

## Exame de Admissão – Variável Real e Complexa

Resolva as questões abaixo. Sua solução deve ser *clara, concisa e completa*.

### Questão 1 (*categorias de Baire*).

(i) Defina conjuntos de *primeira* e *segunda categoria* em  $\mathbb{R}^2$  (na métrica usual), dando um exemplo de cada.

(ii) Dê exemplo de um conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  de *primeira* categoria e com medida de Lebesgue *positiva*. Dê exemplo de um conjunto  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  de *segunda* categoria e medida *nula*.

[Sugestão: Examine o conjunto de Cantor no intervalo  $[0, 1]$  e generalizações apropriadas.]

### Questão 2.

Sejam  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $1 \leq p < \infty$ ,  $f \in L^p(\Omega)$  e  $f_\ell \in L^p(\Omega) \forall \ell \in \mathbb{N}$ .

(i) Se  $f_\ell \rightarrow f$  em  $L^p(\Omega)$ , mostre que existe subsequência  $(f_{\ell_k}) \subseteq (f_\ell)$  convergindo a  $f$  quase sempre em  $\Omega$  (i.e.,  $f_{\ell_k}(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x})$  ao  $k \rightarrow \infty$  para quase todos os pontos  $\mathbf{x} \in \Omega$ ).

(ii) Dê exemplo de funções  $f, f_\ell \in L^p(\Omega)$ ,  $\ell = 1, 2, \dots$ , tais que  $f_\ell \rightarrow f$  em  $L^p(\Omega)$  mas, para cada  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $f_\ell(\mathbf{x}) \not\rightarrow f(\mathbf{x})$  ao  $\ell \rightarrow \infty$ .

### Questão 3.

Seja  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  mensurável,  $0 < \alpha \leq 1$  e  $f \in L^1(E)$  não negativa com  $\int_E f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) > 0$ , obtenha o limite (justificando seus cálculos!)

$$\lambda(\alpha) := \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E m \log \left\{ 1 + \left( \frac{f(\mathbf{x})}{m} \right)^\alpha \right\} d\mu(\mathbf{x}), \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

### Questão 4.

Seja  $\Omega$  a imagem do disco unitário  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  pela aplicação  $w = z + z^2/2$ , calcule a área de  $\Omega$ .

### Questão 5.

(i) Enuncie o *teorema do mapeamento conforme de Riemann*, e dê exemplo de condições que garantem a unicidade de tal mapeamento.

(ii) Obtenha explicitamente um mapeamento conforme da região  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| < 2 \text{ e } |z - 1| > 1\}$  sobre o disco unitário.

### Questão 6.

Seja  $f$  uma função meromorfa no plano com apenas um pólo no disco  $|z| \leq 1$ , dado pelo ponto  $z = 1$ , sendo ademais este pólo *simples*. Nestas condições, mostre que os coeficientes  $a_n$  da série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < 1$$

convergem a um limite finito, i.e.,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$  para certo  $b \in \mathbb{C}$ . Que relação existe entre o limite  $b$  e o resíduo de  $f$  em  $z = 1$ ?

## Exame de Admissão – Equações Diferenciais

Resolva as questões abaixo. Sua solução deve ser *clara, concisa e completa*.

**Questão 1.** Considerando o problema abaixo,

$$(1) \quad \begin{cases} (e^t \sin x(t)) x'(t)^3 + (e^t \cos x(t)) x'(t) + e^{x(t)} \tan t = 0, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

pede-se verificar se, para  $\delta > 0$  suficientemente pequeno, existe solução em  $J_\delta = ]-\delta, \delta[$ ? Se existir, é a solução *única* em  $J_\delta$ ? (Justifique cuidadosamente sua resposta.)

**Questão 2.** Dada  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, e dado  $b \in \mathbb{R}$ , considere o problema abaixo:

$$(2) \quad \begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(0) = b. \end{cases}$$

(i) Sendo  $a > 0$  e  $u_1, u_2, \dots, u_N \in C^1([0, a])$  soluções de (2) acima no intervalo  $[0, a]$ , mostre que  $v, w : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$v(t) := \min_{1 \leq n \leq N} u_n(t), \quad w(t) := \max_{1 \leq n \leq N} u_n(t), \quad 0 \leq t \leq a$$

são soluções de classe  $C^1([0, a])$  do mesmo problema.

(ii) Sendo  $u_1, u_2 \in C^1([0, a])$  soluções em  $[0, a]$  de (2) tais que  $u_1(a) < u_2(a)$ , mostre que para cada  $\gamma^* \in [u_1(a), u_2(a)]$  existe solução  $u^* \in C^1([0, a])$  do problema (2) satisfazendo  $u^*(a) = \gamma^*$  (*fenômeno de Peano*).

(iii) Seja  $\mathcal{F}(a)$  uma família infinita de soluções  $u \in C^1([0, a])$  de (2), uniformemente limitadas (i.e., existe  $M > 0$  tal que  $|u(t)| \leq M$  para todo  $0 \leq t \leq a$  e toda  $u \in \mathcal{F}(a)$ ), e defina  $\omega : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  pondo

$$\omega(t) := \sup_{u \in \mathcal{F}(a)} u(t), \quad 0 \leq t \leq a.$$

Mostre que  $\omega$  é de classe  $C^1([0, a])$ , sendo ademais solução de (2) em  $[0, a]$ .

**Questão 3.** Sendo  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  aberto, seja  $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$  tal que, para cada  $\xi \in \Omega$ , tem-se

$$(3) \quad u(\xi) \leq \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{\partial B_\rho(\xi)} u(\mathbf{x}) \, d\sigma(\mathbf{x})$$

para todo  $\rho > 0$  suficientemente pequeno (ou seja,  $u$  é subharmônica em  $\Omega$ ), onde  $B_\rho(\xi)$  denota a bola de centro  $\xi$  e raio  $\rho$ , i.e.,  $B_\rho(\xi) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x} - \xi| < \rho\}$ , e  $\partial B_\rho(\xi)$  é a fronteira de  $B_\rho(\xi)$ . Mostre que  $\Delta u \geq 0$  em  $\Omega$ .

[Sugestão: use identidade de Green com  $G(\mathbf{x}) = \psi(|\mathbf{x} - \xi|) - \psi(\rho)$ , onde  $\psi(r) = -(4\pi r)^{-1}$ .]

**Questão 4.** Considerando o problema abaixo,

$$(4) \quad \begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx} + x^2 + t, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ u_t(x, 0) = 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3u_x(0, t) - u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u_x(1, t) = 2, & t > 0. \end{cases}$$

mostre que há no máximo uma solução  $u \in C^1([0, 1] \times [0, \infty[) \cap C^2(]0, 1[ \times ]0, \infty[)$ .

**Questão 5.** Sendo  $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$  com  $f(\mathbf{x}) \rightarrow 0$  ao  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , considere a solução  $u$  de

$$(5a) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

dada pela convolução

$$(5b) \quad u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0.$$

(i) Mostre que  $u(\mathbf{x}, t) \rightarrow f(\mathbf{x})$  ao  $t \rightarrow 0^+$ , *uniformemente* em  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

(ii) Mostre que  $u(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$  ao  $t \rightarrow \infty$ , *uniformemente* em  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

**Questão 6.** Encontre aproximações de ordem  $\varepsilon^0$  e ordem  $\varepsilon^1$  para a solução  $u = u(x, t; \varepsilon)$  do problema

$$(6) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon(u^2 + u_{xx})_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0; \varepsilon) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0; \varepsilon) = -f'(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

sendo  $|\varepsilon| \ll 1$ .