OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA – GRANDE PORTO ALEGRE, 2009
NÍVEL 1

1. Tenho números naturais primos. Se eu somar 45 a cada um deles encontro números de dois algarismos. Se eu subtrair 32 de cada um deles também encontro números naturais de 2 algarismos. Quais são os números?

Resolução:
Os possíveis candidatos inicialmente são os primos entre 1 e 99.
Se eu somar 45 a cada um deles, encontro números de dois algarismos. Logo, o campo de reduz para 1 a 54.
Se eu subtrair 32, também encontro números naturais de dois algarismos. Logo, os números procurados restringem-se aos primos entre 42 e 54.
Então, os candidatos são: 43, 47 e 53.

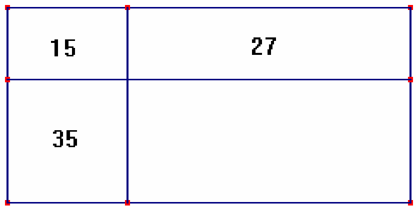
2. A soma de três números é 108, dois deles são primos e um é a soma dos outros dois.
(a) Qual é o valor do maior dos três números?
(b) Dê um exemplo desses três números.
(c) Quantas soluções existem para este problema?

Resolução:
a) O maior deles será 108/2 = 54.
b) e c) Os outros dois são primos que somam 54. Considerando as possibilidades de soma igual a 54, as que têm números primos em suas parcelas são: 7 + 47, 11 + 43, 13 + 41, 17 + 37, 23 + 31.

3. Numa escola, um quinto dos alunos joga somente vôlei, um quarto joga somente futebol, 225 praticam os dois esportes e 1/10 dos alunos nenhum esporte.
(a) Quantos alunos tem a escola?
(b) Quantos alunos jogam somente futebol?
(c) Quantos alunos jogam futebol?
Quantos alunos praticam um dos dois esportes?

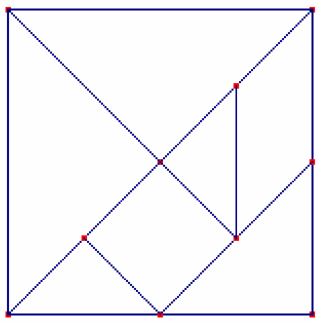
Resolução:
a) $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{11}{20}$ não praticam dois esportes. Logo, $\frac{9}{20}$ do total é igual a 225, que praticam os dois esportes. Então, a escola possui 500 alunos.
Como a escola possui 500 alunos, concluímos que:
b) 125 alunos jogam somente futebol.
c) 350 alunos jogam futebol
d) 450 alunos praticam algum esporte.

4. Um terreno retangular foi dividido em 4 terrenos também retangulares. As áreas de três deles estão dadas na figura em km². Qual é a área do terreno que foi dividido?



Resolução:
Utilizando a ideia de divisor comum, temos:
D(15) = {1, 3, 5, 15}
D(27) = {1, 3, 9, 27}
D(35) = {1, 5, 7, 35}
Então, o lado comum aos retângulos de área 15 km² e 27 km² mede 3 km. Logo, os outros dois lados são 5 km e 9 km, respectivamente. Considerando-se os retângulos de área 15 km² e 35 km², temos que o lado comum mede 5 km, então os outros medem 3 km e 7 km, respectivamente.
Consequentemente, o quarto retângulo tem dimensões 9 km e 7 km, caracterizando uma área de 63 km².
Assim, o terreno todo tem área 15 + 27 + 35 + 63 = 140 km².

5. As peças de um jogo chamado Tangram são construídas cortando-se um quadrado em sete partes, como mostra o desenho: dois triângulos retângulos grandes, um triângulo retângulo médio, dois triângulos retângulos pequenos, um quadrado e um paralelogramo. Se a área do quadrado grande é 25 unidades de área, determine a área de cada uma das figuras que formam o Tangram.



Resolução:
Os lados do quadrado maior medem 5 u. a.
Por construção, as áreas dos dois triângulos grandes correspondem à metade da área do quadrado grande. Assim, cada triângulo tem $\frac{25}{4}$ u. a. (6,25)

O triângulo médio, que é retângulo e isósceles, tem os lados iguais valendo $\frac{5}{2}$. Logo, como são perpendiculares entre si, a área desse triângulo é $\frac{5}{2}$ x $\frac{5}{2}$ x $\frac{1}{2}$ = $\frac{25}{8}$ u. a. (3, 125)

A área do paralelogramo, por construção tem base $\frac{5}{2}$ e altura $\frac{1}{4}$ do lado do quadrado maior. Assim, sua área mede $\frac{5}{2}$ x $\frac{5}{4} = \frac{25}{8}$ u. a. (3,125)

Por construção, temos que a área dos dois triângulos pequenos somados corresponde à área do quadrado pequeno. Logo, se subtrairmos da área total as áreas já encontradas, obtém-se o dobro da área do quadrado pequeno e o quádruplo da área de um dos triângulos pequenos.

Isto é, $25 - \frac{25}{4} - \frac{25}{4} - \frac{25}{8} - \frac{25}{8} = \frac{25}{4}$ u. a. (6,25)

Logo, o quadrado menor tem área $\frac{25}{8}$ u. a. (3,125). E os triângulos pequenos têm área $\frac{25}{16}$ u. a. (1,5625) cada um.