau^{(2)} = q_2,$$

onde \mathbf{U}, \mathbf{q} é a solução fundamental. Procuramos soluções para (9.40) da forma

$$\mathbf{h}^{(i)} = \mathbf{u}^{(i)} + \mathbf{v}^{(i)}, \quad \pi^{(i)} = \tau^{(i)} + p^{(i)}, \quad (9.46)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}^{(i)} &= \nabla p^{(i)} \quad \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}^{(i)} &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \mathbf{v}^{(i)} &= -\mathbf{u}^{(i)} \quad \text{em } \Gamma. \end{aligned} \quad (9.47)$$

Podemos estender $-\mathbf{u}^{(i)}$ em Γ a um campo vetorial $\mathbf{v}_*^{(i)} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ o qual é solenoidal e tem suporte compacto em Ω . A existência de $\mathbf{v}_*^{(i)}$ pode ser facilmente estabelecida (ver [26]). Assim procuramos por uma solução para (9.40) do tipo

$$\mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{w}^{(i)} + \mathbf{v}_*^{(i)},$$

ou então

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{w}^{(i)} &= \nabla p^{(i)} + \mathbf{v}_*^{(i)} \quad \text{em } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{w}^{(i)} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ \mathbf{w}^{(i)} &= -\mathbf{u}^{(i)} \quad \text{em } \Gamma. \end{aligned}$$

Soluções $\mathbf{w}^{(i)} \in D_0^{1,2}(\Omega)$, $p^{(i)} \in L^2(\Omega)$ podem ser agora construídas pelo método em [26]. Como $\mathbf{v}_*^{(i)} \in D_0^{1,2}(\Omega)$, pelo Lema 9.5 inferimos que para $|x| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(i)} &= \mathbf{v}_\infty^{(i)} + \underline{\tau}^i \cdot \mathbf{U}(x) + \underline{\sigma}^{(i)}(x) \\ p^{(i)} &= \underline{\tau}^{(i)} \cdot \mathbf{q}(x) + \eta^{(i)}(x), \end{aligned} \quad (9.48)$$

onde

$$D^m \underline{\sigma}^{(i)}(x) = O(|x|^{-1-|m|}), \quad D^m \underline{\eta}^{(i)}(x) = O(|x|^{-1-|m|}) \quad (9.49)$$

para todo $|m| \geq 0$. Além disso,

$$\underline{\tau}^{(i)} = - \int_{\Omega_0} \Delta v_*^{(i)} + \int_{\Gamma_0} \underline{\tau}(\mathbf{v}^{(i)}, p^{(i)}) \cdot \mathbf{n}.$$

Entretanto, desde que $\mathbf{v}^{(i)} \in D_0^{1,2}$ e $p^{(i)} \in L^2(\Omega)$, é fácil ver de (9.48) e (9.49) que $\underline{\tau}^{(i)} = 0$, $i = 1, 2$. Assim, de (9.46)-(9.49) deduzimos a seguinte representação de soluções $\mathbf{h}^{(i)}$, $\pi^{(i)}$, $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(i)} &= \mathbf{v}_\infty^{(i)} + \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{U}(x) + \underline{\sigma}^{(i)}(x) \\ p^{(i)} &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{q}(x) + \eta^{(i)}(x), \end{aligned} \quad (9.50)$$

onde $\underline{\sigma}_i$ e $\eta_i(x)$ satisfazem estimativas análogas a (9.49). As soluções (9.46) são independentes, como é fácil ver. De fato, assumamos que $\mathbf{h}^{(1)}(x) = \alpha \mathbf{h}^{(2)}(x)$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \Omega$. Em vista de (9.50) deveríamos então obter para um vetor constante \mathbf{v}_0 que

$$(\mathbf{e}_1 - \alpha \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{U}(x) = \mathbf{v}_0 + O(|x|^{-1}),$$

o que nos leva a uma contradição.

Pelo Teorema 9.4 obtemos $\mathbf{h}^{(i)} \in D_0^{1,q}(\Omega)$ para todo $q > 2$. Finalmente, toda outra solução $\mathbf{v} \in D_0^{1,q}(\Omega)$, $p \in L^q(\Omega)$ para (9.40) com $q > 2$ pode ser expressado como uma combinação linear de $\mathbf{h}^{(i)}$ e $\pi^{(i)}$, respectivamente. De fato, pelo Lema 9.5 temos

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty + \underline{\tau} \cdot \mathbf{U} + \underline{\sigma}(x), \quad p = p_0 + \underline{\tau} \cdot \mathbf{q} + \eta(x).$$

Por outro lado, $\underline{\tau} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2$ para algum $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Assim, como no caso $n \geq 3$ e lembrando que qualquer solução suave limitada de (9.40) em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é identicamente nula [8], concluímos que $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{h}^{(1)} + \alpha_2 \mathbf{h}^{(2)}$, $p = \alpha_1 \pi^{(1)} + \alpha_2 \pi^{(2)}$. Isso prova a requerida dependência linear.

Enunciamos os resultados provados acima no seguinte teorema

Teorema 9.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, um domínio exterior de classe C^2 . Denotamos por \mathcal{D}_q e \mathcal{L}_q os subespaços de $D_0^{1,q}(\Omega)$ e $L^q(\Omega)$, respectivamente, consistindo de soluções \mathbf{v} ($\in \mathcal{D}_q$), p ($\in \mathcal{L}_q$) a (9.40). Se $1 \leq q < n$ ($1 \leq q \leq n$ para $n = 2$), então $\mathcal{D}_q = \mathcal{L}_q = 0$, enquanto se $q \geq n$ ($q > n$ para $n = 2$), então $\dim \mathcal{D}_q = \dim \mathcal{L}_q = n$.*

Consideraremos agora o caso geral, ou seja, a existência de soluções para o problema (9.1) nos espaços $D_0^{1,q}(\Omega)$ quando $q > n/(n-1)$ ($q \geq n/(n-1)$ para $n = 2$). Denotamos por $\widetilde{D}_0^{1,q}(\Omega)$ e $\widetilde{L}^q(\Omega)$ os espaços quocientes $D_0^{1,q}(\Omega)/\mathcal{D}_q$ e L^q/\mathcal{L}_q respectivamente, onde \mathcal{D}_q e \mathcal{L}_q são definidos como no Teorema 9.7. Introduzimos em $\widetilde{D}_0^{1,q}(\Omega)$ e $\widetilde{L}^q(\Omega)$ as normas

$$\|\mathbf{v}\|_{1,q}^\sim = \inf_{\mathbf{h} \in \mathcal{D}_q} \|\mathbf{v} - \mathbf{h}\|_{1,q}, \quad \|p\|_q^\sim = \inf_{\pi \in \mathcal{L}_q} \|p - \pi\|_q,$$

e denotamos por S_h o espaço dos pares $(\mathbf{h}, \pi) \in \mathcal{D}_q \times \mathcal{L}_q$ satisfazendo (9.1).

Teorema 9.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, um domínio exterior de classe C^2 . Então, para todo $\mathbf{f} \in H^{-1,q}(\Omega)^n$, $n/(n-1) < q < \infty$ ($n/(n-1) \leq q < \infty$ para $n = 2$) existe uma e somente uma solução distribucional $\mathbf{v} \in \widetilde{D}_0^{1,q}(\Omega)$, $p \in \widetilde{L}^q(\Omega)$. Essa solução satisfaz a estimativa*

$$\|\mathbf{v}\|_{1,q} + \|p\|_q \leq \inf_{S_h} \{\|\mathbf{v} - \mathbf{h}\|_{1,q} + \|p - \pi\|_q\} \leq c\|\mathbf{f}\|_{-1,q}. \quad (9.51)$$

Demonstração: É suficiente demonstrar o resultado para $\mathbf{f} \in C_0^\infty(\Omega)^n$, o caso geral pode ser obtido por argumentos padrões de densidade do Teorema 9.4 e (9.51). Para \mathbf{f} suave podemos construir uma solução $\mathbf{v} \in D_0^{1,q}(\Omega)$, $p \in L^2(\Omega)$ pelo método utilizado em [26]. Essa solução satisfaz a estimativa

$$\|\mathbf{v}\|_{1,2} + \|p\|_2 \leq c\|\mathbf{f}\|_{1,2},$$

o que, em particular, prova o teorema no caso especial $q = \frac{n}{n-1}$, $n = 2$. Estimativas para o problema interior estabelecem que

$$\mathbf{v} \in C^\infty(\Omega)^n \cap W^{2,q}(\Omega_R)^n, \quad p \in C^\infty(\Omega) \cap L^q(\Omega_R) \quad (9.52)$$

para todo R suficientemente grande e $q > 1$. Além disso, podemos aplicar o Lema 9.5 para obter

$$\nabla \mathbf{v} \in L^q(\Omega^{R/2})^n, \quad p \in L^q(\Omega^{R/2}) \quad (9.53)$$

para todo $q > n/(n-1)$. Para esses valores de q , (9.52) e (9.53) implicam que $\mathbf{v} \in D_0^{1,q}(\Omega)$, $p \in L^q(\Omega)$.

Seja ψ_R uma função *cutt-off* a qual é 1 em $\Omega_{R/2}$ e 0 em $\Omega_{R/4}$. Colocando $\mathbf{u} = \psi_R \mathbf{v}$, $\tau = \psi_R p$ obtemos

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla \tau + \mathbf{F}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = g \quad (9.54)$$

onde

$$\mathbf{F} = \psi_R \mathbf{f} + \mathbf{T}(\mathbf{v}, p) \cdot \nabla \psi_R + \operatorname{div}(\nabla \psi_R \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla \psi_R), \quad g = \nabla \psi_R \cdot \mathbf{v}. \quad (9.55)$$

Considerando (9.54) em todo \mathbb{R}^n , do Teorema 9.6 deduzimos que

$$\|\mathbf{v}\|_{q,\Omega_{R/2}} + \|p\|_{q,\Omega_{R/2}} \leq c(\|\psi_R \mathbf{f} + \mathbf{T}(\mathbf{v}, p) \cdot \nabla \psi_R\|_{-1,q} + \|\nabla \psi_R\|_{1,q}). \quad (9.56)$$

Agora, para todo $\underline{\phi} \in H^{1,q'}(\mathbb{R}^n)^n$, $q' < n$, facilmente pode-se mostrar, via a desigualdade de Poincaré que

$$|(\psi_R \mathbf{f}, \underline{\psi})| \leq \|\mathbf{f}\|_{-1,q} \|\psi_R \underline{\psi}\|_{1,q'} \leq c\|\mathbf{f}\|_{-1,q} \|\underline{\psi}\|_{1,q'}. \quad (9.57)$$

Da mesma forma, levando em consideração que $(D_i \psi_R) \phi_j \in W_0^{1,q}(\Omega_R)$ temos de (9.41)

$$\begin{aligned} |(\mathbf{T}(\mathbf{v}, p) \cdot \nabla \psi_R, \underline{\phi})| &\leq |(D_i v_j, (D_i \psi_R) \phi_j)| \\ &\quad + |(D_j v_i, (D_i \psi_R) \phi_j)| + |(p \delta_{ij}, (D_i \psi_R) \phi_j)| \\ &\leq c(\|\mathbf{v}\|_{q,\Omega_{R/2}} + \|p\|_{-1,q,\Omega_{R/2}}) \|\underline{\phi}\|_{1,q'}. \end{aligned} \quad (9.58)$$

Assim, (9.56)-(9.58) implicam que

$$\|\nabla \mathbf{v}\|_{q,\Omega_{R/2}} + \|p\|_{q,\Omega_{R/2}} \leq c(\|\mathbf{f}\|_{-1,q} + \|\mathbf{v}\|_{q,\Omega_{R/2}} + \|p\|_{-1,q,\Omega_{R/2}}). \quad (9.59)$$

Além disso, resultados em [7] fornecem

$$\|\mathbf{v}\|_{1,q,\Omega_R} + \|p\|_{q,\Omega_R} \leq c(|\mathbf{f}|_{-1,q} + \|\mathbf{v}\|_{q,\Omega_R} + \|p\|_{-1,q,\Omega_R} + \|\mathbf{v}\|_{1-(1/q),q(\sigma_R)}), \quad (9.60)$$

onde $\sigma_R = \{x \in \Omega : |x| = R\}$ e onde temos usado a inequação $\|\mathbf{f}\|_{-1,q,\Omega_R} \leq |\mathbf{f}|_{-1,q}$. Utilizando o teorema de traço deduzimos que

$$\|\mathbf{v}\|_{1,q,\Omega_R} + \|p\|_{q,\Omega_R} \leq c(|\mathbf{f}|_{-1,q} + \|\mathbf{v}\|_{q,\Omega_R} + \|p\|_{-1,q,\Omega_R} + \|\nabla \mathbf{v}\|_{q,\Omega_{R/2}}). \quad (9.61)$$

Conseqüentemente, de (9.59), (9.61) segue-se que

$$|\nabla \mathbf{v}|_{1,q} + \|p\|_q \leq c(|\mathbf{f}|_{-1,q} + \|\mathbf{v}\|_{q,\Omega_R} + \|p\|_{-1,q,\Omega_R}). \quad (9.62)$$

É evidente que a relação (9.62) permanece inalterada se subtraímos de \mathbf{v} qualquer função $\mathbf{h} \in \mathcal{D}_q$ e de p o correspondente campo de pressão $\pi \in \mathcal{L}_q$. Assim, (9.62) implica

$$|\mathbf{v}|_{1,q}^{\sim} + \|p\|_q^{\sim} \leq c(|\mathbf{f}|_{-1,q} + \inf_{(\mathbf{h},\pi)} \{\|\mathbf{v} - \mathbf{h}\|_{q,\Omega_R} + \|p - \pi\|_{-1,q,\Omega_R}\}). \quad (9.63)$$

Agora asseguramos a existência de uma constante c , dependendo somente sobre n, q e Ω_R , tal que

$$\inf_{(\mathbf{h},\pi)} \{\|\mathbf{v} - \mathbf{h}\|_{q,\Omega_R} + \|p - \pi\|_{-1,q,\Omega_R}\} \leq c|\mathbf{f}|_{-1,q}. \quad (9.64)$$

De fato, (9.64) segue de um argumento clássico, como pode ser visto em [2] e, pelas imersões compactas $H_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega')$, $L^q(\Omega) \hookrightarrow H^{-1,q}(\Omega')$ (com Ω' um subconjunto limitado de Ω), desde que a unicidade se verifica na classe de soluções $\mathbf{v} \in \widetilde{D}_0^{1,q}(\Omega)$, $p \in \widetilde{L}^q(\Omega)$. Isso é equivalente ao fato que (9.40) admite somente soluções $\mathbf{h} \in \mathcal{D}_q$ e $\pi \in \mathcal{L}_q$, o que já havíamos estabelecido no Teorema 9.7. Concluimos assim que (9.64) é válido, completando a prova do teorema. \square

Bibliografia

- [1] Adams, R.: *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] Agmon, S., Douglis, A., and Nirenberg, L. : *Estimates near the boundary of solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II*. Comm. Pure Appl. Math. 17(1964), 35-92.
- [3] Alliot, F., and Amrouche, C.: *The Stokes problem em \mathbb{R}^n :an aproach in weighted Sobolev spaces*. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 9, 5 (1999), 723-754.
- [4] Batchelor, G.: *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, London, 1967.
- [5] Birkhoff, G.: *Hydrodynamics:a study in logic, fact and similitude*. Princeton University Press, Princeton, 1960.
- [6] Brown, R.M., and Shen, Z.: *Estimates for the Stokes operator in Lipschitz domains*. Indiana Univ. Math. J. 44, 4 (1995), 1183-1207.
- [7] Cattabriga, L.: *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes*. Rend. Sem. Mat. Padova 31 (1961), 308-340.
- [8] Chang, I., and Finn, R.: *On the solutions of a class of equations occurring in continuum mechanics with application to the Stokes paradox*. Arch. Rational Mech. Anal. 7 (1961), 388-401.
- [9] Chorin, A., and Marsden, J.: *A Mathematical Introduction to Fluid Dynamics*. 3 ed. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [10] Dautray, R., and Lions, J.: *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and technology: Evolution Equations II*. vol.6. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [11] Deuring, P.: *Calculating Stokes flows around a sphere:comparison of artificial boundary conditions*. Ann. Univ. Ferrara XLVI (2000), 1-9.
- [12] Fabes, E., Kenig, C., and Verchota, G.: *The Dirichlet problem for the Stokes system on Lipschitz domains*. Duke Math. J. 1344 (1988), 55-80.

- [13] Finn, R.: *On steady-state solutions of the Navier-Stokes partial differential equations*. Arch. Rational Mech. Anal. 3, 5 (1959), 381-396.
- [14] Finn, R., and Noll, W.: *On the uniqueness and non-existence of Stokes flow*. Arch. Rational Mech. Anal. 1 (1957), 97-106.
- [15] Galdi, G.: *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations I*. Springer: Linearized steady problems, New York (1994).
- [16] Galdi, G., and Maremonti, P.: *Monotonic decreasing and asymptotic behavior of the kinetic energy for weak solutions of the Navier-Stokes equations in exterior domains*. Arch. Rational Mech. Anal. 94 (1986), 253-266.
- [17] Galdi, G., and Simader, C.: *Existence, uniqueness and L_q estimates for the Stokes problem in an exterior domain*. Arch. Rational Mech. Anal. 112, 4 (1990), 291-318.
- [18] Giga, Y.: *Domains of fractional powers of the Stokes operator in L_r spaces*. Arch. Rational Mech. Anal. 89(1985), 251-265.
- [19] Girault, V., and Raviart, P.: *Finite element method for Navier-Stokes equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [20] Golstein, S.: *Modern Developments in Fluid Dynamics*. vol. 1 and 2. Oxford University Press, Oxford, 1938.
- [21] Happel, J., and Brenner, H.: *Low Reynolds Hydrodynamics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- [22] Heywood, J.G.: *On stationary solutions of the Navier-Stokes equations as limits of nonstationary solutions*. Arch. Rational Mech. Anal. 37, 1 (1970), 48-60.
- [23] Heywood, J.G.: *On uniqueness questions in the theory of viscous flows*. Acta Mathematica 136 (1976), 61-102.
- [24] Kellogg, R., and Osborn, J.: *A regularity result for the Stokes problem in a convex domain*. Journal of Functional Analysis, 21 (1976), 397-431.
- [25] Kozono, H., and Sohr, H.: *New a priori estimates for the Stokes equations in exterior domains*. Indiana Univ. Math. J. 40, 1 (1991), 1-28.
- [26] Ladyzhenskaya, O.: *The mathematical theory of the viscous incompressible flows*. Gordon e Breach, New York, 1969.
- [27] Lamb, S.H.: *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, London, 1923.
- [28] Lang, J., and Méndez, O.: *Potential techniques and regularity of boundary value problems in exterior non-smooth domains*. Preprint:Ohio State University Mathematical Research Institute (2002).

- [29] Meiners, J., and Quake, S.: *Direct measurement of hydrodynamic cross correlations between two particles in an external potential*. Phys. Rev. Lett. 10, 82 (1999), 2211-2214.
- [30] Power, H., and Febres de Power, B.: *Second kind integral equation formulation for the slow motion of a particle*. SIAM-J. Appl. Math. 3, 5 (1998), 381-396.
- [31] Power, H., and Miranda, G.: *Second kind integral equation formulation of Stokes' flows past a particle of arbitrary shape*. SIAM-J. Appl. Math. 3, 5 (1987), 381-396.
- [32] Purcell, E.: *Life at low Reynolds number*. Am. J. Phys., 45 (1977), 3-11.
- [33] Roumeliotis, J.: *A boundary integral method applied to Stokes flow*. PhD thesis, University of New South Wales, New South Wales, 2000.
- [34] Shen, Z.: *A note on the Dirichlet problem for the Stokes system in Lipschitz domains*. Proc. Am. Math. Soc. 123, 429 (1995), 801-811.
- [35] Simader, C.: *Another look on weak L^q -solutions to Stokes' system in a half-space*. Quaderni di Matematica, to appear,(2003).
- [36] Stokes, S.G.: *Mathematical and physical papers*. Cambridge University Press, London, 1880-1905.
- [37] Ukai, S.: *A solution formula for the Stokes equation in R_+^n* . Comm. Pure App. Math. XL, 5 (1987), 611-621.
- [38] Yoon, B., and Kim, S.: *A boundary collocation method for the motion of two spheroids in Stokes flow: hydrodynamic and colloidal interactions*. Int.J.Multiphase Flow 16, 4 (1990), 639-649.
- [39] Yosida, K.: *Functional Analysis*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

Capítulo 10

O limite de Navier-Stokes da equação de Boltzmann

10.1 Introdução

Os modelos hidrodinâmicos tais como as equações de Navier-Stokes ou Euler foram primeiro estabelecidos aplicando a segunda lei de Newton do movimento para elementos de volume infinitesimal do fluido em consideração. Todas as equações da dinâmica de fluidos podemos obter deste modo (ver [18]). Não obstante este método não funciona ao relacionar equações de estado (expressando por exemplo a pressão em termos da densidade e temperatura) o coeficientes de transporte (condução de calor o viscosidade) para dados microscópicos (tais como as leis governando as interações moleculares). No caso particular da dinâmica de gases a teoria cinética permite expressar funções termodinâmicas e coeficientes de transporte para gases perfeitos em termos de puramente dados mecânicos sobre colisões entre moléculas de gas.

O trabalho de Boltzmann sobre os princípios da mecânica sugere o problema de desenvolver matematicamente os processos de limite os quais conduzem da vista atomistic às leis do movimento (ver [16]).

Em [14] um resultado parcial deste problema foi obtido, i.e., o processo de limite desde a equação de Boltzmann de a teoria cinética clássica de gases para as equações de Navier-Stokes de fluidos incompressível. Este limite foi primeiro discutido por Y. Sone em [28] no caso estacionário baseando-se em expansões assintóticas formais e depois por C. Bardos, F. Golse and C.D. Levermore em [5], [6] no caso dependente do tempo por um método sistemático de moment-closure. A primeira prova matemática completa deste limite foi dado por C. Bardos e S. Ukai [7] no caso dos dados iniciais pequenos que conduzem para soluções suaves; K. Asano [1] estudou independentemente o mesmo limite para curtos tempos. Uma justificação completa da expansão de Hilbert para o limite de Navier-Stokes incompressível como em [28] foi dado por A. DeMasi, R. Esposito e J. Lebowitz em [11]. No entanto esses métodos no conseguem incluir a generalidade de todos os dados físicos iniciais aceitáveis para as equações de Boltzmann ou Navier-Stokes, pelo menos desde que continua desconhecido se inicialmente soluciones suaves para estas equações podem ter singularidades num

tempo finito. O erro na prova em [11] (pelo menos em sua presente formulação) é que nos conduz a soluções da equação de Boltzmann que não são quasi sempre não negativo, o qual é incompatível com o significado físico original das soluções da equação de Boltzmann como densidades do espaço fase.

No presente os únicos teoremas conhecidos sobre a existência global das soluções para ambas equações no domínio \mathbb{R}^3 para todos os dados iniciais fisicamente aceitáveis foi dado por J. Leray [20] no caso das equações de Navier-Stokes e de R. DiPerna e P. L. Lions [12] no caso da equação de Boltzmann. Ambos resultados nos conduzem a soluções fracas para os quais os métodos de [7] ou [17] não podem aplicar-se.

Por essa razão, um programa sobre a derivação das soluções de Leray (fraca) das equações de Navier-Stokes desde as soluções renormalizadas de DiPerna-Lions da equação de Boltzmann foi estudada por C. Bardos, F. Golse e C.D. Levermore em [2]. Ali, a derivação é discutida rigorosamente no caso do tempo discretizado sob duas condições na sequência de soluções renormalizadas consideradas. Este método foi estendido-se por P.-L. Lions e N. Masmoudi para o caso de dependente do tempo em [22], sob as mesmas duas condições. A verificação dessas condições não está garantida pela equação de Boltzmann na presente afirmação de modo que as derivações em [2] e [22] ficam incompletas. Em [29] pode-se encontrar uma recente pesquisa destas questões.

Em [14] se mostra como evitar a necessidade para que ambas hipóteses não se verifiquem em [2] ou [22], portanto provando o limite de Navier-Stokes da equação de Boltzmann (incluindo a equação de convecção-difusão para o campo de temperatura) para todos os dados iniciais fisicamente aceitáveis. Francois estuda o caso de núcleos de colisões limitados.

Um método alternativo, proposto por J. Quastel e H.-T. Yau em [27] consiste em derivar as equações de Navier-Stokes de stochastic lattice gas. Alguns métodos em [27] podem eventualmente provar utilidade no contexto de limites hidrodinâmicos. Não obstante este resultado está distante da sexta questão original de Hilbert [16]: a verdade o modelo microscópico em [27] não é um princípio fundamental da física nem uma consequência de esta. Tudo o contrário, a equação de Boltzmann é amplamente aceita e usada como um modelo microscópico legítimo. De fato, esta foi rigorosamente derivada por O. Lanford da dinâmica Newtoniana de um número grande de esferas interagindo por colisões elásticas [19]-ver também [9].

10.2 A equação de Boltzmann

Na teoria cinética, um gás é descrito por uma função $F \equiv F(t, x, v) \geq 0$ medindo a densidade de moléculas de gás as quais no tempo $t \in \mathbb{R}_+$ são localizadas em $x \in \mathbb{R}^3$ e tem velocidade instantânea $v \in \mathbb{R}^3$. Esta função, chamada usualmente “função de distribuição”, é governada por a equação de Boltzmann.

$$\partial_t F + v \cdot \nabla_x F = \mathcal{B}(F, F) \quad (10.1)$$

onde $\mathcal{B}(F, F)$ é a integral de colisão de Boltzmann. Esta integral de colisão atua somente sob v de F e esta expressado como

$$\mathcal{B}(F, F)(t, x, v) = \int \int_{\mathbb{R}^3 \times S^2} (F' F'_1 - F F_1) b(v - v_1, \omega) |\cos(v - v_1, \omega)| d\omega dv_1 \quad (10.2)$$

onde as notações F_1, F' e F'_1 designam respectivamente os valores $F(t, x, v_1), F(t, x, v')$ e $F(t, x, v'_1)$, com v' e v'_1 dados em termos de $v_1 \in \mathbb{R}^3$ e $\omega \in S^2$ por as formulas

$$\begin{aligned} v' &= v - (v - v_1) \cdot \omega \omega \\ v'_1 &= v_1 - (v - v_1) \cdot \omega \omega \end{aligned} \quad (10.3)$$

Essas formulas dan todas as soluções possíveis para o sistema com v' e v'_1 desconhecidos

$$\begin{aligned} v' + v'_1 &= v + v_1 \\ |v'|^2 + |v'_1|^2 &= |v|^2 + |v_1|^2 \end{aligned} \quad (10.4)$$

em termos dos dados v e v_1 e de um vetor unitário arbitrário ω . As relações (10.4) são a conservação de momento e energia cinética para cada colisão binaria entre moléculas de gas. A notação $d\omega$ designa a medida uniforme sobre a esfera S^2 normalizada assim, temos

$$\int_{S^2} d\omega = 2, \quad \text{o que implica} \quad \int_{S^2} |\cos(z, \omega)| d\omega = 1 \quad \forall z \in \mathbb{R}^3 \quad (10.5)$$

onde usamos a notação

$$d\sigma_{v, v_1}(\omega) = |\cos(v - v_1, \omega)| d\omega \quad (10.6)$$

Observe que (ver [14])

$$d\sigma_{v, v_1}(\omega) = d\sigma_{v_1, v}(\omega) \quad (10.7)$$

Desde que o função $(v, v_1) \mapsto (v', v'_1)$ é uma isometria linear de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ para cada $\omega \in S^2$, temos

$$\begin{aligned} d\omega dv dv_1 &= d\omega dv' dv'_1 \\ d\sigma_{v, v_1}(\omega) dv dv_1 &= d\sigma_{v', v'_1}(\omega) dv' dv'_1 \end{aligned} \quad (10.8)$$

O núcleo colisão $b \equiv b(z, \omega)$ é em geral uma função quasi sempre positiva definida sobre $\mathbb{R} \times S^2$ e que satisfaz

$$b(v - v_1, \omega) = b(v_1 - v, \omega) = b(v' - v'_1, \omega) \quad (10.9)$$

para quase sempre $(v, v_1, \omega) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times S^2$. Também assume-se que satisfaz a condição

$$(1 + |v|)^{-2} \int_{|v_1| < R} \int_{S^2} b(v - v_1, \omega) d\sigma_{v, v_1}(\omega) dv_1 \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad |v| \rightarrow +\infty \quad (10.10)$$

para todo $R > 0$. Esta estimativa é valida para todos os potenciais fisicamente relevantes satisfazendo a hipóteses de cutoff angular de Grad (ver [15] e [8] para mais detalhes). Essas

propriedades do núcleo colisão b especialmente a simétrica (10.8) e (10.9), implica que a relação

$$\begin{aligned} & \iiint (f' f'_1 - f f_1) \varphi(v, v_1, v' v'_1) b(v - v_1, \omega) d\sigma_{v, v_1}(\omega) dv_1 dv \\ &= \iiint (f' f'_1 - f f_1) \phi(v, v_1, v' v'_1) b(v - v_1, \omega) d\sigma_{v, v_1}(\omega) dv_1 dv \quad (10.11) \\ &= \iiint (f' f'_1 - f f_1) \Phi(v, v_1, v' v'_1) b(v - v_1, \omega) d\sigma_{v, v_1}(\omega) dv_1 dv \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \phi(v, v_1, v', v'_1) &= \frac{1}{2}(\varphi(v, v_1, v' v'_1) + \varphi(v_1, v, v'_1, v')) \\ \Phi(v, v_1, v', v'_1) &= \frac{1}{4}(\varphi(v, v_1, v', v'_1) + \varphi(v_1, v, v'_1, v') \\ &\quad - \varphi(v', v'_1, v, v_1) - \varphi(v'_1, v', v_1, v)) \end{aligned}$$

são validas sempre que as integrais tiveram sentido, por exemplo se

$$f \in \mathbf{C}_c(\mathbb{R}^3) \quad \text{e se} \quad \varphi \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3).$$

O estado de equilíbrio para a integral de colisão de Boltzmann em outras palavras $E \equiv E(v)$ tal que $\mathcal{B}(E, E) = 0$ são o Maxwellians, i.e. as funções distribuição da forma

$$M_{\rho, u, \theta}(v) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{3/2}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}} \quad (10.12)$$

para algum $\rho > 0$, $\theta > 0$ e $u \in \mathbb{R}^3$. Usaremos a notação M para designar $M_{(1,0,1)}$.

Estamos interessados com soluções da equação de Boltzmann os quais convergem para algum estado Maxwellian quando $|x| \rightarrow +\infty$ sem perder geralidade podemos assumir que este Maxwellian é M ($M = M_{(1,0,1)}$). Consideremos a seguinte variante escalada de (10.1)

$$\begin{aligned} \epsilon \partial_t F_\epsilon + v \cdot \nabla_x F_\epsilon &= \frac{1}{\epsilon} \mathcal{B}(F_\epsilon, F_\epsilon), \quad t > 0, \quad x, v \in \mathbb{R}^3 \\ F_\epsilon(t, x, v) &\rightarrow M(v), \quad \text{as} \quad |x| \rightarrow +\infty \\ F_\epsilon(0, x, v) &= F_\epsilon^{in}(x, v), \quad x, v \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (10.13)$$

onde $\epsilon > 0$ designa o order comum da magnitude do numero de Knudsen e Mach (ver introdução em [2] para um estudo detalhado sob scalings), e onde $F_\epsilon^{in} \geq 0$ quase sempre, é uma família de funções mensuráveis tal que

$$\sup_{\epsilon > 0} \frac{1}{\epsilon^2} \iint \left[F_\epsilon^{in} \log \left(\frac{F_\epsilon^{in}}{M} \right) - F_\epsilon^{in} + M \right] dv dx < +\infty \quad (10.14)$$

Para qualquer par de funções mensuráveis f e g definido quase sempre sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ e satisfazendo $f \geq 0$ e $g > 0$ quase sempre, usamos a notação seguinte para a entropia seguinte

$$H(f|g) = \iint \left[f \log \left(\frac{f}{g} \right) - f + g \right] dv dx \in [0, +\infty] \quad (10.15)$$

Uma solução renormalizada relativa a M de (10.13) é uma função não negativa F_ϵ que pertence a $\mathbf{C}(\mathbb{R}_+; L^1_{loc}(\mathbb{R}^3; L^1(\mathbb{R}^3)))$, satisfaz

$$\Gamma\left(\frac{F_\epsilon}{M}\right)\mathcal{B}(F_\epsilon, F_\epsilon) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \quad (10.16)$$

para todo $\Gamma \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}_+)$ tal que

$$\Gamma(0) = 0 \quad e \quad z \rightarrow (1+z)\Gamma'(z) \quad e \quad \text{limitado sobre } \mathbb{R}_+, \quad (10.17)$$

tem entropia finita relativa para todos os tempos relativos:

$$H(F_\epsilon(t, \cdot, \cdot)|M) < +\infty, \quad t > 0 \quad (10.18)$$

e finalmente satisfaz

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \iint \Gamma\left(\frac{F_\epsilon}{M}\right) \left(\partial_t \chi + \frac{1}{\epsilon} v \cdot \nabla_x \chi \right) M dv dx dt \\ & + \iint \Gamma\left(\frac{F_\epsilon^{in}}{M}\right) \chi(0, x, v) M dv dx \\ & + \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^{+\infty} \iint \Gamma'\left(\frac{F_\epsilon}{M}\right) \mathcal{B}(F_\epsilon, F_\epsilon) \chi dv dx dt = 0 \end{aligned} \quad (10.19)$$

para cada função teste $\chi \in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

Os métodos de R. DiPerna e P.-L.Lions [12]-e seu extensão por P.-L.Lions [25]-conduzem ao seguinte resultado de existência global.

Teorema 10.1. *Sea $\epsilon > 0$ e $F_\epsilon^{in} \equiv F_\epsilon^{in}(x, v)$ uma função quase sempre não negativa medível definida sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ tal que $H(F_\epsilon^{in}|M) < +\infty$. Então existe uma solução renormalizada de (10.13) relativo a M o qual satisfaz*

- *A conservação local de massa no sentido de distribuições*

$$\partial_t \int F_\epsilon dv + \nabla_x \cdot \frac{1}{\epsilon} \int v F_\epsilon dv = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (10.20)$$

- *e a desigualdade da entropia relativa*

$$H(F_\epsilon(t, \cdot, \cdot)|M) + \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^t \iint D(F_\epsilon) dv dx ds \leq H(F_\epsilon^{in}|M) \quad (10.21)$$

para todo $t > 0$, onde o termo de dissipação $D(f)$ é definido para todas as funções mensuráveis positivas $f \equiv f(v)$ por

$$D(f) = \frac{1}{4} \iint (f' f'_1 - f f_1) \log \left(\frac{f' f'_1}{f f_1} \right) b(v - v_1, \omega) d\sigma_{v, v_1}(\omega) dv_1. \quad (10.22)$$

Que a conservação local de momento

$$\partial_t \int v F_\epsilon dv + \nabla_x \cdot \frac{1}{\epsilon} \int v \otimes v F_\epsilon dv = 0 \quad (10.23)$$

se verifica no sentido de distribuições sobre $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^3$ é ainda desconhecido, a menos que F_ϵ é uma solução clássica da equação de Boltzmann. (P.-L. Lions e N. Masmoudi fizeram uma interessante observação adicional sobre o item dado em [23]). Isto é uma das dificuldades em derivar rigorosamente os modelos hidrodinâmicos da equação de Boltzmann.

Da mesma maneira, é ainda desconhecido se (10.21) é uma igualdade a menos que F_ϵ é uma solução clássica; a relação (10.21) com o sinal da igualdade é uma das mais importantes propriedades formais da equação de Boltzmann conhecida como teorema H de Boltzmann.

Observação 10.1. *A noção de solução renormalizada relativa a M da equação de Boltzmann (10.13) ligeiramente difere da noção original de solução renormalizada definida em [12], [25]. Um argumento elemental mostra que as soluções renormalizadas no usual sentido construído em [25] são soluções renormalizadas relativas a M como definidas anteriormente.*

10.3 As equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes governam o campo de velocidade

$$u \equiv u(t, x) \in \mathbb{R}^3$$

de um fluido incompressível. Ellos são

$$\begin{aligned} \nabla_x \cdot u &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \\ \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x p &= \nu \Delta_x u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (10.24)$$

onde $\nu > 0$ é a viscosidade cinemática do fluido. A primeira igualdade expressa que o movimento do fluido preserva o volume e chamada como a condição de incompressibilidade; a segunda igualdade expressa a segunda lei de Newton de movimento para qualquer volume infinitesimal del fluido.

Considere os espaços de funções

$$\mathcal{H} = \{u \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \mid \nabla_x \cdot u = 0\}, \quad \mathcal{V} = \mathcal{H} \cap H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$$

Em particular \mathcal{H} é o espaço dos campos de velocidades incompressíveis em três dimensões com energia cinética finita $\frac{1}{2} \int |u|^2 dx$.

Sea $u^{in} \in \mathcal{H}$, e considere o problema de Cauchy para com dado inicial.

$$u(0, x) = u^{in}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (10.25)$$

Uma solução fraca para o problema de Cauchy (10.24)-(10.25) é um elemento $u \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+; \omega - \mathcal{H}) \cap L^2(\mathbb{R}_+; \mathcal{V})$ que satisfaz a relação.

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int u(t, x) \cdot \partial_t \chi(t, x) dx dt + \int_0^{+\infty} \int u^{\otimes 2}(t, x) : \nabla_x \chi(t, x) dx dt \\ & + \int u^{in} \cdot \chi(0, x) = \nu \int_0^{+\infty} \int \nabla_x u(s, x) : \nabla_x \chi(s, x) dx ds \end{aligned} \quad (10.26)$$

para cada campo de vetores teste com divergência livre $\chi \in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$. Lembremos que o único teorema de existência global conhecido válido para o problema de Cauchy (10.24)-(10.25) sem restrição sobre o tamanho do dado inicial na classe \mathcal{H} do campo de velocidades três dimensionais com divergência livre e um energia cinética finita livre é o seguinte

Teorema 10.2 (J. Leray). *Para cada $u^{in} \in \mathcal{H}$, existe pelo menos uma solução fraca de (10.24)-(10.25) satisfazendo a desigualdade da energia*

$$\frac{1}{2} \int |u(t, x)|^2 dx + \nu \int_0^{+\infty} \int |\nabla_x u(s, x)|^2 dx ds \leq \frac{1}{2} \int |u^{in}(x)|^2 dx \quad (10.27)$$

para todo $t > 0$

A solução fraca de (10.24)-(10.25) que satisfaz ademais a desigualdade de energia (10.24) para todo $t > 0$ chama-se uma solução de Leray. Ainda é desconhecido se existe uma única solução de Leray de (10.24)-(10.25). Não obstante se o sistema (10.24)-(10.25) tem uma solução clássica com x-derivadas limitadas, esta solução é única entre a classe das soluções de Leray de (10.24)-(10.25). Não se provou ainda a igualdade para (10.27), a menos que u é uma solução clássica de (10.24)-(10.25). Também é desconhecido a verificação da igualdade de (10.21) a menos que F_ϵ é uma solução clássica de (10.13).

A desigualdade da energia de Leray (10.27) e a desigualdade da entropia de DiPerna-Lions (10.21) são similares. Mais precisamente, foi provado por C. Bardos, F. Golse e C.D. Levermore em [2] que a desigualdade da energia de Leray (10.27) é a forma limite da desigualdade da entropia de DiPerna-Lions (10.21). Isto confirma a opinião expressada por P.-L. Lions (ver [24], p.432): “[...] o resultado da existência global das [renormalizadas] soluções [...] podem ser vistas como o análogo para a equação de Boltzmann pelo trabalho sobre as equações de Navier-Stokes por J. Leray”.

10.4 O sistema Navier-Stokes-Fourier.

O sistema de Navier-Stokes-Fourier é uma extensão das equações de Navier-Stokes que modelam o campo de velocidade $u \equiv u(t, x) \in \mathbb{R}^3$ e o campo de (flutuação de) temperatura $\theta \equiv \theta(t, x) \in \mathbb{R}$ em um fluido incompressível. O sistema de Navier-Stokes-Fourier é

$$\begin{aligned} \nabla_x \cdot u &= 0, & t > 0, & \quad x \in \mathbb{R}^3 \\ \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x \cdot p &= \nu \Delta_x u, & t > 0, & \quad x \in \mathbb{R}^3 \\ \partial_t \theta + u \cdot \nabla_x \theta &= \kappa \Delta_x \theta, & t > 0, & \quad x \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (10.28)$$

onde $\kappa > 0$ é o coeficiente de condução de calor.

Considere o problema de Cauchy para (10.28) com dado inicial

$$u(0, x) = u^{in}(x), \quad \theta(0, x) = \theta^{in}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (10.29)$$

onde $u^{in} \in \mathcal{H}$ e $\theta^{in} \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Uma solução fraca do problema de Cauchy (10.28)-(10.29) é um par onde u é uma solução fraca da equação de Navier-Stokes e θ uma solução no sentido de distribuições do problema de Cauchy drift-diffusion

$$\begin{aligned} \partial_t \theta + \nabla_x(u\theta) &= \kappa \Delta_x \theta, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \\ \theta(0, x) &= \theta^{in}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (10.30)$$

Teorema 10.3. *Para cada $u^{in} \in \mathcal{H}$ e $\theta^{in} \in L^2(\mathbb{R}^3)$, existe pelo menos uma solução fraca (u, θ) de (10.28)-(10.29) que satisfaz a desigualdade de energia*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int \left(|u(t, x)|^2 + \frac{5}{2} \theta(t, x)^2 \right) dx \\ &+ \int_0^t \int \left(\nu |\nabla_x u(s, x)|^2 + \frac{5}{2} \kappa |\nabla_x \theta(s, x)|^2 \right) dx ds \\ &\leq \frac{1}{2} \int \left(|u^{in}(x)|^2 + \frac{5}{2} \theta^{in}(x)^2 \right) dx \end{aligned} \quad (10.31)$$

para todo $t > 0$

Uma solução fraca de (10.28)-(10.29) que também satisfaz (10.31) é também referida como uma solução de Leray.

Não obstante, existe uma certa arbitrariedade em considerar o funcional de Liapunov

$$\frac{1}{2} \int \left(|u(t, x)|^2 + \frac{5}{2} \theta(t, x)^2 \right) dx \quad (10.32)$$

em na desigualdade de energia (10.31). Um teorema de existência similar é válido com o coeficiente $5/2$ multiplicando a temperatura substituindo por qualquer numero positivo. A razão para usar especificamente o coeficiente $5/2$ no teorema arriba é que a quantidade (10.32) é a ordem principal da entropia relativa (10.18) em o limite de Navier-Stokes quando $\epsilon \rightarrow 0$ no espaço de dimension 3. A pesar do fato que este funcional de Liapunov se reduce a energia cinética no caso $\theta \equiv 0$ não coincide com a energia total no caso geral: ver [26] para uma descrição detalhada de modelos com a temperatura em fluidos incompressíveis.

10.5 Principais resultados.

O limite de Navier-Stokes(ou Navier-Stokes-Fourier) da equação de Boltzmann considera flutuações da densidade do numero proximo num Maxwellian absoluto. De [2] pegamos as seguintes notações para tais flutuações.

10.5.1 A equação de Boltzmann próximo ao Maxwellian uniforme.

Primeiro, a densidade do numero relativo e as flutuações da densidade do numero são denotadas por

$$G_\epsilon = \frac{F_\epsilon}{M}, \quad g_\epsilon = \frac{F_\epsilon - M}{M\epsilon} \quad (10.33)$$

mientras o integrando de colisão scaled é

$$q_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2}(G'_\epsilon G'_{\epsilon 1} - G_\epsilon G_{\epsilon 1}) \quad (10.34)$$

A integral para a medida unitária Mdv é denotada

$$\langle g \rangle = \int g(v)M(v)dv, \quad \forall g \in L^1(Mdv) \quad (10.35)$$

Sem perder generalidade podemos assumir que a medida

$$d\mu(v, v_1, \omega) = b(v - v_1, \omega)d\sigma_{v, v_1}(\omega)M_1dv_1Mdv \quad (10.36)$$

também é uma medida unitária; a integral para esta medida unitária é denotada por

$$\langle\langle q \rangle\rangle = \iiint q(v, v_1, \omega)d\mu(v, v_1, \omega), \quad \forall q \in L^1(d\mu). \quad (10.37)$$

Precisaremos o operador de colisão linearizado

$$\mathcal{L}(g) = \iint (g + g_1 - g' - g'_1)b(v - v_1, \omega)d\sigma_{v, v_1}(\omega)M_1dv_1 \quad (10.38)$$

como também a Hessian da integral de colisão no Maxwellian M a qual é denotada por

$$\mathcal{Q}(g, g) = \iint (g'g'_1 - gg_1)b(v - v_1, \omega)d\sigma_{v, v_1}(\omega)M_1dv_1. \quad (10.39)$$

Assumamos que o núcleo de colisão de Boltzmann b satisfaz a hipótese

$$\frac{1}{b_\infty} \leq b(z, \omega) \leq b_\infty, \quad z \in \mathbb{R}^3, \quad \omega \in \mathcal{S}^2, \quad \text{para algum } b_\infty > 0 \dots (H1).$$

As principais propriedades do operador de colisão linearizado \mathcal{L} foi provado por H. Grad [15] e lembraremos abaixo.

Proposição 10.1. *Para qualquer núcleo de colisão b satisfazendo (H1), \mathcal{L} é um operador Fredholm auto-adjunto não negativo limitado sobre $L^2(Mdv)$ com espaço nulo*

$$\ker \mathcal{L} = \text{span}\{1, v_1, v_2, v_3, |v|^2\} \quad (10.40)$$

Como cada entrada do tensor $v^{\otimes 2} - \frac{1}{3}|v|^2 I$ e do vetor $\frac{1}{2}v(|v|^2 - 5)$ é ortogonal à $\ker \mathcal{L}$, existe um único tensor \mathbf{A} e um único vetor \mathbf{B} tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}A &= v^{\otimes 2} - \frac{1}{3}|v|^2 I, \quad A \in (\ker \mathcal{L})^\perp \subset L^2(Mdv) \\ \mathcal{L}B &= \frac{1}{2}v(|v|^2 - 5), \quad B \in (\ker \mathcal{L})^\perp \subset L^2(Mdv).\end{aligned}\tag{10.41}$$

As principais propriedades do operador bilinear Q são mostradas na seguinte proposição

Proposição 10.2. *Para qualquer núcleo de colisão b satisfazendo (H1) e todo $p \in [1, \infty]$, Q define por polarização um operador bilinear simétrico contínuo (denotado por Q) de $L^p(Mdv) \times L^p(Mdv) \times L^p(Mdv)$. Ademais,*

$$Q(g, g) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(g^2), \quad \forall g \in \text{Ker } \mathcal{L}\tag{10.42}$$

Entre a classe de núcleos de colisão satisfazendo (H1), nos limitaremos aqueles para os quais

$$\frac{|A(v)| + |B(v)|}{1 + |v|^p} \in L_v^\infty \quad \text{para algum } p \geq 0 \dots (H2)$$

A classe de núcleos de colisão satisfazendo (H1) e (H2) não é vazia desde que contem ao menos todos os núcleos colisão da forma $b(z, \omega) = \mathbf{b}(|\cos(z, \omega)|)$ satisfazendo (H1). Estes núcleos de colisão correspondem a moléculas Maxwellian cutoff e satisfazem (H2) com $p = 3$ (ver [8]).

10.5.2 Os teoremas limite.

Denotemos por P a projeção de Leray, i.e., a projeção ortogonal sobre o espaço de campos de vetores de divergência livre em $L^2(\mathbb{R}^3)$ -em particular, para qualquer $p \in H^1(\mathbb{R}^3)$, temos $P(\nabla_x p) = 0$. O operador P assim definido coincide com um operador pseudo-diferencial clássico de ordem 0 sobre \mathbb{R}^3 , e portanto tem uma extensão natural a distribuições temperadas sobre \mathbb{R}^3 .

Teorema 10.4 (Limite de Navier-Stokes-Fourier fraco). *Seja b satisfazendo (H1)-(H2), e seja F_ϵ^{in} uma família de funções mensuráveis não negativas quase sempre sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ satisfazendo*

$$H(F_\epsilon^{in}|M) \leq C^{in} \epsilon^2\tag{10.43}$$

para algum $C^{in} > 0$ e todo $\epsilon > 0$, também como as propriedades da convergência

$$\begin{aligned}P\left(\frac{1}{\epsilon} \int v F_\epsilon^{in} dv\right) &\rightarrow u^{in} \quad \omega - L^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0. \\ \frac{1}{\epsilon} \int \left(\frac{1}{5}|v|^2 - 1\right)(F_\epsilon^{in} - M)dv &\rightarrow \theta^{in} \quad \text{in } \omega - L^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0.\end{aligned}\tag{10.44}$$

Seja F_ϵ uma familia de soluções renormalizadas de (10.13). Então a familia

$$\left(\frac{1}{\epsilon} \int v F_\epsilon dv, \frac{1}{\epsilon} \int \left(\frac{1}{3} |v|^2 - 1 \right) F_\epsilon dv \right)$$

é relativamente compacta em $\omega - L_{loc}^1(dt dx)$ e cada um de seus pontos limites quando $\epsilon \rightarrow 0$ e uma solução fraca de (10.28)-(10.29) com viscosidade e coeficiente de difusão calor dado por as formulas

$$v = \frac{1}{10} \int A : (\mathcal{L}A) M dv, \quad \kappa = \frac{2}{15} \int B \cdot (\mathcal{L}B) M dv. \quad (10.45)$$

Para dados iniciais bem postos, o anterior resultado de compacidade fraca nos conduce a soluções de Leray em vez da soluções fracas. Primeiro recordemos de [2] a seguinte definição

Definição 10.1. A familia $g_\epsilon \equiv g_\epsilon(x, v)$ de $L_{loc}^1(M dv dx)$ converge a $g \equiv g(x, v)$ entropicamente quando $\epsilon \rightarrow 0$ se

- Para cada ϵ , $1 + \epsilon g_\epsilon \geq 0$ quase sempre sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$,
- $g_\epsilon \rightarrow g$ em $\omega - L_{loc}^1(M dv dx)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$,
- and

$$\frac{1}{\epsilon^2} H(M(1 + \epsilon g_\epsilon) | M) \rightarrow \frac{1}{2} \int \langle g^2 \rangle dx$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Esta noção de convergência é a convergência natural no contexto do limite de Navier-Stokes(-Fourier) da equação de Boltzmann, como foi mostrado em [2].

Especificamente, esta referencia provo que a desigualdade da energia de Leray (10.31) é a forma limite da desigualdade da entropia de DiPerna-Lions (10.21) estabelecendo a desigualdade lembrada em apêndice B de [14]. Usando esta desigualdade junto com teorema (10.4), obtemos a seguinte afirmação de convergência relacionado as soluções de DiPerna-Lions de Boltzmann com as soluções de Leray do sistema de Navier-Stokes-Fourier

Corolário 10.1 (dados bem postos). Com as mesmas hipóteses como em teorema (10.4), assuma que

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{F_\epsilon^{in}(x, v) - M(v)}{M(v)} \rightarrow u^{in}(x) \cdot v + \theta^{in}(x) \frac{1}{2} (|v|^2 - 5)$$

entropicamente at rate ϵ quando $\epsilon \rightarrow 0$, onde $u^{in} \in \mathcal{H}$. Então todos os pontos limites da familia

$$\left(\frac{1}{\epsilon} \int v F_\epsilon dv, \frac{1}{\epsilon} \int \left(\frac{1}{3} |v|^2 - 1 \right) F_\epsilon dv \right) \quad (10.46)$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$ são soluções de Leray de (10.28)-(10.29) com viscosidade e coeficientes de difusão calor dados por a formula (10.45).

Ademais, se o dado inicial limite u^{in} é suave e tal que (10.28)-(10.29) tem uma única solução suave u , o anterior resultado de compacidade fraca pode estender-se num resultado de convergência forte no seguinte teorema

Teorema 10.5 (O limite de Navier-Stokes-Fourier forte). *Com as mesmas hipóteses como em teorema (10.4) assuma que*

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{F_\epsilon^{in}(x, v) - M(v)}{M(v)} \rightarrow u^{in}(x) \cdot v + \theta^{in}(x) \frac{1}{2} (|v|^2 - 5) \quad (10.47)$$

entropicamente quando $\epsilon \rightarrow 0$, onde u^{in} é um campo de vetores com divergência livre tal que as equações de Navier-Stokes (10.24)-(10.25) com v como em (10.45) tem uma solução forte u (ver [10]). Seja θ a solução da equação de drift-diffusion (10.30) com κ como em (10.45). Então, para todo $t \geq 0$,

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{F_\epsilon^{in}(x, v) - M(v)}{M(v)} \rightarrow u(t, x) \cdot v + \theta(t, x) \frac{1}{2} (|v|^2 - 5) \quad (10.48)$$

entropicamente ϵ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Teorema 10.5 é uma consequência direta do teorema 10.4 e um resumido argumento baseado no fato que a desigualdade (10.31) fica na igualdade no caso das soluções fortes.

10.5.3 O limite Navier-Stokes.

Os únicos resultados existentes sobre o limite de Navier-Stokes (sem restrições no tamanho ou regularidade dos dados iniciais, i.e., começar desde soluções renormalizadas da equação de Boltzmann) são devidos a C. Bardos, F. Golse e D. Levermore [2] para o problema estacionário e por P.-L. Lions e N. Masmoudi [22] para o problema dependente do tempo. Ambos são baseados em as hipóteses seguintes

- Primeiro, a família das soluções renormalizadas F_ϵ de (10.13) consideradas no limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ a conservação local do momento, i.e.

$$\epsilon \partial_t \int v F_\epsilon dv + \nabla_x \cdot \int v^{\otimes 2} F_\epsilon dv = 0 \dots \quad (A1)$$

no sentido das distribuições sobre $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^3$;

- ademais, a família F_ϵ é tal que

$$\frac{(1 + |v|^2)(F_\epsilon - M)^2}{\epsilon^2 M(F_\epsilon + M)} \text{ e relativamente compacto em } \omega - L_{loc}^1(dtdx; L^1(Mdv)) \dots \quad (A2)$$

Como foi mencionado antes, se as soluções renormalizadas da equação de Boltzmann satisfazem (A1) fica um problema aberto importante. Assim mesmo, a conservação global da energia não esta garantida pela teoria de DiPerna-Lions em seu estado atual; so a desigualdade

$$\int \int \frac{1}{2} |v|^2 F_\epsilon(t, x, v) dx dv \leq \int \int \frac{1}{2} |v|^2 F_\epsilon^{in}(x, v) dx dv \quad (10.49)$$

é conhecido ser válido para todo $t > 0$ no caso de domínios limitados. Por esta razão so as equações de Navier-Stokes (e não o sistema de Navier-Stokes-Fourier) foi derivado em ambas referencias [2] e [22] com hipóteses (A1) e (A2).

Por outro lado, se a hipótese (A2) é satisfeita por as soluções renormalizadas da equação de Boltzmann (10.13) em o Navier-Stokes scaling também fica desconhecido. Foi provado por C. Bardos, F. Golse e C. D. Levermore (ver [2]) que a quantidade em (A2) é de ordem $O(|\log \epsilon|)$ em $L_t^\infty(L^1(M dv dx))$. Tal controle basta para estabelecer todos os limites hidrodinâmicos que conduzem aos modelos macroscópicos linearizados tales como o limite acústico em [3], [4] e [13], o limite de Stokes em [2],[3] e [23] ou o limite de Stokes-Fourier em [13]. Contudo, este control não e suficiente para obter o limite de Navier-Stokes.

Foi destacado por a primeira vez em ([3], [4]) que as leis de conservação local de momento e energia podem estabelecer-se no limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ usando o estimativa $O(|\log \epsilon|)$ provada em [2] para a quantidade que aparece em A2 e em o Stokes scaling. O método usado em nestes trabalhos aplicou-se somente a núcleos de colisão limitados; contudo estes papers deixaram claro que as leis de conservação local necessitam estabelecer-se no limite somente. Issto foi feito a primeira vez por F. Golse e C.D. Levermore em [13], para núcleos de colisão geral (incluindo cutoff potenciais e moléculas de Maxwell), usando as simetrias (v, v_1) , (v', v'_1) da integral de colisão de Boltzmann (1.8) e (1.9) com a desigualdade de Young e alguns de seus variantes descritos em apêndice A em [14]. Mais recentemente, C.D. Levermore e N. Masmoudi [21] anunciaram uma prova destes leis de conservação no limite hidrodinâmico e para Navier-Stokes scaling, esta vez com hipóteses o qual, embora ligeiramente mais fraco do que (A2), também fica sem verificar.

Portanto, verificando (A2) fica a principal obstrução em derivar as equações de Navier-Stokes de a equação de Boltzmann.

Bibliografia

- [1] Asano, K.: *Conference at the 4th International Workshop on Mathematical Aspects of Fluid and Plasma Dynamics*. Kyoto, 1991.
- [2] Bardos, C., Golse, F., Levermore. D.: *Fluid Dynamic Limits of Kinetic Equations II: Convergence Proofs for the Boltzmann Equation*. Commun. Pure Appl. Math., 46 (1993), 667-753.
- [3] Bardos, C., Golse, F., Levermore. D.: *Acoustic and Stokes Limits for the Boltzmann Equation*. C. R. Acad. Sci., Paris, 327 (1999), 323-328.
- [4] Bardos, C., Golse, F., Levermore. D.: *The Acoustic Limit for the Boltzmann Equation*. Arch. Ration. Mech., 153 (2000), 177-204.
- [5] Bardos, C., Golse, F., Levermore. D.: *Sur les limites asymptotiques de la théorie cinétique conduisant à la dynamique des fluides incompressibles*. C. R. Acad. Sci., Paris, 309 (1989), 727-732.
- [6] Bardos, C., Golse, F., Levermore. D.: *Fluid Dynamic Limits of Kinetic Equations I: Formal Derivations*. J. Stat. Phys., 63 (1991), 323-344.
- [7] Bardos, C., Ukai, S.: *The Classical Incompressible Navier-Stokes Limit of the Boltzmann Equation*. Math. Models. Methods Appl. Sci., 1 (1991), 235-257.
- [8] Cercignani, C.: *Mathematical Methods in Kinetic Theory*. Plenum Press, New York, 1990.
- [9] Cercignani, C., Illner, R., Pulvirenti, M.: *The Mathematical Theory of Dilute Gases*. Springer, New York, 1994.
- [10] Constantin, P., Foias, C.: *Navier-Stokes Equations*. Chicago Lectures in Mathematics, Chicago: The University of Chicago Press, 1988.
- [11] DeMasi, A., Esposito, R., Lebowitz, J.: *Incompressible Navier-Stokes and Euler Limits of the Boltzmann Equation*. Commun. Pure Appl. Math., 42 (1990), 1189-1214.
- [12] DiPerna, R.J., Lions, P. L.: *On the Cauchy Problem for the Boltzmann Equation: Global Existence and Weak Stability Results*. Ann. Math., 130 (1990), 321-366.

- [13] Golse, F., Levermore, C. D.: *The Stokes-Fourier and Acoustic Limits for the Boltzmann Equation*. Commun. Pure Appl. Math., 55 (2002), 336-393.
- [14] Golse, F., Saint-Raimond, L.: *The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels*. Invent.math., 155 (2004), 81-161.
- [15] Grad, H.: *Asymptotic theory of the Boltzmann equation. II*. 1963 Rarefied Gas Dynamics(Proc. 3rd Internat. Sympos., Palais de l'UNESCO, Paris, 1962) Vol. I, 26-59.
- [16] Hilbert, D.: *Mathematical Problems*. Bull.Am.Math.Soc., 37 (2000), 407-436.
- [17] Lagha-Benabdallah, A.: *Limites des équations d'un fluide compressible lorsque la compressibilité tend vers zéro*. Lecture Notes Math., 1047 (1984).
- [18] Landau, L., and Lifshitz, E.: *Course of theoretical physics. Fluid mechanics*, vol. 6. Pergamon Press, Oxford, 1987.
- [19] Lanford, O.: *Time evolution of large classical aystems*. Lecture Notes Phys., 38 (Berlin: Springer 1975), 51-108.
- [20] Leray, J.: *Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace*. Acta Math., 63 (1934), 193-248.
- [21] Levermore, C.D., Masmoudi, N.: *From the Boltzmann Equation to an Incompressible Navier-Stokes-Fourier System*. Work in Preparation.
- [22] LIONS, P. L., MASMOUDI, N.: *From Boltzmann Equations to Navier-Stokes Equations I*. ARCH. RATION. MECH. ANAL., 158 (2001), 173-193.
- [23] LIONS, P. L., MASMOUDI, N.: *From Boltzmann Equations to the Stokes and Euler Equations II*. ARCH. RATION. MECH. ANAL., 158 (2001), 195-211.
- [24] LIONS, P. L.: *Compactness in Boltzmann's equation via Fourier Integral operators and applications II*. J. MATH. KYOTO UNIV., 34 (1994), 539-584.
- [25] LIONS, P.-L.: *Conditions at infinity for Boltzmann's equations*. COMMUN. PARTIAL. DIFFER. EQUATIONS., 19 (1994), 335-367.
- [26] LIONS, P. L.: *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol. 1: Incompressible Models*. OXFORD LECTURE SERIES IN MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS, 3. OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS., NEW YORK: THE CLARENDON PRESS, OXFORD UNIVERSITY PRESS, 1996.
- [27] QUASTEL, J., YAU, H. T.: *Lattice gasses, large deviatons, and the incompressible Navier-Stokes equations*. ANN. MATH. ANAL. 2, 148 (1998), 51-108.
- [28] SONE, Y.: *Asymptotic Theory of Flow of a Rarefied Gas over a Smoth Boundary II*. IN. RAREFIED GAS DYNAMICS. VOL. II, PP. 737-749, ED. BY D. DINI. PISA: EDITRICE TECNICO SCIENTIFICA 1971.

- [29] VILLANI, C.: *Limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann [d'après C. Bardos, F. Golse, D. Levermore, Lions, P. L., N, Masmoudi, L. Saint-Raymond]*. SÉMINAIRE BOURBAKI, VOL.2000-2001, EXP. 893.