

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - UFRGS
Seleção de Mestrado 2011/2

Nome:

Documento:

Instruções:

1. escolha, indique e desenvolva quaisquer 4 dentre as 6 questões abaixo;
2. seja claro e objetivo, MAS faça seu raciocínio ser entendido escrevendo e justificando;
3. use lápis ou lapiseira, de preferência;
4. use caneta para assinar.

Questão 1. Considere um sistema linear $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + ay + z \\ \frac{dy}{dt} = 3x - ay - 3z/2 \\ \frac{dz}{dt} = 2ay - z \end{cases}$$

- (a) Mostre que $x(t) = e^{-t}$, $y \equiv 0$, $z(t) = 2e^{-t}$ é sempre uma solução desse sistema (ie, para qualquer a);
- (b) Relacione a solução da parte (a) com um dos autovalores de A ;
- (c) Determine os valores reais do parâmetro a tais que todas as soluções desse sistema são assintoticamente estáveis (ie, tendem a zero ao $t \rightarrow \infty$).

Questão 2. Diz-se que uma sequência $\{x_n\}$ de números reais é uma contração se existe uma constante C , $0 < C < 1$, tal que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere a sequência $\{x_n\}$ dada por

$$x_1 = 2 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}, n \geq 1.$$

- (a) Prove que $x_n \geq 2$.
- (b) Prove que esta sequência é uma contração.
- (c) Prove que esta é uma sequência de Cauchy.
- (d) Essa sequência converge ? Justifique. Em caso afirmativo, calcule o seu limite.

Questão 3. Seja f diferenciável em $I = [a, b]$ e seja k um número entre $f'(a)$ e $f'(b)$.

1. Seja $g(x) = kx - f(x)$ para $x \in [a, b]$. Mostre que se x_0 é um ponto de máximo absoluto de g em $[a, b]$, então $x_0 \in (a, b)$;
2. Prove que se f é diferenciável em $I = [a, b]$ e se k é um número entre $f'(a)$ e $f'(b)$, então existe pelo menos um ponto c em (a, b) tal que $f'(c) = k$.
3. Suponha $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[0, 2]$ e diferenciável em $(0, 2)$ e que, adicionalmente, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$. Mostre que
 - (a) Existe c_1 em $(0, 1)$ tal que $f'(c_1) = 1$.

- (b) Existe c_2 em $(1, 2)$ tal que $f'(c_2) = 0$.
(c) Existe c em $(0, 2)$ tal que $f'(c) = 1/3$.

Questão 4. Resolva o problema de valores no contorno, considerando o operador diferencial linear $Lu = u_t - u_{xx}$,

$$\begin{aligned} Lu &= 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) &= 0, & t > 0 \\ u(1, t) &= 3t, & t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & 0 < x < 1 \end{aligned}$$

da seguinte forma:

- (a) Verifique que a função $w(x, t) = 3xt$ satisfaz as condições de fronteira e determine Lw .
(b) Procure $z = z(x)$ satisfazendo $Lz = -Lw$, com $z(0) = z(1) = 0$.
(c) Escreva $v(x, t) = u(x, t) - w(x, t) - z(x)$ e resolva o problema correspondente para $v(x, t)$.
(d) Deduza qual é a expressão para $u(x, t)$.

Questão 5. Seja A uma matriz real simétrica de ordem n que define um operador linear em \mathbb{R}^n com respeito à base canônica. Denotamos $\langle v, w \rangle$ o produto interno usual entre os vetores v e w .

- (a) Defina os conceitos de *autovalor* e *autovetor* de A .
(b) Mostre que, se v e w são vetores em \mathbb{R}^n , então

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle.$$

- (c) Mostre que autovetores associados a autovalores distintos de A são ortogonais.
(d) Encontre uma base ortonormal de autovetores para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e utilize-a para escrever A na forma $A = PDP^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal.

Questão 6. Sejam k um inteiro positivo e a_0, \dots, a_{k-1} números reais. Considere a equação diferencial ordinária

$$\frac{d^k y}{dx^k} + a_{k-1} \frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0.$$

- (a) Considere o conjunto \mathcal{C} consistindo das soluções da equação diferencial. Mostre que \mathcal{C} é um espaço vetorial real.
(b) Encontre todas as soluções da forma $y(x) = e^{\lambda x}$ para a equação

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0. \tag{1}$$

- (c) Sejam a_1, \dots, a_n números reais distintos e seja $M(a_1, \dots, a_n)$ a matriz definida por

$$M(a_1, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

É fato que, para todo $n \geq 2$, vale

$$\det M(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Prove esse resultado para $n = 3$.

- (d) Dadas constantes reais c_0 , c_1 e c_2 , utilize o item (c) para mostrar que, no espaço vetorial gerado pelas funções obtidas no item (b), existe exatamente uma função y que satisfaz

$$y(0) = c_0, \frac{dy}{dx}(0) = c_1 \text{ e } \frac{dy^2}{dx^2}(0) = c_2.$$

Você deve mencionar os resultados conhecidos de Álgebra Linear utilizados em sua solução, mas não é necessário demonstrá-los.

Bom Trabalho.