

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Exame de Qualificação : Equações Diferenciais
19 de Maio de 2005.

Resolver os problemas abaixo, justificando cuidadosamente os seus argumentos.
Para isso, seja claro, conciso e completo.

Questão 1 (*iterações de Picard*). Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = 1 + u(x)^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

e as aproximações de Picard $u_n \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dadas por $u_0 = 0$ e para $n \geq 1$,

$$u_n(x) = x + \int_0^x u_{n-1}(t)^2 dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mostre que a sequência (u_n) converge uniformemente em $[-a, a]$ para cada $0 < a < \pi/2$.
É a convergência uniforme em $]-\pi/2, \pi/2[$? Justifique cuidadosamente.

Questão 2 (*problemas de Sturm-Liouville*). Considere o problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(K(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u(x) = f(x), & a < x < b \\ u(a) = \Gamma_a, \quad u(b) = \Gamma_b \end{cases}$$

onde $K \in C^1([a, b])$, $q, f \in C^0([a, b])$ são funções dadas, com $K(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$, e onde $\Gamma_a, \Gamma_b \in \mathbb{R}$ são valores dados.

(i) Mostre que, nestas condições, existe no máximo uma solução $u \in C^2(]a, b[) \cap C^1([a, b])$ para o problema acima.

(ii) Se, ademais, tivermos $\Gamma_a \geq 0$, $\Gamma_b \geq 0$ e $f \geq 0$ em $[a, b]$, então se terá $u \geq 0$ em $[a, b]$.

Questão 3 (*sistemas lineares*). Sendo A matriz real $n \times n$ com $\operatorname{Re} \lambda < 0$ para todo autovalor λ de A , e dada $\mathbf{f} \in L^p(0, \infty)$, onde $1 \leq p < \infty$, considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t), & t > 0 \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

(i) Mostre que existe constante $C_A > 0$, dependendo apenas de A , tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{L^1(0,T)} \leq C_A \|\mathbf{f}\|_{L^1(0,T)} \quad \forall T > 0.$$

(ii) Verifique se, nas condições acima, segue necessariamente que $\mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ ao $t \rightarrow \infty$.

Questão 4 (*método de Lyapunov*). Considere o sistema autônomo

$$\begin{cases} \dot{x} = xy^2 - \frac{1}{2}x^3 \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{5}x^2y \end{cases}$$

(i) Mostre que $V(x, y) = x^2 + 2y^2$ é função de Lyapunov para o sistema acima numa vizinhança do ponto de equilíbrio $(0, 0)$.

(ii) Utilize $V(x, y)$ acima para provar *diretamente* (i.e., sem utilizar o teorema de Lyapunov) que $(0, 0)$ é assintoticamente estável.

(iii) Para quais dados iniciais $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ a solução $(x(t), y(t))$ correspondente converge a $(0, 0)$ ao $t \rightarrow \infty$?

Questão 5 (*equação da onda*). Considere o problema

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = x^3, & x \geq 0 \\ u_x(0, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

(i) Mostre que existe uma única solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $\Omega = \{(x, t) : x > 0, t > 0\}$.

(ii) Qual a regularidade da solução u acima em Ω ?

Questão 6 (*método das características para equações escalares de primeira ordem*).

(i) Usando o método das características, encontre u continuamente diferenciável satisfazendo

$$y u_x + x u_y = y, \quad u(0, y) = e^{-y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

(ii) Em que região do plano (x, y) fica $u(x, y)$ acima univocamente definida?

Questão 7 (*equação do calor*). Sendo $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, e considerando o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

considere, para $t > 0$, a solução $u(\cdot, t)$ dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Enuncie a desigualdade de Young para o produto convolutivo e a utilize para mostrar que $u(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R})$ para cada $t > 0$, tendo-se $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$ para todo $t > 0$.

(ii) Para $u(\cdot, t)$ dada acima, mostre que ao $t \rightarrow 0$ tem-se $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$ em $L^2(\mathbb{R})$, i.e.,

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x, t) - u_0(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{ao } t \rightarrow 0 \quad (t > 0).$$

Observação: Se precisar, use que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\pi/\lambda}$, dado $\lambda > 0$ qualquer.

Questão 8 (*equação de Poisson*). Sendo B_R a bola de raio R em \mathbb{R}^n , de centro na origem, mostre que não existe solução $u \in C^2(B_R) \cap C^1(\bar{B}_R)$ para o problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = 1, & |\mathbf{x}| < R, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & |\mathbf{x}| = R. \end{cases}$$