Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Exame de Admissão – Variável Real e Complexa

Resolva as questões abaixo. Sua solução deve ser *clara*, *concisa* e *completa*.

Questão 1 (*categorias de Baire*).

(i) Defina conjuntos de *primeira* e *segunda categoria* em $\mathbb{R}^2$ (na métrica usual), dando um exemplo de cada.

(ii) Dê exemplo de um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ de *primeira* categoria e com medida de Lebesgue *positiva*. Dê exemplo de um conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^2$ de *segunda* categoria e medida *nula*.

[Sugestão: Examine o conjunto de Cantor no intervalo $[0, 1]$ e generalizações apropriadas.]

Questão 2.

Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ e $f_\ell \in L^p(\Omega)$ $\forall\, \ell \in \mathbb{N}$.

(i) Se $f_\ell \to f$ em $L^p(\Omega)$, mostre que existe subseqüência $(f_{\ell_k}) \subseteq (f_\ell)$ convergindo a f quase sempre em Ω (i.e., $f_{\ell_k}(\boldsymbol{x}) \to f(\boldsymbol{x})$ ao $k \to \infty$ para quase todos os pontos $\boldsymbol{x} \in \Omega$).

(ii) Dê exemplo de funções f, $f_\ell \in L^p(\Omega)$, $\ell = 1, 2, \ldots$, tais que $f_\ell \to f$ em $L^p(\Omega)$ mas, para cada $\boldsymbol{x} \in \Omega$, $f_\ell(\boldsymbol{x}) \not\to f(\boldsymbol{x})$ ao $\ell \to \infty$.

Questão 3.

Sendo $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mensurável, $0 < \alpha \leq 1$ e $f \in L^1(E)$ não negativa com $\displaystyle\int_E f(\boldsymbol{x})\, d\mu(\boldsymbol{x}) > 0$, obtenha o limite (justificando seus cálculos!)

$$\lambda(\alpha) := \lim_{m \to \infty} \int_E m \log\left\{ 1 + \left(\frac{f(\boldsymbol{x})}{m} \right)^\alpha \right\} d\mu(\boldsymbol{x}), \qquad 0 < \alpha \leq 1.$$

Questão 4.

Sendo Ω a imagem do disco unitário $\Delta = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$ pela aplicação $w = z + z^2/2$, calcule a área de Ω.

Questão 5.

(i) Enuncie o *teorema do mapeamento conforme de Riemann*, e dê exemplo de condições que garantem a unicidade de tal mapeamento.

(ii) Obtenha explicitamente um mapeamento conforme da região $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 2| < 2$ e $|z - 1| > 1 \}$ sobre o disco unitário.

Questão 6.

Seja f uma função meromorfa no plano com apenas um pólo no disco $|z| \leq 1$, dado pelo ponto $z = 1$, sendo ademais este pólo *simples*. Nestas condições, mostre que os coeficientes a_n da série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad |z| < 1$$

convergem a um limite finito, i.e., $\lim_{n \to \infty} a_n = b$ para certo $b \in \mathbb{C}$. Que relação existe entre o limite b e o resíduo de f em $z = 1$?

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Exame de Admissão – Equações Diferenciais

Resolva as questões abaixo. Sua solução deve ser *clara*, *concisa* e *completa*.

Questão 1. Considerando o problema abaixo,

$$(1) \qquad \begin{cases} (e^t \sin x(t))\, x'(t)^3 + (e^t \cos x(t))\, x'(t) + e^{x(t)} \tan t = 0, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

pede-se verificar se, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, existe solução em $J_\delta =]-\delta, \delta[$? Se existir, é a solução *única* em J_δ? (Justifique cuidadosamente sua resposta.)

Questão 2. Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua, e dado $b \in \mathbb{R}$, considere o problema abaixo:

$$(2) \qquad \begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(0) = b. \end{cases}$$

(i) Sendo $a > 0$ e $u_1, u_2, \ldots, u_N \in C^1([0, a])$ soluções de (2) acima no intervalo $[0, a]$, mostre que $v, w : [0, a] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$v(t) := \min_{1 \leq n \leq N} u_n(t), \qquad w(t) := \max_{1 \leq n \leq N} u_n(t), \qquad 0 \leq t \leq a$$

são soluções de classe $C^1([0, a])$ do mesmo problema.

(ii) Sendo $u_1, u_2 \in C^1([0, a])$ soluções em $[0, a]$ de (2) tais que $u_1(a) < u_2(a)$, mostre que para cada $\gamma^* \in [u_1(a), u_2(a)]$ existe solução $u^* \in C^1([0, a])$ do problema (2) satisfazendo $u^*(a) = \gamma^*$ (*fenômeno de Peano*).

(iii) Seja $\mathcal{F}(a)$ uma família infinita de soluções $u \in C^1([0, a])$ de (2), uniformemente limitadas (i.e., existe $M > 0$ tal que $|u(t)| \leq M$ para todo $0 \leq t \leq a$ e toda $u \in \mathcal{F}(a)$), e defina $\omega : [0, a] \to \mathbb{R}$ pondo

$$\omega(t) := \sup_{u \in \mathcal{F}(a)} u(t), \qquad 0 \leq t \leq a.$$

Mostre que ω é de classe $C^1([0, a])$, sendo ademais solução de (2) em $[0, a]$.

Questão 3. Sendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aberto, seja $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ tal que, para cada $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$, tem-se

$$(3) \qquad u(\boldsymbol{\xi}) \leq \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{\partial B_\rho(\boldsymbol{\xi})} u(\boldsymbol{x})\, d\sigma(\boldsymbol{x})$$

para todo $\rho > 0$ suficientemente pequeno (ou seja, u é subharmônica em Ω), onde $B_\rho(\boldsymbol{\xi})$ denota a bola de centro $\boldsymbol{\xi}$ e raio ρ, i.e., $B_\rho(\boldsymbol{\xi}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}| < \rho\}$, e $\partial B_\rho(\boldsymbol{\xi})$ é a fronteira de $B_\rho(\boldsymbol{\xi})$. Mostre que $\Delta u \geq 0$ em Ω.
[Sugestão: use identidade de Green com $G(\boldsymbol{x}) = \psi(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|) - \psi(\rho)$, onde $\psi(r) = -(4\pi r)^{-1}$.]

Questão 4. Considerando o problema abaixo,

$$(4)\qquad \begin{cases} u_{tt} \;=\; 2u_{xx} + x^2 + t, & 0 < x < 1,\;\; t > 0, \\ u(x,0) \;=\; x^2, & 0 \le x \le 1, \\ u_t(x,0) \;=\; 1, & 0 \le x \le 1, \\ 3u_x(0,t) - u(0,t) \;=\; 0, & t > 0. \\ u_x(1,t) \;=\; 2, & t > 0. \end{cases}$$

mostre que há no máximo uma solução $u \in C^1(\,[\,0,1\,]\times[\,0,\infty\,[\,) \cap C^2(\,]\,0,1\,[\times]\,0,\infty\,[\,)$.

Questão 5. Sendo $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ com $f(\boldsymbol{x}) \to 0$ ao $|\,\boldsymbol{x}\,| \to \infty$, considere a solução u de

$$(5a)\qquad \begin{cases} u_t \;=\; \Delta u, & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\;\; t > 0 \\ u(\boldsymbol{x},0) \;=\; f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

dada pela convolução

$$(5b)\qquad u(\boldsymbol{x},t) \;=\; \frac{1}{(\,4\pi t\,)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\,|^2}{4t}} f(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\;\; t > 0.$$

(i) Mostre que $u(\boldsymbol{x},t) \to f(\boldsymbol{x})$ ao $t \to 0^+$, *uniformemente* em $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Mostre que $u(\boldsymbol{x},t) \to 0$ ao $t \to \infty$, *uniformemente* em $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Questão 6. Encontre aproximações de ordem ε^0 e ordem ε^1 para a solução $u = u(x,t;\varepsilon)$ do problema

$$(6)\qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} \;=\; \varepsilon\,(\,u^2 + u_{xx})_{xx}, & x \in \mathbb{R},\;\; t > 0, \\ u(x,0;\varepsilon) \;=\; f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0;\varepsilon) \;=\; -f'(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

sendo $|\,\varepsilon\,| \ll 1$.