UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA
EXAME DE SELEÇÃO 2005 - MESTRADO

Nome: , Documento:

Indique a resposta apropriada na grade de respostas para cada uma das seguintes questões.
Cada questão respondida corretamente vale dois (2) pontos.
Cada questão respondida incorretamente vale -1 ponto.
Questão não respondida vale 0(zero) pontos.
Obs.: Todo material utilizado deve ser devolvido juntamente com a grade de respostas.
Só é permitido o uso de caneta, lápis e borracha. Utilizar caneta para a grade de respostas.

1. O valor de $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ é:

(a) $-1/2$

(b) $1/2$

(c) 1

(d) 2

(e) ∞

2. Suponha que a matriz A tem forma escalonada R, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & b \\ 2 & a & 1 & 8 \\ & \text{(linha 3)} & & \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quais devem ser os números a e b ?

(a) $a = 0,\ b = 1$

(b) $a = 4,\ b = 0$

(c) $a = 4,\ b = 5$

(d) $a = 0,\ b = 3$

(e) $a = 2,\ b = 5$

3. Sendo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, as soluções não nulas da equação $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ são dadas por

(a) $y = \dfrac{1}{x+c_1} + c_2$

(b) $y = c_2 + \ln|c_1 - x|$

(c) $y = c_2 - \ln|c_1 - x^2|$

(d) $y = c_2 \ln|c_1 + x|$

(e) $y = c_2 - \ln|c_1 + x|$

4. O valor de $\lim_{x\to 0}(x+e^{3x})^{1/x}$ é

(a) e^2

(b) 1

(c) e^3

(d) $1+e^3$

(e) e^4

5. Seja $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x)=Ax$ onde

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

A imagem de f pode ser descrita como

(a) um ponto

(b) uma reta passando pela origem

(c) um plano passando pela origem

(d) a união de um plano passando pela origem e de uma reta perpendicular a ele

(e) todo $\mathbb{R}^3$

6. Sendo $C\in\mathbb{R}$ qualquer, a solução geral da equação $\dfrac{dx}{dt}=2tx^2$ é dada por

(a) $x(t)=\dfrac{-2}{t^2}+C$

(b) $x(t)=\dfrac{1}{t^2+C}$ e $x(t)\equiv 0$

(c) $x(t)=\dfrac{-1}{t^2+C}$ e $x(t)\equiv 0$

(d) $x(t)=t^2+C$

(e) $x(t)=\dfrac{2}{t^2-C}$ e $x(t)\equiv 0$

7. Se a é uma constante positiva, qual o valor máximo de $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^a}$ é

(a) $\dfrac{1}{ae}$

(b) a^{a-1}

(c) a^e

(d) e^a

(e) $\dfrac{e^{a^2}}{a}$

8. Sejam A, B e C matrizes 2×2. Das afirmações abaixo, quais são verdadeiras?

I. $A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$.

II. $AB = BA \Rightarrow B = C$.

III. Se A é inversível e $A^{-1} = A$, então $A = I$ ou $A = -I$.

(a) apenas I

(b) apenas I e III

(c) apenas II e III

(d) apenas III

(e) nenhuma

9. Tendo $M^C, M \bigcup N$ e $M \bigcap N$ as definições clássicas de complemento, união e intersecção de conjuntos, então **não** é verdade que, para conjuntos quaisquer A, B e E,

(a) $(A \bigcup B) \bigcap E = (A \bigcap E) \bigcup (B \bigcap E)$

(b) $(A \bigcap B) \bigcap E = (A \bigcap E) \bigcap B$

(c) $(A \bigcup B)^C \bigcap E = (A^C \bigcap E) \bigcup (B^C \bigcap E)$

(d) $(A \bigcap B) \bigcap E^C = (E^C \bigcap B) \bigcap A$

(e) $(A \bigcup B)^C \bigcap E = (A^C \bigcap E) \bigcap B^C$

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico passa pela origem. Se $f(2n) = n^2 + f(2(n-1))$ para todo inteiro n, o valor de $f(8)$ é

(a) 24

(b) 30

(c) 32

(d) 36

(e) não pode ser determinado com a informação dada.

11. Seja X o conjunto das funções $f : [a, b] \to [a, b] \subset \mathbb{R}$, onde $-\infty < a < b < \infty$. Quais das seguintes condições implicam que $f \in X$ é constante em $[a, b]$?

I. A função inversa de f existe e é constante em $[a, b]$.

II. A função $h(x) = g(f(x))$ é constante para toda $g \in X$.

III. A função $h(x) = g(f(x))$ é constante para alguma $g \in X$, onde g é injetora

(a) apenas II

(b) apenas I e II

(c) apenas I e III

(d) apenas II e III

(e) apenas III

12. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & d & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Para quais valores reais de d abaixo a matriz A tem todos os autovalores reais positivos ?

(a) $d = 1$

(b) $d > 0$

(c) $d < 0$

(d) $d = 0$

(e) para nenhum valor de d

13. Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n/2}}{(n!)^2} x^n$, o valor de $f^{(4)}(0)$ é

(a) negativo

(b) positivo mas menor que 1

(c) igual a 1

(d) maior que 1

(e) não existe

14. Seja $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \ln(t)dt$. Os pontos estacionários positivos de f são

(a) $x_1 = \frac{4}{9}$ e $x_2 = 1$

(b) $x_1 = 1$

(c) $x_1 = \frac{3}{2}$

(d) $x_1 = 1$ e $x_2 = \frac{3}{2}$

(e) nenhuma das alternativas anteriores

15. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linear tal que $T(1;2) = (2;3)$ e $T(-1;2) = (2;-3)$. Então $T(2;1) =$

(a) $(1;6)$

(b) $(-1;4)$

(c) $(3;2)$

(d) $(-4;3)$

(e) $(-33;1)$

16. A tabela abaixo foi gerada usando $f(x) = 4x^3 - x^4 - 15x^2/4$.

x	-2	-1	0	1	3
$f(x)$	-63	-8.75	0	-0.75	-6.75

Seja $\phi(x)$ o polinômio de Lagrange que interpola esta tabela. Então $\phi(2)$ é

(a) -63

(b) 1

(c) -3.75

(d) 0

(e) 63

17. Se A é inversível e possui um autovalor $\lambda = 3$ correspondendo a um autovetor x, então :

(a) a matriz A^{-1} tem um autovalor 1/3 correspondendo ao autovetor x

(b) a matriz A^{-1} tem um autovalor 1/3 correspondendo a um autovetor cujas componentes são os recíprocos das respectivas componentes de x

(c) a matriz A^2 tem um autovalor 3 correspondendo ao autovetor x

(d) a matriz A^2 tem um autovalor 6 correspondendo ao autovetor x

(e) a matriz A^2 tem um autovalor 1/9 correspondendo ao autovetor x

18. Seja $f(x) = \exp(-|x|)$. Podemos afirmar que:

(a) f não é contínua em $x = 0$ pois f não é diferenciável em $x = 0$

(b) f é derivável em todos os pontos da reta, entretanto sua derivada não é contínua em $x = 0$

(c) a função $g(x) = |f'(x)|$ não pode ser contínua em $x = 0$

(d) $f'(0) = 0$ uma vez que $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1$ e $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1$

(e) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{f'(x)} = -1$

19. Sejam os elementos de um conjunto W os vetores $x \in \mathbb{R}^3$ tais que $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & a \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Então é verdade que:

(a) W é constituído por apenas 1 vetor

(b) W é gerado pelos vetores $a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ e $a_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$

(c) W é o conjunto vazio somente se $a = 5$

(d) W é constituído por infinitos elementos se $a = 5$

(e) W é formado por apenas 2 elementos se $a \neq 5$

20. Seja $K_N = \{z \in \mathbb{C} : z^N = 1\}$, N inteiro positivo, e seja $\cdot$ o produto usual em $\mathbb{C}$. Qual a afirmação verdadeira?

(a) K_N é fechado em $\cdot$ pois $\forall\ z_1, z_2 \in K_N, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $|\alpha| + |\beta| = 1$ temos $\alpha z_1 + \alpha z_2 \in K_N$

(b) existem elementos w de K_N para os quais não existe $q \in K_N$ tal que $w \cdot q = 1$

(c) é sempre verdade que se $z \in K_N$ então $z^p \in K_N$ para qualquer p inteiro positivo

(d) se $z \in K_{2N}$ então $z \in K_N$

(e) nenhuma das alternativas acima está correta

21. Sendo $y = y(t)$ uma função satisfazendo $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 4$, $y(0) = -1, y'(0) = 2$. Então deveremos ter

(a) $y(t) = -4e^t + e^{2t}$

(b) $y(t) = -4e^{-2t} + e^{-t} + 2$

(c) $y(t) = -4e^{-t} + e^{-2t} + 2$

(d) $y(t) = 8e^{3t} - 11e^{2t} + 2$

(e) $y(t) = 4e^{-3t} - 7e^{-2t} + 2$

22. A iteração de Newton-Raphson para o cálculo da raíz cúbica de um número real positivo u qualquer com valor inicial positivo x_0 é:

(a) $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u}{x_n}}$

(b) $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n}{u}}$

(c) $x_{n+1} = x_n + \dfrac{x_n^3 - u}{3x_n^2}$

(d) $x_{n+1} = \dfrac{2x_n}{3} + \dfrac{u}{3x_n^2}$

(e) nenhuma das alternativas acima

23. Seja $r \neq 2$ e seja $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{3r+1}{r-2} x_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ uma sequência numérica. Podemos garantir que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ é convergente sempre que

(a) $-1 < r < 1$

(b) $-1.5 < r \leq 0.25$

(c) $r \geq \delta$ desde que $\delta > 0.25$

(d) $-1.4 < r < 0.24$

(e) $r < 1.5$

24. Seja A uma matriz real tal que $A^T A = I$. Então

(a) apenas $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$ podem ser autovalores de A

(b) A não possui autovalores reais

(c) todos os autovetores de A associados a autovalores distintos de A são ortogonais entre si

(d) todos os autovalores complexos λ de A satisfazem $|\lambda| = 1$

(e) A é uma matriz simétrica definida positiva

25. Se $x_1 \neq 0$ e para $n \geq 1$ for $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$ qual a afirmação correta?

(a) (x_n) diverge se $x_1 < 0$ e converge para 1 se $x_1 > 0$

(b) (x_n) diverge se $x_1 < 0$ e converge para $\sqrt{2}$ se $x_1 > 0$

(c) (x_n) converge para -1 se $x_1 < 0$ e converge para $\sqrt{2}$ se $x_1 > 0$

(d) (x_n) converge para $-\sqrt{2}$ se $x_1 < 0$ e converge para $\sqrt{2}$ se $x_1 > 0$

(e) (x_n) diverge para todo $x_1 \neq 0$

26. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp(-x^2/y^2) & , y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases} .$$

Então é verdadeiro:

(a) f tem descontinuidade apenas no ponto $(0,0)$

(b) f é diferenciável em todo o plano, mas suas derivadas parciais não são contínuas em $(0,0)$

(c) f é contínua em todo o plano, mas não é derivável em $(0,0)$

(d) f é contínua em todos os pontos da reta $y = 0$, apesar de não ser diferenciável nesses pontos

(e) f não é contínua nos pontos da reta $y = 0$, pois não é derivável nesses pontos

27. Seja A uma matriz real quadrada de dimensão 3, e sejam

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \; x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \; b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \; b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5/3 \\ -19/3 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $Ax_1 = b_1$ e $Ax_2 = b_2$, sobre soluções x de $Ax = b$ podemos afirmar:

(a) x é unicamente determinada, mas faltam dados para isso

(b) x pode não existir, dependendo do valor do determinante da matriz A

(c) x pode não ser única, mas sempre existe

(d) x não existe

(e) existem apenas duas soluções distintas se $det(A) = 0$

28. Sendo $y = y(t)$ uma função satisfazendo $y' = y(4-y), y(0) = y_0 \geq 0$, é verdade que

(a) se $y_0 \neq 4$ então $y(t) \to 0$ ao $t \to \infty$

(b) se $0 \leq y_0 < 4$ então $y(t) \to \infty$ ao $t \to \infty$

(c) se $y_0 > 4$ então $y(t) \to -\infty$ ao $t \to \infty$

(d) se $y_0 > 0$ então $y(t) \to 4$ ao $t \to \infty$

(e) nenhuma das alternativas anteriores está correta

29. Seja $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ uma função e seja $Jf(x)$ sua matriz de derivadas parciais num ponto $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ no domínio de f. Seja $w = (1, -2, 1, 3, 2)$ um ponto no domínio de f tal que

$$Jf(w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 2/3 & -1/6 \end{bmatrix}.$$

Com relação ao conjunto solução de $f(x) = f(w)$, podemos afirmar que

(a) existe uma vizinhança de w onde x_1 e x_2 são funções implícitas de x_3, x_4 e x_5;

(b) existe uma vizinhança de w onde x_1, x_3, x_4 e x_5 são funções implícitas de x_2

(c) existe uma vizinhança de w onde x_1, x_3 e x_4 são funções implícitas de x_2 e x_5

(d) em qualquer vizinhança de w, x_3, x_4 e x_5 são funções implícitas de x_1 e x_2

(e) existe uma vizinhança de w onde x_1, x_2 e x_4 são funções implícitas de x_3 e x_5

30. Seja $x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}^T$, $z = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}^T$, e seja

$$W = \{w \in \mathbb{R}^4 : z^T w = 0 \text{ e } x^T w = 0\}.$$

Podemos afirmar que:

(a) existem dois vetores linearmente dependentes que geram W via combinações lineares

(b) W pode ser gerado via combinações lineares de x e z

(c) não existem dois vetores linermente independentes que gerem W via combinações lineares

(d) $w_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ e $w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}^T$ geram W via combinações lineares

(e) apenas o vetor nulo pertence a W

31. Lembramos que $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, para todo tal que $|x| < 1$. O valor de $\ln(1 + 1/4)$ é

(a) $\dfrac{1}{1+1/4} = 1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{64} + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{4^n} + \ldots$

(b) $\ln(1) + \ln(1/4) = -2\ln(2)$

(c) $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(4)^2} + \dfrac{1}{3(4)^3} - \dfrac{1}{4(4)^4} + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{(n+1)(4)^{n+1}} + \ldots$

(d) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2(4)^2} + \dfrac{1}{3(4)^3} + \dfrac{1}{4(4)^4} + \ldots + \dfrac{1}{(n+1)(4)^{n+1}} + \ldots$

(e) $\dfrac{1}{4(4)} - \dfrac{1}{5(4)} + \dfrac{1}{6(4)} - \dfrac{1}{7(4)} + \dfrac{1}{8(4)} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{4(n+1)} + \ldots$

32. Podemos garantir que a fórmula de quadratura numérica

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

é exata

(a) somente para $f(x)$ polinômio de grau menor ou igual a 1

(b) somente para $f(x)$ polinômio de grau menor ou igual a 2

(c) para qualquer $f(x)$ monótona e integrável

(d) para qualquer $f(x)$ polinômio de grau menor ou igual a 3

(e) para nenhuma das alternativas anteriores

33. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável e seja $\nabla f(u)$ seu gradiente em um ponto $u \in \mathbb{R}^2$, seja $H(u)$ sua matriz Hessiana em $u \in \mathbb{R}^2$. Sejam

$$H_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \ H_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \ H_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \ v = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Então é verdade que

(a) se $\nabla f(u^*) = w$ e $H(u^*) = H_1$ então u^* é um mínimo relativo ou local de f

(b) se $\nabla f(u^*) = v$ e $H(u^*) = H_2$ então u^* é um ponto de máximo relativo ou local de f

(c) mesmo sabendo que $\nabla f(u^*) = w$, e $H(u^*) = H_3$, nada se pode dizer sobre u^* ser extremo relativo ou local de f

(d) se $\nabla f(u^*) = v$, e $H(u^*) = H_3$ então nada se pode dizer sobre u^* ser extremo relativo ou local de f

(e) se $\nabla f(u^*) = w$ e $H(u^*) = H_3$ então u^* é ponto de máximo relativo ou local de f

34. Sobre a solução de $Ax = b$, onde A é uma matriz 5×5 com posto 3, e $b \in \mathbb{R}^5$, podemos afirmar que

(a) a solução existe e é única para qualquer b;

(b) a solução sempre existe, mas pode não ser única para alguns valores de b

(c) a solução , se existir, é sempre única

(d) se houver uma (alguma) solução , então haverá infinitas soluções

(e) se $b = 0$ (vetor nulo) então o espaço de soluções de $Ax = b$ tem dimensão 1

35. Podemos afirmar que a equação diferencial $y'(t) + ay(t) = b$, onde a e b são constantes reais não nulas,

(a) possui solução homogênea $y_h(t) = A\text{sen}\,(\sqrt{a}\ t) + B\cos(\sqrt{a}\ t)$, com $A, B \in \mathbb{R}$ SE a for positivo

(b) possui solução estacionária $y = -b/a$ ao $t \to \infty$

(c) não possui soluções estacionárias ao $t \to \infty$ se a for negativo

(d) possui solução crescente se a e b tiverem o mesmo sinal

(e) possui solução periódica não constante se a e b não tiverem o mesmo sinal

36. Ache a distancia mínima da curva $3x^2 + 4xy + 3y^2 = 20$ a origem.

(a) 1

(b) $\sqrt{2}$

(c) 2

(d) $2\sqrt{2}$

(e) $5\sqrt{2}$

37. Considere o sistema de equações algébricas $Ax = b$, onde a matriz A tem MAIS linhas do que colunas. Então é verdade que:

(a) uma solução sempre existirá, pois temos mais incógnitas do que equações

(b) se A tiver posto máximo então a solução existe e é única

(c) uma melhor solução no sentido dos Mínimos Quadrados sempre existe se A tem posto máximo

(d) o sistema normal $A^T Ax = A^T b$ sempre nos dará uma aproximação para a solução

(e) a solução sempre é única se $b = 0$

38. Considerando a sequência $\{x_n\}$ definida recursivamente por $x_{n+1} = \dfrac{4}{\pi - x_n}, n = 0, 1, 2, \ldots,$ podemos afirmar que

(a) o limite de $\{x_n\}$ existe e é unico desde que $x_0 \neq \pi$

(b) essa sequência $\{x_n\}$ não pode ser convergente, para qualquer escolha de $x_0 \neq \pi$

(c) o limite de $\{x_n\}$ sempre existe, mas depende da escolha de $x_0 \neq \pi$

(d) o limite de $\{x_n\}$ existe e é único para algumas escolhas de $x_0 \neq \pi$

(e) como essa sequência é monótona e limitada, seu limite existe se $x_0 \neq \pi$

39. Sendo $y = y(t)$ uma função satisfazendo $y''(t) + \alpha y'(t) + 4y(t) = 2$, $y(0) = y_0, y'(0) = v_0$, então é verdade que

(a) temos $y(t) \to 0$ ao $t \to \infty$ para qualquer α

(b) se $\alpha > 4$ então $y(t) \to 1/2$ monotonicamente ao $t \to \infty$

(c) se $0 < \alpha < 4$ então $y(t)$ é limitada ao $t \to \infty$

(d) se $\alpha > 4$ então $y(t) \to 0$ monotonicamente ao $t \to \infty$

(e) se $y_0 > 2$ então $y(t)$ é ilimitada ao $t \to \infty$

40. Quais das seguintes condições implicam que um número x é racional ?
I. $x + x^2$ é racional;
II. x^7 e x^{14} são racionais;
III. Existe um inteiro positivo m tal que, $\lim_{n\to\infty}(\cos\,(m!\pi x))^{2n} = 1$;
IV. x^7 e x^{12} são racionais.

(a) apenas I

(b) I e IV

(c) II e III

(d) III e IV

(e) nenhuma dessas condições