Prova nível III da Olimpíada Regional de Matemática Grande PoA 2009.

• PROBLEMA 1.–

Achar todos os números primos que podem ser escritos como $n^3 - 1$, onde $n =$ inteiro $\geqslant 1$.

Resolução:
Questões sobre primalidade ficam melhor encaminhadas se envolverem produtos. No caso, basta usar a identidade clássica:

$$n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1),$$

a qual mostra que $n = 2$; logo, o único número que serve é 7.

• PROBLEMA 2.–

Chamaremos de *casa de Einstein* de um número irracional a primeira casa, depois da vírgula, de sua expansão decimal que é seguida por um bloco de três dígitos iguais. Assim sendo, pede-se:

a) Mostrar que, para cada n inteiro $\geqslant 1$, existe um número irracional cuja casa de Einstein é a n-ésima casa decimal.
b) Mostrar que existem números irracionais sem casa de Einstein.

Resolução:
Usaremos um número irracional de expansão decimal das mais simples:

$$x_0 = 0,101101110111110\ldots$$

a). Para se entender mais rapidamente a solução, tomemos um caso concreto: $n = 3$. Modifiquemos o irracional x_0 incluindo o bloco 222 a partir da quarta casa decimal:

$$x_a = 0,101222101110111110\ldots$$

É imediato que x_a é um irracional que tem casa de Einstein na 3-ésima cada decimal. Uma construção análoga para os demais valores de n.

b). Os únicos blocos repetivos de três dígitos de x_0 são os da forma 111. Assim, para resolver esse item, basta destruirmos esses blocos, substituindo-os por 112. O que dá:

$$x_b = 0,1011011201121011211011211201121121 0\ldots .$$

• PROBLEMA 3.–

Expresar o valor da soma abaixo sob a forma de uma fração irredutível:

$$S=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{31\cdot 34}\ .$$

Resolução:
O formato das parcelas sugere a possibilidade de trasnformarmos a soma dada em uma soma telescópica. Com efeito, a parcela genérica é:

$$\frac{1}{(1+3n)(4+3n)}=\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1+3n}-\frac{1}{4+3n}\Big).$$

De modo que:

$$3S=\Big(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\Big)+\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\Big)+\Big(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\Big)+\ldots+\Big(\frac{1}{31}-\frac{1}{34}\Big)=\frac{1}{1}-\frac{1}{34}=\frac{33}{34}.$$

Conclusão: $S=11/34$.

• PROBLEMA 4.–

Definamos a sequência de funções $f_0, f_1, f_2, ...$ do seguinte modo:

$$f_0(x)=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}},\quad (\forall x>1),\quad f_n(x)=f_0(f_{n-1}(x)),\quad (\forall n\geqslant 1,\ x>1\,)$$

Pede-se o valor numérico de $f_{2009}\,(1234)$.

Resolução:
O alto valor de 2009 e o bom senso sugerem que deve haver alguma repetição na expressão analítica dessas funções. Assim, desenvolvemos os primeiros casos:

$$\begin{aligned}
f_0(x)&=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}},\\
f_1(x)&=f_0(f_0(x))=\sqrt{1-\frac{1}{(f_0(x))^2}}=\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
f_2(x)&=f_0(f_1(x))=\sqrt{1-\frac{1}{(f_1(x))^2}}=\sqrt{1-(1-x^2)}=x\\
f_3(x)&=f_0(f_2(x))=f_0(x)
\end{aligned}$$

De modo que temos a repetição cíclica:

$$\begin{array}{ccc}
f_0 & f_1 & f_2\\
f_3 & f_4 & f_5\\
f_6 & f_7 & f_8\\
\multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots}
\end{array}$$

a qual mostra que, como $2009 = 3 \times 669 + 2$:

$$f_{2009}(1234) = f_2(1234) = 1234\,.$$

Observação:
a resolução acima não se preocupou com o domínio das f_n. Se levarmos em conta que f_0 foi definida apenas para $x > 1$, a mesma restrição terá de valer para as demais f_n. Ora, se interpretarmos o problema como formulado no contexto de funções de valores reais, isso faria com que $f_2(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ não tenha sentido, e a resolução do problema também poderia parar por aqui.

• PROBLEMA 5.–

Suponha que, para um certo número real r, ocorra que $r + \frac{1}{r}$ seja um número inteiro. Pede-se provar que isso implica que, para todos os n inteiros positivos, também seja inteiro o valor de:

$$r^n + \frac{1}{r^n}.$$

Resolução:
procuremos demonstrar por indução matemática. Para $n = 2$, o resultado é imediato de

$$r^2 + \frac{1}{r^2} = \left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - 2.$$

Para $n \geqslant 2$, temos:

$$r^{n+1} + \frac{1}{r^{n+1}} = \left(r^n + \frac{1}{r^n}\right)\left(r + \frac{1}{r}\right) - \left(r^{n-1} + \frac{1}{r^{n-1}}\right).$$

Dessa igualdade, vemos que o resultado é consequência do seguinte argumento de indução, onde por c_n indicaremos a afirmação "$(r^n + \frac{1}{r^n})$ é inteiro":

c_1 é dado
$c_1 \to c_2$
c_1 e $c_2 \to c_3$
c_1, c_2 e $c_3 \to c_4$
c_1, c_3 e $c_4 \to c_5$
c_1, c_4 e $c_5 \to c_6$
etc, etc.