# Processo Seletivo 2009/2
# Prova Escrita para Mestrado

ATENÇÃO: *A prova está dividida em 3 áreas. O candidato deverá responder 2 questões por área, sendo uma de escolha livre do candidato e a outra obrigatória. As questões obrigatórias a todos os candidatos são: 1, 4, e 7. Período de duração da prova: 14h00min às 17h00min.*

## Área 1: Álgebra Linear

**Questão 1:** Verifique quais dos subconjuntos de $\mathcal{F}^3$ formam um subespaço vetorial do $\mathcal{F}^3$.

a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{F}^3;\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$

b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{F}^3;\ x_1 x_2 x_3 = 0\}$

**Questão 2:** Seja $W$ o espaço vetorial das matrizes simétricas $2 \times 2$. Seja a transformação $T : W \to P_2$, onde $P_2$ é o espaço vetorial dos polinômios de grau 2, da forma:

$$T(M) = (a - b) + (b - c)x + (c - a)x^2, \text{ com } M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Verifique se $T$ é uma transformação linear, e se verdadeiro, encontre o posto e a nulidade de $T$, indicando uma base geradora do núcleo de $T$.

**Questão 3:** O modelo de Leslie descreve o crescimento da proção de fêmeas de uma população, com uma suposta duração de vida máxima. A taxa de crescimento em estado estacionário de uma população é um autovalor *positivo* da matriz de Leslie $L$, e um autovetor correspondente a esse autovalor representa os tamanhos relativos das idades nas faixas etárias, quando o estado estacionário é alcançado. Assim, se conhecemos a matriz de Leslie de um modelo de crescimento populacional,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Determine a taxa de crescimento da população em estado estacionário e os correspondentes tamanhos relativos das faixas etárias.

*Sugestão*: $8x^3 - 16x - 3 = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(4x^2 + 6x + 1) = 0$

# Área 2: Análise Real

**Questão 4:** Seja $\lambda \leq 1$ e $x_0 \geq 0$. Defina a sequência $x_n$ de forma indutiva via $x_{n+1} = \frac{\lambda x_n}{1+x_n}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. Mostre que $x_n$ é convergente. Calcule o limite.

**Questão 5:** Seja $I$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathcal{R}$ satisfazendo $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$ em $I$, para um certo $\alpha > 1$. Mostre que $f$ é constante.

**Questão 6:** Suponha que $a_n \geq 0$ e que $\sum a_n^2$ é uma série convergente. Mostre que $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

## Área 3: Métodos de Matemática Aplicada

**Questão 7:** Questao 1 : Determine a solução do problema de valor inicial:

$$y'' + \frac{1}{2}y' + y = \delta(t-1),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,$$

sendo $\delta(t)$ a função delta de Dirac.

**Questão 8:** Utilize o método de separação de variáveis na solução do problema abaixo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \ 0 < x < L,\ \ t > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = A,\ \ u(L,t) = 0,\ \ t > 0$$

$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L,$$

sendo $A$ constante real positiva.

**Questão 9:** Avalie:

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{z-3}$$

sendo C o caminho definido nas formas abaixo:

a) como o círculo, no plano complexo, centrado em zero e de raio igual a 1/2.

b) por todos os pontos $z \in \mathcal{C}$ tal que $|z-1| = 4$.

Sejam claros, organizados e objetivos.