Exame de Admissão - Mestrado - 2010/2

Nome: ____

O candidato deverá resolver no mínimo 4 questões de livre escolha. Por favor, justifique cuidadosamente os seus argumentos. Para isso, seja claro, conciso e completo. Tempo de duração da prova: 3 horas.

Responda cada questão em uma folha separada.

1. (a) Seja A um conjunto fechado em $\mathbb{R}^n$ e $B \subset A$, aberto. Prove que $A \backslash B$ é fechado.

   (b) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e $f : A \to \mathbb{R}^m$ uma função um a um contínua. Suponha que para algum $B \subset A$, $f(B)$ seja aberto. Mostre que $f(A \backslash B)$ é fechado.

2. Prove que a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right)^2$$

   é contínua em $\mathbb{R}$.

3. (a) Calcule a matriz na base canônica do $\mathbb{R}^3$ da função linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2)$.

   (b) Encontre o núcleo e a imagem de T.

   (c) Qual é o posto e a nulidade (dimensão do núcleo) de T?

4. (a) Sendo $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, encontre os autovalores e autovetores de B. Calcule B^{100}.

   (b) Seja $\{1, 3, 9\}$ o conjunto de autovalores de C. Encontre os autovalores de C^{-1} e $M = C - 2I$. (justifique)

5. Considere a região limitada por :

$$x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \quad z = 3. \tag{1}$$

(a) Determine o vetor normal unitário e a equação do plano tangente à superfície

$$x^2 + y^2 = 4$$

no ponto $(\sqrt{3}, 1, 2)$.

(b) Verifique o teorema da divergência de Gauss para

$$\vec{A} = 4x\vec{i} - 2y^2\vec{j} + z^2\vec{k},$$

sobre a região dada em (1).

6. Determine a distribuição de deslocamentos $u(x,t)$, com relação à posição de equilíbrio, para ondas transversais em uma corda esticada sobre o intervalo finito $0 \leq x \leq \pi$, presa em ambas as extremidades, considerando que não haja forças externas atuando sobre a mesma. Sabe-se que o deslocamento inicial, em $t = 0$, de cada ponto da corda, com relação à posição de equilíbrio, é dado por $u(x,0) = \sin x$, e que a velocidade inicial de cada ponto da corda $u_t(x,0)$ é nula. Na equação da onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 \leq x \leq \pi, \qquad t \geq 0, \tag{2}$$

use, para a velocidade da onda, o valor $v = 1$, e, para o coeficiente de amortecimento devido à resistência do meio viscoso, o valor $c = 1$.

Se necessário, use a informação de que

$$\left\{\sin \frac{n\pi x}{L}\right\}, n = 1, 2, 3, ... \tag{3}$$

constitui um conjunto ortogonal completo no intervalo $[0, L]$.

Integrais que podem ser úteis:

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 ax\; dx &= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}; \quad \int \sin^3 ax\; dx = -\frac{\cos ax}{a} + \frac{\cos^3 ax}{3a};\\
\int \cos^2 ax\; dx &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}; \quad \int \cos^3 ax\; dx = \frac{\sin ax}{a} - \frac{\sin^3 ax}{3a};\\
\int x \sin ax\; dx &= \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x\cos ax}{a}; \quad \int x\cos ax\; dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \sin ax}{a};\\
\int \sqrt{a^2 - x^2}\; dx &= \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a};\\
\int \sin px \sin qx\; dx &= \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)}.
\end{aligned}$$