Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

Prova Seleção – 06 de Janeiro de 2005

Questão 1 (1,0 ponto)

Encontre o erro no seguinte raciocínio, utilizado para mostrar que $\frac{1}{8} > \frac{1}{4}$:

Como $3 > 2$, *multiplicando esta desigualdade por* $\log \frac{1}{2}$, *obtemos*

$$3 \log \frac{1}{2} > 2 \log \frac{1}{2}.$$

Agora, aplicando uma propriedade operatória dos logaritmos, temos:

$$\log \left(\frac{1}{2}\right)^3 > \log \left(\frac{1}{2}\right)^2 ,$$

ou seja,

$$\log \frac{1}{8} > \log \frac{1}{4}.$$

Cancelando log em ambos os lados desta última desigualdade, finalmente obtemos

$$\frac{1}{8} > \frac{1}{4}.$$

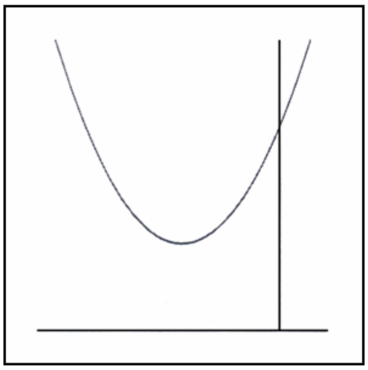
Questão 2 (2,0 pontos)

a) Construa um polinômio $p(x)$ com coeficientes inteiros e de menor grau possível, de modo que $\frac{1}{3}$, 2 e $2 + i$ sejam raízes simples e 0 seja uma raiz dupla, justificando sua resposta.

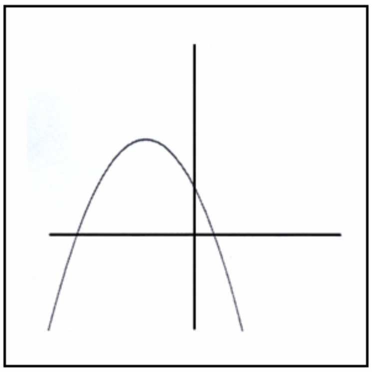
b) Faça um esboço do gráfico da função polinomial $y = p(x)$, com breve justificativa.

Questão 3 (1,5 pontos)

Uma "dica" muito utilizada nos cursinhos pré-vestibulares diz respeito ao sinal de b na expressão da função f dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Ela está sintetizada abaixo:



$b > 0$



$b < 0$

Enuncie formalmente e demonstre esta "dica".

Questão 4 (1,5pontos)
Considere os conjuntos:

A = $\{(x,\ y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ e B = $\{(x,\ y) \in R^2 \mid x - y \leq k\}$

Determine o menor valor de k para que se tenha A $\subseteq$ B.

Questão 5 (2,0 pontos)
Um professor deve corrigir o seguinte exercício:

"Quantos anagramas existem da palavra AVALIAR em que pelo menos dois A's ficam juntos?"

Um aluno deu a seguinte resolução:

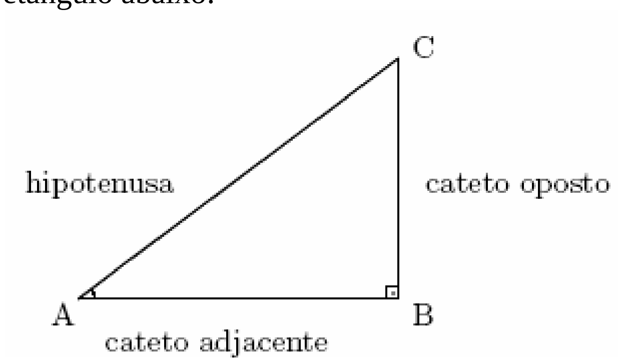
"A palavra *AVALIAR* tem sete letras. Para gerar todos os anagramas admissíveis de uma seqüência de sete posições, inicialmente vagas, primeiro escolhemos duas posições vizinhas e preenchemos com dois *A*'s, garantindo que teremos pelo menos dois *A*'s consecutivos. Isso pode ser feito de 6 maneiras diferentes. Em seguida preenchemos as cinco posições restantes com as letras *V, L, I, A* e *R*. Isso pode ser feito de $5! = 120$ 5!=120 maneiras diferentes. Portanto, a resposta é $6 \cdot 120 = 720$."

a) Há um erro na resolução apresentada pelo aluno. Aponte-o, justificando.

b) Dê a solução correta para o exercício, justificando.

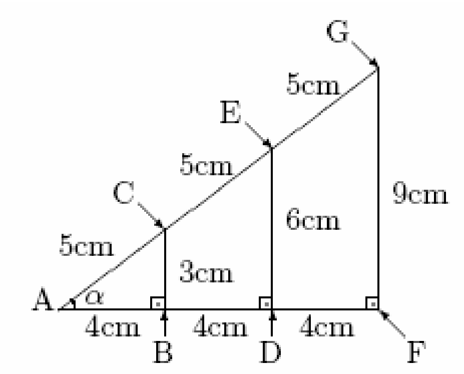
Questão 6 (2,0 pontos)
Abaixo transcrevemos, literalmente, um texto que introduz as constantes trigonométricas, tomando um livro de Matemática para o ensino Médio. Na questão da prova vamos nos ater somente ao conceito de "seno" de um ângulo.

"As constantes trigonométricas:
Do ponto de vista matemático, o desenvolvimento da Trigonometria está associado à descoberta de constantes nas relações entre os lados de um triângulo retângulo.
Considere o triângulo retângulo abaixo:



Dizemos que, em relação ao $\hat{A}$, o cateto *BC* é oposto e o cateto *AB* é adjacente.

Exemplo:
As medidas dos lados dos triângulos retângulos *ABC*, *ADE* e *AFG* estão indicadas na figura. O ângulo agudo $\hat{A}$ mede α. Que razões podem ser estabelecidas entre os lados desses triângulos?



Solução:
Vamos estabelecer três razões:
1ª) razões entre os catetos opostos a $\hat{A}$ e as hipotenusas:

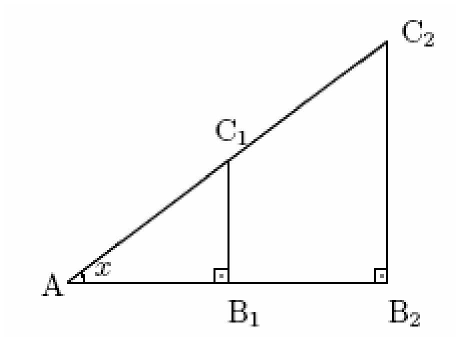
$$\left.\begin{array}{l} \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5} \\ \frac{DE}{AE} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \\ \frac{BC}{AC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \end{array}\right\}$$

As razões $\frac{BC}{AC}$, $\frac{DE}{AE}$ e $\frac{FG}{AG}$ são iguais à constante $\frac{3}{5}$.

Essas razões são chamadas de *seno* de $\hat{A}$. Indica-se: $sen\ \alpha = \frac{3}{5}$

2ª) razões entre os catetos adjacentes ao ângulo $\hat{A}$ e as hipotenusas:
(...)
3ª) razões entre o cateto oposto e o cateto adjacente:
(...)
Tendo em vista a conseqüência do teorema de Tales, para um triângulo retângulo qualquer e sendo $\hat{A}$ um ângulo agudo de medida *x*, podemos escrever:

$$sen\ x = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2}$$



(...)"

Em sua opinião, o tratamento dado ao assunto é adequado? Justifique sua reposta. (No máximo 20 linhas.)