4.

PROPORÇÕES GENERALIZADAS

- Proporções de potências
- Variável proporcional a várias outras
- Composição de proporções

1).– Ideia de proporcionalidade de potência de uma variável

Continuamos estudando problemas onde temos duas variáveis numéricas, que denotaremos por x e y, tais que cada possível valor de x determina exatamente um valor de y, mas, agora, *não mais precisa ocorrer que* ao x variar de um valor $x = x'$ para um novo valor $x = cx'$, obrigatoriamente a variável y passará do valor $y = y'$, que correspondia a x', para o valor $y = cy'$.
Vejamos os dois exemplos mais simples do tipo de novos problemas que passaremos a estudar.

- **proporcionalidade ao quadrado:**
  em tais casos, y é proporcional ao quadrado dos valores de x, ou seja: indicando por u a variável que indica os quadrados de x, então $y \propto u$, o que abreviamos como $y \propto x^2$.
  O exemplo mais simples desse tipo de proporcionalidade é o da proporção entre a área A de um quadrado e o comprimento ℓ de seu lado. Para lados ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, etc. as respectivas áreas A_1, A_2, A_3, etc. verificam:

$$\frac{A_1}{{\ell_1}^2} = \frac{A_2}{{\ell_2}^2} = \frac{A_3}{{\ell_3}^2} = \ldots = \text{uma constante } m$$

  de modo que $A = m \cdot \ell^2$, ou abreviadamente: $A \propto \ell^2$.
  É também importante V. observar que, ao ℓ crescer, o valor de A também cresce, mas cresce ao quadrado de ℓ. Em particular, se dobrarmos o valor de ℓ o valor da área *quadruplica*, e não duplica como ocorreria se tivéssemos uma proporção direta entre A e ℓ. Ou seja: $\ell \to 2\ell$ implica $A \to 4A$. Incidentalmente, isso é um *teste simples* para negativar uma conjectura de proporcionalidade direta entre uma variável y e uma x.

- **proporcionalidade inversa:**
  em tais casos, y é proporcional ao recíproco ou inverso $1/x$ dos valores de x, ou seja: indicando por u a variável que indica os valores de $1/x$, então $y \propto u$, o que abreviamos como $y \propto 1/x$.
  Para um exemplo simples, imaginemos um retângulo de área A, base b e altura h, e suponhamos que vamos variar o tamanho da base, mas conservando o valor da área. Que tipo de relação existe entre cada base e a correspondent altura? Da conhecida fórmula $A = bh$, segue que se b tomar sucessivamente os valores b_1, b_2, b_3, etc. as correspondentes alturas h_1, h_2, h_3, etc. verificam: $b_1 h_1 = b_2 h_2 = b_3 h_3 = \ldots =$ um valor constante A. Essas igualdades podem ser reescritas em termos de razões, como:

$$\frac{h_1}{1/b_1} = \frac{h_2}{1/b_2} = \frac{h_3}{1/b_3} = \ldots = \text{uma constante } m = A.$$

Resumimons tudo isso escrevendo $h \propto 1/b$, o que é o mesmo que $h = A \cdot 1/b$.
Também é importante observar que enquanto a base b cresce a altura h decresce, e reciprocamente: quando b decresce a altura h cresce. Por isso dizemos que trata-se de uma proporcionalidade *inversa*.

Generalizando esses dois exemplos, vemos que temos dois tipos de proporcionalidade: as diretas e as inversas. Os quadros a seguir explicitam as possibilidades.

proporções diretas:

- $y \propto x$: y é diretamente proporcional a x ou há proporcionalidade direta simples entre y e x, ou seja $y = mx$.
- $y \propto x^2$: y é (diretamente) proporcional ao quadrado de x, ou $y = mx^2$.
- $y \propto x^3$: y é (diretamente) proporcional ao cubo de x, ou $y = mx^3$.
- etc.
- $y \propto x^\alpha$: y é (diretamente) proporcional a x^α $(\alpha > 0)$, ou $y = mx^\alpha$.

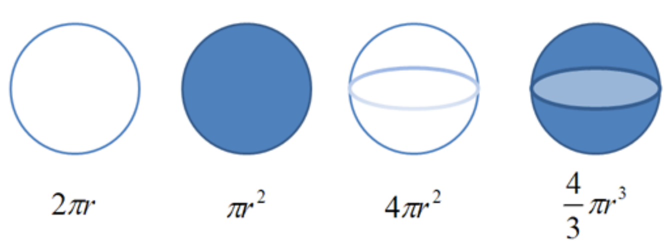
proporções inversas:

- $y \propto 1/x$: y é inversamente proporcional a x ou há proporcionalidade inversa simples entre y e x, ou seja $y = m/x$.
- $y \propto 1/x^2$: y é inversamente proporcional ao quadrado de x, ou $y = m/x^2$.
- $y \propto 1/x^3$: y é inversamente proporcional ao cubo de x, ou $y = m/x^3$.
- etc.
- $y \propto 1/x^\alpha$: y é inversamente proporcional a x^α $(\alpha > 0)$, ou $y = m/x^\alpha$.

Em cada caso, a constante m é denominada *constante de proporcionalidade*.

Exemplo –
Relativamente a círculos, discos, esferas e bolas de raio r, em Geometria se demonstra que (circunferência do círculo) $\propto r$, (área do disco) $\propto r^2$, (área da esfera) $\propto r^2$, (volume da bola) $\propto r^3$.

Bem mais difícil, e isto foi um trabalho prodigioso de Archimedes, achar o valor das respectivas constantes de proporcionalidade e mostrar que todas elas se expressam em termos do número π. Os resultados de Archimedes são resumidos na figura abaixo.



2).– Problemas de proporcionalidade de potência

Têm a mesma estrutura dos problemas de proporcionalidade direta simples, já estudados na aula anterior. Ou seja: iniciamos reconhecendo/identificando o tipo de proporcionalidade existente entre as variáveis do problema, calculamos a constante de proporcionalidade e fazemos a projeção ou a repartição pedida. Exemplifiquemos.

Exemplo –
Quanto maior for um diamante, mais raro e então mais caro ele é. Na prática milenar dos joalheiros, foi estabelecido que o valor v do diamante é proporcional ao quadrado de seu peso p, em quilates, ou seja: $v \propto p^2$. Assim sendo, dado que um diamante de 12 quilates quebrou-se em dois pedaços, um de 8 e o outro de 4 quilates, calcular o prejuízo do joalheiro, sabendo que um diamante de um quilate vale R$ *480.*
Resp.: temos $v = mp^2$, e como $p = 1$ dá $v = 480$, segue que $m = 480$; finalmente,

$$\text{prejuízo} = m \cdot 12^2 - m \cdot 8^2 - m \cdot 4^2 = m(144 - 64 - 16) = 64m = 64 \cdot 480 = 30\,720 \text{ R\$}$$

Complementando, observe que o percentual do prejuízo independe do valor 480. Com efeito, indicando por v_0 o valor inicial do diamante e por v_1 e v_2 os dos pedaços, temos

$$\frac{v_0}{12^2} = \frac{v_1}{8^2} = \frac{v_2}{4^2} = \frac{v_1 + v_2}{8^2 + 4^2} = \frac{v_1 + v_2}{80},$$

de modo que $v_0/144 = (v_1 + v_2)/80$, e então

$$\frac{v_1 + v_2}{v_0} = \frac{80}{144} = 0,5555 = 55,55\%.$$

Ou seja, os diamantes quebrados correspondem a apenas 55,55% do valor do diamante original. Em outras palavras: o joalheiro terá um prejuízo de 44,44%, qualquer que seja o valor do quilate.

Problemas de repartição proporcional generalizada também tem estrutura e resolução semelhantes ao que vimos no caso de proporcionalildade direta simples. Exemplifiquemos.

Exemplo –
Dividir 17 400 em partes inversamente proporcionais aos números 3, 5 e 9.
Resp. Temos de dividir 17 400 em partes diretamente proporcionais aos números 1/3, 1/5 e 1/9; e isso equivale a dividir esse número diretamente proporcionalmente aos números 15/45, 9/45 e 5/45, o que é o mesmo que dividí-lo em partes diretamente proporcionais aos números 15, 9 e 5 (por quê?). Esta última versão do problema já nos é conhecida, e sua resolução dá: 9000, 5400 e 3000.

3).– Problemas de proporcionalidade a várias variáveis

Para não complicar a notação, consideremos inicialmente o caso em que uma variável numérica z depende apenas de duas outras: x e y.
Dizer que *z é proporcional a* x e y significa dizer que fixando os valores de y e variando à vontade os de x, temos que $z \propto x^p$, para algum número real $p \neq 0$; ademais, fixando os valores de x e variando à vontade os de y, temos que $z \propto y^q$, para algum número real $q \neq 0$. Denotamos uma tal proporcionalidade por $z \propto x^p, y^q$.

Considerações análogas para os casos de três ou mais variáveis independentes. Por exemplo, a Lei da Gravitação Universal diz que a força gravitacional F entre dois corpos de massas m e M, é diretamente proporcional às duas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância d entre elas. Em notação de fórmula, escrevemos isso como

$$F = G\frac{mM}{d^2},$$

onde G é a constante universal de gravitação. Em notação de proporções isso se escreve

$$F \propto m, M, 1/d^2 \quad \text{ou} \quad F \propto m, M, d^{-2}.$$

. Os problemas de projeção e de repartição proporcional têm uma resolução análoga ao que já mostramos nos casos de proporcionalidade simples, apenas ficam mais complicados.

Exemplo –
Para pavimentar 480 m de estrada foram precisos 8 homens, trabalhando durante 15 dias de 10 horas. Quantos dias de 12 horas serão necessários para 6 trabalhadores pavimentarem 960 m?
Resp.: iniciamos escrevendo as variáveis do problema: d = dias, c = comprimento, t = trabalhadores, e j = jornada de trabalho (= números de horas de trabalho diário). Fica assim fácil reconhecer que é natural aceitarmos que $d = d(c, t, j) \propto c, 1/t, 1/j$, de modo que $d = m \cdot \frac{c}{tj}$. Os dados nos permitem facilmente determinar a constante de proporcionalidade: $15 = m \cdot \frac{480}{8\times 10}$, logo $m = 2,5$. Com isso, podemos fazer a projeção desejada:

$$d = d(960, 6, 12) = 2,5 \times \frac{960}{6 \times 12} = 33,33\,\text{dias}.$$

Compare a facilidade de nosso método com a, no caso, confusa aplicação da obsoleta Regra de Três.

3).– Problemas de composição de proporções

Nesse tipo de problemas, deseja-se determinar o tipo de proporção envolvendo duas variávies, digamos y e x, e para isso contornamos *o talvez difícil relacionamento direto* entre y e x apelando para *variáveis intermediárias que sejam mais fáceis de relacionar* em termos de proporções. Ou seja, construímos uma cadeia de proporções intermediárias que iniciam com y e terminam com x. Essa é a ideia do método da composição de proporções, inventado pelo grande físico-matemático Galileo Galilei. Ela ficará clara mostrando alguns exemplos.

Exemplo – (muito importante)
Um jardineiro apara a grama de um canteiro quadrado de 4m de lado em 10 min. Que tempo precisará para aparar a grama de um canteiro quadrado de 8m de lado?
Já resolvemos este problema na aula anterior. Agora vamos repensá-lo em termos de composição de proporções generalizadas.
Em vez de partir mecanicamente para a Regra de Três, o que nos levaria a resultado absurdo, iniciamos atinando que o tempo de aparar depende da área do canteiro, de modo que, na verdade, temos três e não duas variáveis neste problema: o lado ℓ do canteiro, sua área A e o tempo t para aparar a grama. Certamente $t \propto A$, mas $A \propto \ell^2$, de modo que $t \propto A \propto \ell^2$, ou seja $t \propto \ell^2$, ou seja: $t = m\ell^2$. Temos então:

$$\frac{10}{4^2} = \frac{t}{8^2} \quad \therefore \quad t = 64 \cdot \frac{10}{16} = 40.$$

Ainda mais inteligente é observar que de $t \propto A \propto \ell^2$, como o lado dobrou, seu quadrado quadruplica, logo o tempo de apara também quadruplica, ou seja: tempo pedido = $4 \times 10 = 40$.

Exemplo –
Para aves voadoras, deseja-se relacionar a tensão que atua sobre as asas durante o voo com o peso da ave.
Resp.: temos que a tensão = (peso da ave)/(área de suas asas). Ora, indicando por ℓ o comprimento da ave (ou qualquer outro comprimento de seu corpo, pois supomos todos serem proporcionais), temos que (área das asas) $\propto \ell^2$, mas (peso da ave) $\propto$ (sua massa) $\propto$ (seu volume) $\propto \ell^3$, de modo que

$$\text{tensão} \propto \frac{\text{peso}}{\text{área}} \propto \frac{\ell^3}{\ell^2} \propto \ell \propto \sqrt[3]{\text{peso}}.$$

Conclusão: a tensão sobre as asas da ave é proporcional à raiz cúbica do peso da ave.
(Curiosidade: em seus escritos, Galileo usa esse método para explicar vários problemas na engenharia das edificações, bem como mostra muitos resultados mais exóticos, tais como por que é impossível termos aves voadoras de grande peso, ou insetos e aranhas gigantescos.)

Exemplo –
É de bastante utilidade (tratamento de queimados, etc.) relacionarmos a área corporal A com o peso p do animal. Vejamos como.
Indicando por ℓ o comprimento do animal (ou qualquer outro comprimento de seu corpo, pois vamos supor todos serem proporcionais), temos:
(peso do animal) $\propto$ (sua massa) $\propto$ (seu volume) $\propto \ell^3$. De modo que $\ell \propto \sqrt[3]{\text{peso}}$. Por outro lado, (área do corpo do animal) $\propto \ell^2$, logo:

$$\text{(área do corpo do animal)} \propto \sqrt[3]{\text{peso}^2}, \quad \text{ou} \quad A = m\sqrt[3]{p^2},$$

em óbvia notação e para um coeficiente de proprocionalidade m que depende da espécie animal. A disciplina Biometria determina experimentalmente o valor de m. Por exemplo: humanos tem $m = 0{,}11$, bois $m = 0{,}090$, cavalos $m = 0{,}10$, etc., desde que tomemos p em kg e A em metros quadrados.

Proporções: aula prática

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \quad , \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d} \quad , \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$$

1).- Exercícios didáticos: reconhecimento de proporcionalidade e projeção

Exercício -
Hoje José tem 10 anos de idade e sua irmã, Maria, tem 14. Quando José tiver 20 anos, qual será a idade de Maria?

Exercício -
José começou a trabalhar numa empresa. Seu salário de janeiro foi R$ 1937,50 e o de fevereiro foi R$ 1750,00. Pede-se:
a).- usando os dois primeiros meses, verificar que seu salário é proporcional ao número de dias do mês;
b).- calcular seu rendimento salarial no ano.
Resp.: R$ 22 812,5

Exercício -
Na construção de minha casa, fiz uma argamassa usando 2 sacos de cimento, 12 baldes de areia e 30 litros de água. Preciso fazer mais dessa argamassa, usando 6 sacos de cimento. Como?

Exercício -
Num mapa desenhado em escala 1:100 000, duas cidades distam 4,5 cm. Qual sua distância real?
Dica: escala 1:100 000 significa que cada 1 cm no mapa equivale a 100 000 cm no terreno.

Exercício -
O edifício XYZ tem 50 m de altura e foi desenhado no caderno de Maria, aí ficando como uma figura de 5 cm de altura. De que altura deverá ela desenhar um edifício de 70 m, de modo que haja proporcionalidade? Qual a escala usada nos desenhos de Maria?
Resp.: 1:1000

Exercício -
Levando em conta o que V. aprendeu com os dois exercícios anteriores, complete o enunciado das regras seguintes, relativas à relação entre as dimensões de um objeto real e um seu desenho feito em escala 1:n :
a).- "para calcular um comprimento no objeto real, devo _____________ o correspondente comprimento no desenho por n";
b).- "todo comprimento real fica ___________ n vezes no desenho".

Exercício -
Se de uma figura F passamos por semelhança de coeficiente de proporcionalidade m para uma figura F', mostre que toda área de F' vale m^2 *vezes a correspondente (ou homóloga) área de F, o todo volume de F' vale* m^3 *vezes o correspondente volume de F.*

Exercício -
Uma esponja seca em forma de paralelepípedo retângulo 10 x 5 x 2 cm foi molhada, de modo que todas suas dimensões lineares sofreram um aumento de 50%. Pede-se o volume da esponja molhada.
Resp.: 337,5 cm cúbicos.

Exercício -
Uma mesa retangular mede 1,34 m de comprimento por 0,82 de largura. Que dimensões terá uma mesa semelhante com área 3,5 vezes maior?
Resp.: 2,51 m por 1.53 m, aproximadamente.

2).- Exercícios didáticos: repartição ou modelagem proporcional

Exercício -
Dividir 18 684 em cinco parcelas, de modo que a segunda seja 1/3 da primeira; a terceira seja 1/4 da soma das duas primeiras; a quarta seja 2/5 da segunda, e a quinta 7/8 da primeira.
Dica: equivale a dividir 18 684 proporcionalmente a 120, 40, 40, 16 e 105, o que dá 6984,67 , 2 328,22 , idem, 931,29 e 6 111,59.

Exercício -
Três negociantes criaram uma sociedade por 5 anos. O primeiro entrou com R$ 1 500 e seis meses depois colocou mais R$ 3 000; o segundo iniciou com R$ 5 400, três meses depois acrescentou R$ 1 200, mas um ano após este segundo aporte de dinheiro retirou R$ 2 300; o terceiro iniciou com R$ 2 000, e mais R$ 500 no fim do quarto ano, porém cinco meses antes do findar da sociedade, retirou R$ 1 800. Sendo que no final dos cinco anos eles tinham R$ 21 177 para dividir, pergunta-se como fazer isso proporcionalmente?
Resp.:
equivale a dividir os 21 177 proporcionalmente aos números 216 000, 288 900 e 117 000, o que equivale a dividir proporcionalmente a 240, 321 e 130.

Exercício -
O testamento do Sr. José diz que seu filho A receberá herança de R$ 18 000, seu filho B receberá 22 100 e seu filho C herdará R$ 27 500. Contudo, aberto o testamento, o advogado constatou que José deixou apenas R$ 39 480 de herança. Como fazer a partilha proporcionalmente?
Resp.: 10 512, 12 906 e 16 060.

3).- Exercícios didáticos: escalas

Exercício -
Foi construído um modelo em escala reduzida 1:50 de um navio. Em laboratório mediu-se a área molhada do casco do modelo, obtendo-se 35 cm2, o que podemos projetar para a do navio?
Resp.:
pela semelhança das figuras, os coeficientes de proporcionalidade são iguais em $A \propto L^2$ e em $a \propto l^2$, de modo que $A/a = L^2/l^2$, mas L = 50 l, etc. de modo que A = 8,75 metros quadrados.

Exercício -
Duas caldeiras industriais semelhantes têm área de 80 e 93 m2, respectivamente. Sendo que a segunda tem capacidade de 3 400 m3, qual a capacidade da primeira?
Resp.: 2 712 m3.

4).- Exercícios didáticos: composição de proporções

Exercício -
Trabalhando algebricamente (ou seja, reescreva $y \propto x$ *como y = mx, por exemplo), mostre que:*
a).- se $z \propto y$ *e* $y \propto x$ *, então* $z \propto x$.
b).- se $y \propto x$ *e* $y' \propto x'$ *, então* $yy' \propto xx'$ *.*
c).- se $y \propto x$ *, então* $yz \propto xz$ *, para qualquer variável z.*
d).- se $z \propto xy$ *, então* $y \propto z/x$ *.*

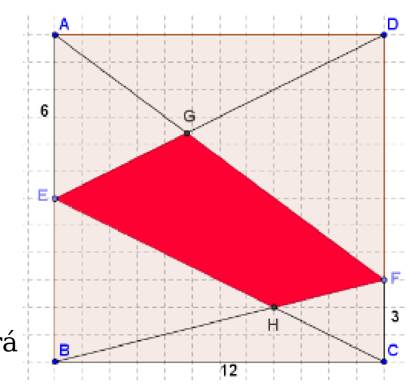
Exercício -
Trabalhando algebricamente, e sendo z = z(x,y), mostre que vale $z \propto xy$ *quando, e somente quando, fazendo y ficar constante, temos* $z \propto x$ *; e fazendo x ficar constante, temos* $z \propto y$ *.*
Dica:
considere as trincas z,x,y , z',x',y e z”,x',y' , as quais dão z/z' = x/x' e z'/z” = y/y' , e então multipli-que estas duas razões.

Exercício -
A Física nos mostra que a resistência R que a água oferece ao movimento de um navio é diretamente proporcional à área A de sua secção transversal, e proporcional ao quadrado de sua velocidade V. Em nossa notação: $R \propto A , V^2$ *. Assim sendo, pede-se relacionar a razão R/r entre as resistências oferecidas ao navio e modelo do exercício acima com a razão V/v de suas respectivas velocidades de movimento.*
Resp.: a razão das resistências é 50 vezes maior do que a razão das velocidades.

5).- Problemas olímpicos

Exercício -
Ao contrário da ideia popular, a ocorrência dos ciclo verão-inverno não é governada pela maior ou menor proximidade da Terra em relação ao Sol, mas pela inclinação do eixo de rotação da Terra em relação aos raios do Sol. Contudo, pode-se observar que o verão do hemisferio-sul (HS) é mais quente do que o verão do hemisferio-norte (HN). Para isso aponta-se duas causas:
- *no verão do HS, a Terra está 4% mais próxima do Sol do que na época do verão HN;*
- *o HS tem mais oceanos.*

Pede-se: levando em conta apenas a primeira dessas causas, calcular em % o quanto o verão do HS é mais quente do que o do HN.
(NOTA: por "mais quente" queremos dizer "recebe mais energia calorífica" .)
Resp.: 8,5%



Exercício – (nível II)
Na figura ao lado, ABCD é um quadrado de lado 12. O ponto E sobre AB e o ponto F sobre CD são tais que AE = 6 e CF = 3. São traçados os segmentos AF, FB, CE e ED que se cortam em G e H, conforme mostra a figura. Pede-se a área do quadrilátero EGFH.
Resp.:
inicie mostrando que o triângulo AGE é uma redução do triângulo FGD, com coeficiente de redução 6/9 = 2/3, o que nos permite relacionar suas áreas. A seguir, trabalhe com as áreas dos triângulos ADE e ADF, obtendo um sistema de equações que nos permitirá obter a área desejada = 33,6 .