Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - UFRGS

Exame de Seleção - Doutorado - 2010/1

Instruções: O aluno deverá responder no mínimo 4 (quatro) questões, sendo que deverá optar por no máximo 2 (duas) questões da mesma área.

Análise Real

1. Seja $E \subset [0,1]$ o conjunto dos números deste intervalo que possuam representação em base 3 que *não* envolva ocorrência alguma do dígito 2. Obtenha a medida de E.

2. Mostre que $L^2(0,1)$ é um espaço completo.

3. Sendo $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mensurável e $f, g \in L^2(E)$, mostre que

$$\left\{ \int_E |f(\vec{x})g(\vec{x})|\, d\vec{x} \right\}^2 \leq \int_E |f(\vec{x})|^2\, d\vec{x} \int_E |g(\vec{x})|^2\, d\vec{x}.$$

Análise Complexa

4. Mostre que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos(\theta)}\, d\theta = \frac{\pi}{12}$.

5. Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}\, dz$ onde C é o círculo $|z| = 3$.

6. Sendo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ inteira e 1-1 (injetiva), mostre que f é linear, ou seja, $f(z) = az + b$ para todo $z \in \mathbb{C}$ e certas constantes $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Equações Diferenciais Parciais

7. (a) Resolva o problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_y + x^2 u_x &= u, \\ u(x,0) &= x \end{aligned}$$

utilizando o método das características para obter a solução $u(x,y)$.

(b) Faça um esboço das curvas características do problema acima.

(c) O problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_y + x^2 u_x &= u, \\ u(0,y) &= y \end{aligned}$$

possui uma, nenhuma ou infinitas soluções? Justifique sua resposta.

8. Utilizando a transformada de Fourier, encontre a solução da equação de Laplace no semiplano

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0$$

com condições de contorno

$$u(x,0) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

$$u(x,y) \to 0 \text{ quando } |x| \to \infty, y \to \infty$$

9. Sendo $u = u(\vec{x}, t)$ solução de

$$u_t = -\Delta(\Delta u), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0$$
$$u(\vec{x}, 0) = u_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

para dado estado inicial $u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, onde $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + ... + \partial^2/\partial x_n^2$ denota o operador Laplaciano, mostre que $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \searrow 0$ ao $t \nearrow \infty$, onde

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |u(\vec{x}, t)|^2 \, d\vec{x} \right\}^{1/2}.$$

Equações Diferenciais Ordinárias

10. Para encontrar a solução de

$$y'(t) = t\, y(t)$$
$$y(0) = 1$$

podemos utilizar o método das aproximações sucessivas que consiste em calcular a sequência de funções

$$u_0(t) = y(0)$$
$$u_{k+1}(t) = y(0) + \int_0^t f(s, u_k(s)) \, ds.$$

(a) Obtenha os termos $u_1(t)$, $u_2(t)$ e $u_3(t)$ dessa sequência.

(b) A sequência de aproximações $u_k(t)$ é convergente? Caso afirmativo, determine a função limite e mostre que essa função é solução do problema de valor inicial.

11. Prove que se $u(t)$ é solução da equação integral

$$y(t) = e^{it} + \int_t^\infty \sin(t - s) \frac{y(s)}{s^2} \, ds$$

(assumindo existência da integral), então $u(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$y'' + \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) y = 0$$

12. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx}{dt} = x(3 - x - y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(4 - 2x - y)$$

(a) Encontre os pontos de equilíbrio desse sistema e discuta sua estabilidade;

(b) Esboce o retrato de fase no plano xy.

(c) Uma bacia de atração $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$ é o conjunto de todos os pontos $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ tal que

$$\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (x_p, y_p),$$

onde $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ e (x_p, y_p) é um ponto crítico do sistema. Quantas bacias de atração possui esse sistema? Identifique-as no plano xy.

13. Uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é Hermitiana se $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $1 \leq i, j \leq n$ (onde a barra superior significa o conjugado complexo). Seja $\imath = \sqrt{-1}$ e $D = diag(\imath, ..., \imath) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uma matriz diagonal. Prove ou dê um contraexemplo para cada um dos ítens abaixo:

    (a) A é uma matriz normal.

    (b) Se λ é autovalor de A, então $-\lambda$ é autovalor de A.

    (c) A tem somente autovalores reais.

    (d) A matriz $B = A + D$ é singular.

    (e) A matriz $C = (A + D)^{-1}(A - D)$ é unitária.

14. (a) Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com colunas linearmente independentes. Mostre como podemos fatorar $A = QR$ onde Q tem colunas ortonormais e R é uma matriz triangular superior.

    (b) Dado um sistema sobredeterminado $Ax = b$ com $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, explique como a fatoração QR pode ser usada para determinar a solução por mínimos quadrados.

15. Considere o sistema $Tx = b$, onde T é uma matriz tridiagonal $n\times n$ e $x, b \in \mathbb{R}^n$ (considere apenas multiplicações e divisões na contagem dos *flops*, operações de ponto flutuante).

    (a) Quantos *flops* são necessários para resolver o sistema $Tx = b$ usando fatoração LU?

    (b) O método iterativo de Jacobi pode ser descrito como $x_{k+1} = (I - D^{-1}A)x_k + D^{-1}b$. Quantos flops são necessários para resolver um sistema tridiagonal usando o método de Jacobi?

    (c) Qual das duas opções acima é mais eficiente? Justifique sua escolha.

    (d) Considere a matriz tridiagonal $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por

    $$T_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{se } i = j \\ j/i, & \text{se } i = j+1 \text{ ou } i = j-1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

    O que se pode dizer sobre a convergência do método de Jacobi para a solução do sistema $Tx = b$?