UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA
EXAME DE SELEÇÃO 2005 - DOUTORADO

Nome: , Documento:

Indique a resposta apropriada na grade de respostas para cada uma das seguintes questões.
Cada questão respondida corretamente vale dois (2) pontos.
Cada questão respondida incorretamente vale -1 ponto.
Questão não respondida vale 0(zero) pontos.
Obs.: Todo material utilizado deve ser devolvido juntamente com a grade de respostas.
Só é permitido o uso de caneta, lápis e borracha. Utilizar caneta para a grade de respostas.

1. A solução do problema de valores iniciais

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2} & \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & \end{array}$$

é

(a) $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}\right)$

(b) $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}\right) + \displaystyle\int_{x-t}^{x+t} e^{-s^2}\, ds$

(c) $u(x,t) = \displaystyle\int_{x-t}^{x+t} e^{-s^2}\, ds$

(d) $u(x,t) = \dfrac{1}{2}e^{-(x+t)^2} + \displaystyle\int_{x-t}^{x+t} e^{-s^2}\, ds$

(e) $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-(x-t)^2} - e^{-(x+t)^2}\right)$

2. Seja U^C o complementar de $U \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ a imagem inversa de $U \subset \mathbb{R}$. Se um conjunto $U \subset \mathbb{R}$ não é aberto então

(a) $\exists\, u \in U^C$ e $\delta > 0$ tal que $(u-\delta, u+\delta)$ está contido em U^C

(b) $\forall\, u \in U$ temos $(u-\delta, u+\delta)$ não está contido em U para todo $\delta > 0$

(c) não existe função contínua f tal que $U = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}$

(d) $f^{-1}(U)$ é um conjunto fechado sempre que f for contínua

(e) $\exists\, u \in U$ tal que $\forall\, \delta > 0, (u-\delta, u+\delta) \subset U$

3. Marque a alternativa FALSA.

(a) toda matriz quadrada satisfaz seu próprio polinômio característico

(b) se A e B são matrizes semelhantes (similares), elas possuem a mesma estrutura de Jordan

(c) a imagem de A é perpendicular ao núcleo da adjunta de A

(d) a imagem de A é perpendicular ao núcleo de A, para toda matriz quadrada

(e) qualquer matriz A tem uma Decomposição em Valores Singulares $A = U^T \Sigma V$

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função . Então

(a) $f(f^{-1}(W)) = W$ para qualquer conjunto aberto W

(b) se Z for aberto, então $f^{-1}(f(Z)) \supset Z$

(c) $f^{-1}(f(Z)) = Z$ para todo conjunto $Z \subset \mathbb{R}$, mas em geral $f(f^{-1}(W)) \subset W$

(d) $f^{-1}(W)$ é aberto sempre que W for aberto

(e) $f(Z)$ é aberto sempre que Z for aberto

5. O sistema de equações diferenciais, definido para $t > 0$ a partir de um valor inicial $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} y_1'(t) + 2y_1(t) - 2y_2(t) = 4 \\ y_2'(t) + 3y_2(t) - y_3(t) = 3 \\ y_3'(t) - y_2(t) + y_3(t) = 1 \end{cases}$$

onde $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^T$,

(a) possui solução que converge a zero (vetor nulo) para qualquer y_0

(b) não possui soluções limitadas para $t > 0$

(c) não possui soluções estacionárias

(d) possui várias soluções estacionárias que tendem a zero (ao $t \to \infty$) para cada y_0 fixado

(e) possui uma única solução estacionária

6. Seja x_e a solução de $Ax = b$ pelo Método de Gauss-Seidel, onde $A = L + U$, L triangular inferior, U triangular superior com zeros na diagonal. Aqui $\rho(M) = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ autovalor de } M\}$. Seja $x_{n+1} = L^{-1}(b - Ux_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, a iteração correspondente.

(a) se $\rho(A) = 1.2$ então a iteração não pode convergir se $x_0 \neq x_e$

(b) se $\rho(LU) = 0.8$ então a iteração pode convergir a x_e somente se x_0 estiver suficientemente próximo de x_e

(c) se $\rho(L^{-1}U) = -0.9$ então a iteração convergirá a x_e para qualquer x_0

(d) se $\rho(L^{-1}U) > 1$ então a iteração converge para x_e, independendo da escolha de x_0

(e) se $\rho(L^{-1}U) = 0$ então a solução não é única, e a convergência a x_e pode não ser possível

7. Seja $\{f_n\}$ uma família de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, tal que $f_n(x) \to f(x), x \in E \subset \mathbb{R}$.

(a) se as funções f_n forem uniformemente contínuas em E, $n = 1, 2, \ldots$, então f será uniformemente contínua em E

(b) se todas funções f_n forem contínuas e se E for compacto então f pode deixar de ser contínua em alguns pontos de E

(c) se todas as funções $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, forem contínuas em E e E for compacto então f será integrável em E (no sentido de Riemann)

(d) se todas as funções $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, forem deriváveis em $(a, b) \subset E$ então f será contínua em $[a, b]$

(e) se todas as funções $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, forem deriváveis em $(a, b) \subset E$ e contínuas em $x = a$ e $x = b$, e se a convergência de $\{f_n\}$ for uniforme em E então f pode deixar de ser contínua em alguns pontos de $[a, b]$

8. Os autovetores (autofunções) do problema de Dirichlet para o operador $-\nabla^2$ no retângulo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ são:

(a) $u(x, y) = \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{a} \cos \dfrac{m\pi y}{b}$

(b) $u(x, y) = \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{a} \operatorname{sen} \dfrac{m\pi y}{b}$

(c) $u(x, y) = \cos \dfrac{n\pi x}{a} \cos \dfrac{m\pi y}{b}$

(d) $u(x, y) = \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{a} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi y}{b}$

(e) $u(x, y) = \cos \dfrac{n\pi x}{a} \operatorname{sen} \dfrac{m\pi y}{b}$

9. Considere matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times m}$. Marque a alternativa correta.

(a) AB e BA têm os mesmos autovalores

(b) os polinômios característicos de AB e BA são o mesmo

(c) se $\lambda \neq 0$ é autovalor de AB então λ também é autovalor de BA

(d) os autovetores de AB e BA são os mesmos

(e) se $n \neq m$, um autovalor de AB não é um autovalor de BA

10. Seja C a circunferência $|z - \imath| = 1/2$, orientada no sentido anti-horário, qual o valor da integral ?

$$\oint_C \frac{z+1}{z(z-\imath)^2}\, dz$$

(a) 0

(b) $2\pi\imath$

(c) $-2\pi\imath$

(d) 2π

(e) -2π

11. Seja $f(z)$ uma função analítica em todo o plano complexo, tal que $f(0) = 1$.
Seja $Z(f) = \{z : f(z) = 0\}$, quais das afirmações abaixo são verdadeiras?

I. $Z(f)$ é um conjunto compacto.
II. $Z(f)$ é fechado e discreto.
III. Se $Z(f)$ é não enumerável, então $f(z) \equiv 0$.
IV. $Z(f)$ é não vazio.

(a) apenas I e II

(b) apenas I, II e III

(c) apenas II e III

(d) apenas II, III e IV

(e) todas estão corretas

12. Considere o seguinte subconjunto do plano: $S = \{z : |z| = 1\} \cup \{re^{\imath\theta} : \theta = \dfrac{p}{q}$ é racional irredutível e $1/q \leq r \leq 1\}$, isto é, S é a união do círculo unitário com os segmentos radiais de ângulos racionais. Qual afirmação abaixo é falsa?

(a) S é fechado

(b) S é conexo

(c) O conjunto dos pontos de acumulação de S contém o disco unitário $\{z : |z| \leq 1\}$

(d) S não possui pontos isolados

(e) $S \cup \{0\}$ é conexo

13 Seja f uma função real contínua em $[a, b]$. Para $n = 0, 1, \ldots$ seja $I_n = \displaystyle\int_a^b t^n f(t)\ dt$. Quais afirmações abaixo são verdadeiras?

I. Se $I_0 = I_1 = 0$, então f tem no mínimo 2 zeros distintos em (a, b).
II. Se $I_n = 0$ para todo n par, então $f(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$.
III. Se $I_n = 0$ para todo n ímpar, então f é um polinômio.
IV. Se $I_n = 0$ para todo n, $f(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$.

(a) apenas I e II

(b) apenas I e III

(c) apenas III e IV

(d) apenas I e IV

(e) nenhuma das afirmações acima

14. Seja A uma matriz 5×5. Quais as afirmações verdadeiras?

I. Existe $\sqrt{A}$, isto é, existe B tal que $B^2 = A$.
II. Se A é inversível, existem $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tal que $A^{-1} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3 + \alpha_4 A^4$
III. O espaço gerado por $\{I, A, A^2, A^3, A^4\}$ contém a matriz $\cos A = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!}$.

(a) apenas II

(b) apenas III

(c) apenas I e II

(d) apenas II e III

(e) I, II e III

15. Seja X o espaço das seqüências de inteiros positivos. Considere as seguintes afirmações

I. Para todo $(\alpha_n) \in X$, existe $(\beta_n) \in X$ tal que $\displaystyle\sum_n |\text{sen}\ \alpha_n|^{\beta_n}$ converge.

II. Existe $(\alpha_n) \in X$ tal que para todo $(\beta_n) \in X$, $\displaystyle\sum_n |\text{sen}\ \alpha_n|^{\beta_n}$ diverge.

III. Existe um $(\beta_n) \in X$ tal que para todo $(\alpha_n) \in X$, $\displaystyle\sum_n |\text{sen}\ \alpha_n|^{\beta_n}$ diverge.

IV. Para todo $(\beta_n) \in X$, existe $(\alpha_n) \in X$ tal que $\displaystyle\sum_n |\text{sen}\ \alpha_n|^{\beta_n}$ diverge.

Quais as afirmações verdadeiras?

(a) apenas III

(b) apenas I e III

(c) apenas I e IV

(d) todas

(e) nenhuma

UFRGS - PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA
EXAME DE SELEÇÃO 2005 DOUTORADO
GRADE DE RESPOSTAS: ESCOLHA SIMPLES

Nome: , Documento:

(A) em cada questão , marque um X correspondendo à sua escolha;
(B) utilize caneta esferográfica para marcar a grade;
(C) caso você já tenha marcado uma escolha e queira MUDÁ-LA, tal poderá ser feito uma ÚNICA vez por questão , mas SOMENTE mediante rubrica de qualquer dos membros da banca examinadora.

1)	A ( )	B ( )	C ( )	D ( )	E ( )
2)	A ( )	B ( )	C ( )	D ( )	E ( )
3)	A ( )	B ( )	C ( )	D ( )	E ( )
4)	A ( )	B ( )	C ( )	D ( )	E ( )
5)	A ( )	B ( )	C ( )	D ( )	E ( )
6)	A ( )	B ( )	C ( )	D ( )	E ( )
7)	A ( )	B ( )	C ( )	D ( )	E ( )
8)	A ( )	B ( )	C ( )	D ( )	E ( )
9)	A ( )	B ( )	C ( )	D ( )	E ( )
10)	A ( )	B ( )	C ( )	D ( )	E ( )
11)	A ( )	B ( )	C ( )	D ( )	E ( )
12)	A ( )	B ( )	C ( )	D ( )	E ( )
13)	A ( )	B ( )	C ( )	D ( )	E ( )
14)	A ( )	B ( )	C ( )	D ( )	E ( )
15)	A ( )	B ( )	C ( )	D ( )	E ( )

Reservado à banca examinadora: corretas: ________, incorretas: ________, escore: __________.