Prova nível III da Olimpíada Regional PoA 2004.

• QUESTÃO 1.–

Considere o número 0.112358314... onde cada dígito, a partir do terceiro, é obtido somando os dois dígitos anteriores e ficando-se apenas com o dígito das unidades, desprezando o das dezenas. Esse número é racional ou irracional? Justifique.

Solução:

Pode-se verificar que o número dado é racional meramente produzindo mais alguns de seus dígitos, através da lei de formação dada, e verificando-se que a partir de uma certa casa decimal temos um bloco de dígitos que repete-se indefinidamente. Contudo, vejamos uma maneira mais elegante e matemática de chegar à mesma conclusão.

Para isso, observemos que se algum *par de dígitos consecutivos* (pdc), como o 35, ocorrer uma segunda vez, teremos um bloco de dígitos consecutivos 3583145... que terminará num novo pdc 35, e esse bloco 3563145...35 continuaria repetindo-se indefinidamente, o que caracterizaria a racionalidade do número dado.

Bem, embora não possamos garantir que o pdc 35 se repita, como a quantidade de pdc é finita (com efeito, com os dez dígitos (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) podemos formar apenas 100 pdc), é impossível preencher as infinitas casas decimais do número dado sem que haja a repetição de ao menos um pdc, o que implica na racionalidade do número dado. Pode-se dizer que a obrigatoriedade dessa repetição é a mesma que ocorreria ao distribuirmos infinitos pombos em 100 ninhos: fatalmente teríamos no mínimo um ninho ocupado por dois ou mais pombos (Princípio do Pombal).

• QUESTÃO 2.–

Cada funcionário de certa empresa entrou com R$ 12 000 num plano de investimento que envolvia duas etapas e cujas regras eram aplicadas a cada investidor individualmente:

a) etapa I:
terá um dos seguintes resultados, os quais tem probabilidade distinta de ocorrer:
- ou o investidor lucra 1/2 do que investiu
- ou o investidor perde 1/3 do que investiu

b) etapa II:
a quantia que, ao final da etapa I, tocou a cada investidor foi toda investida novamente num outro investimento que tem duas possibilidades eqüiprováveis de ocorrência:
- ou o investidor ganha 1/4 do que investiu nesta etapa
- ou o investidor perde 1/2 do que investiu nesta etapa

Ao final de um ano, terminadas as duas etapas, se constatou que 70% dos investidores perderam dinheiro. Pergunta-se:
qual o valor numérico da probabilidade de ocorrência de cada alternativa da etapa I?

Solução:

Havendo apenas dois eventos na primeira etapa, indiquemos por p a probabilidade de ocorrência do primeiro deles e, conseqüentemente, por $1-p$ a probabilidade do segundo. Assim, no final da primeira etapa temos uma probabilidade p de ter acumulado $(1+1/2)*12\,000 = 18\,000$ reais e uma probabilidade $1-p$ de termos ficado com $(1-1/3)*12\,000 = 8\,000$ reais.

Isso produz duas possibilidades de capital acumulado no final da **segunda** etapa:

a) Se no final da primeira etapa tínhamos ficado com 18 000 reais, teremos uma probabilidade de $0.5*p$ de terminar a segunda etapa com $(1+1/4)*18\,000 = 22\,500$ reais e uma probabilidade de $0.5(1-p)$ de terminarmos essa segunda etapa com $(1-0.5)*18\,000 = 9\,000$ reais.

b) Por outro lado, se tínhamos terminado a primeira etapa com 8 000 reais, teremos uma probabilidade de $0.5p$ de terminar a segunda etapa com $(1+1/4)*8\,000 = 10\,000$ reais e uma probabilidade de $0.5*(1-p)$ de terminar essa etapa com $(1-0.5)*8\,000 = 4\,000$ reais.

Examinando as quatro possibilidades de resultado final, é imediato vermos que se perde dinheiro em três delas: $9\,000, 10\,000, 4\,000$, e que a probabilidade de ocorrer essa perda é $0.5(1-p)+0.5p+0.5(1-p) = 1-0.5p$. Ora, como foi informado que 70% dos investidores perderam dinheiro, segue que temos $1-0.5p = 0.7$, de modo que $p = 0.3/0.5 = 0.6$. Ou seja: $p = 60\%$.

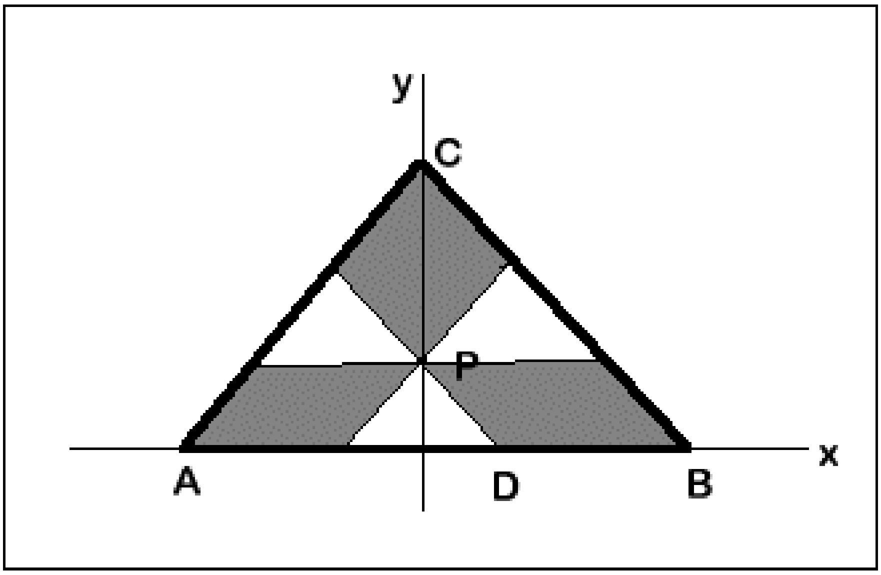
• QUESTÃO 3.–

Consideremos um triângulo isósceles ABC cuja base AB mede 4 metros e a altura do ponto C em relação à essa base é de 3 metros. Na bissetriz do ângulo de vértice C, consideremos um ponto móvel P.

Para cada posição de P, traçamos por P três retas, cada uma delas paralela a um dos lados do triângulo. Com esse traçado, dividimos o triângulo em seis regiões: três pequenos triângulos e três quadriláteros, cada um dos quais tem um dos vértices do triângulo. Chamemos de $\mathcal{R}$ a região formada pelos três tais quadriláteros. Pede-se achar a posição de P que produz um valor máximo para a área de $\mathcal{R}$.

Solução:

Esse problema ficará mais fácil de ser resolvido se usarmos Geometria Analítica. Para isso, tracemos um sistema de eixos cartesianos cujo eixo de abscissas contém a base AB do triângulo e cujo eixo de ordenadas passa pelo vértice C, conforme mostra a figura anexa. É imediato verificarmos que A=(-2,0), B=(2,0) e C=(0,3). O ponto móvel de que fala o enunciado terá coordenadas P=(0,h), onde h é sua altura em relação à base AB.



Nosso problema equivale a achar o valor de h que produz a área máxima para a região $\mathcal{R}$.

Como a reta que contém BC tem como equação $x/2 + y/3 = 1$, ou seja: $y = -\frac{3}{2}x + 3$, segue-se que a sua paralela que passa pelo ponto móvel P tem por equação $y = -\frac{3}{2}x + h$. Como conseqüência, essa paralela corta o eixo das abscissas num ponto D de coordenadas D=($\frac{2h}{3}$,0), o que implica que BD=2-$\frac{2h}{3} = \frac{6-2h}{3}$.

Os dois paralelogramos apoiados na base AB são obviamente congruentes e então eles tem a mesma área = OP.BD=$h \cdot \frac{6-2h}{3} = \frac{6h-2h^2}{3}$.

Resta achar a área do terceiro pedaço tracejado. Ele é um losângulo e então sua área vale:

$$\frac{EF \cdot PC}{2} = \frac{2(\frac{3-h}{3}) \cdot (3-h)}{2} = \frac{(3-h)^2}{3}.$$

A área da região $\mathcal{R}$ sendo a soma da área de cada um dos três pedaços tracejados, temos que essa área total, α, vale:

$$\alpha = 2\frac{6h - 2h^2}{3} + \frac{(3-h)^2}{3} = -h^2 + 2h + 3.$$

Nosso objetivo é descobrir para qual valor de h temos o valor máximo para α. Podemos descobrir isso facilmente observando que

$$\alpha = -h^2 + 2h + 3 = -(h-1)^2 + 4.$$

Conseqüentemente, o valor máximo de α ocorre quando h=1 e ele vale $\alpha = 4$. Ou seja: o valor máximo da área da região tracejada $\mathcal{R}$ ocorre quando o ponto P está à uma altura h=1 da base AB.

• QUESTÃO 4.–

Pede-se mostrar que a desigualdade

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{1+2n}}$$

é valida para todos os inteiros positivos n.

Solução:

Para mostrarmos a veracidade das infinitas desigualdades dadas:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} < \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6} < \frac{1}{\sqrt{7}}, \quad \text{etc}$$

usaremos o processo da indução matemática.

Assim proseguindo, iniciamos observando que a primeira desigualdade (ou caso n=1) é obviamente verdadeira, na medida que ela equivale a afirmar que $\sqrt{3} < 2$. Resta-nos, então, mostrar que se for verdadeiro o caso $n = k \geq 1$ da desiguladade então também terá de ser verdadeiro o caso $n = k+1$.

Ora, valendo

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{1+2k}}$$

podemos escrever

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{1+2k}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}$$

de modo que para provar a veracidade do caso $n = k+1$ basta mostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{1+2k}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{1+2k+2}}.$$

Isso equivale a provar:

$$\sqrt{3+2k}\cdot(2k+1) < (2k+2)\cdot\sqrt{1+2k}.$$

Elevando ao quadrado, basta verificarmos se vale:

$$(3+2k)(4k^2+4k+1) < (4k^2+8k+4)(1+2k).$$

Ora, a prova dessa última desiguladade é imediata, basta efetuarmos os produtos envolvidos:

$$12k^2 + 12k + 3 + 8k^3 + 8k^2 + 2k < 4k^2 + 8k + 4 + 8k^3 + 16k^2 + 8k$$

e então simplificar, obtendo

$$14k + 3 < 16k + 4$$

ou

$$0 < 2k + 1$$

relação que é, evidentemente, verdadeira.

• QUESTÃO 5.–

Consideremos a seguinte família infinita de matrizes quadradas:

$$\boxed{2}\,,\ \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}}\,,\ \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}}\,,\ \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}}\,,\ \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}}\,, \cdots$$

Pede-se calcular o valor numérico do determinante da matriz $n \times n$ desta família.

Solução:

Como é muito simples o padrão dessas matrizes, é fácil ver que o determinante de cada uma (ao menos para as de ordem maior) se reduz ao cálculo do determinante das de ordem imediatamente menor. Para vermos mais claramente isso, sem nos envolver com notações complicadas, examinemos o caso concreto da matriz 4x4. Desenvolvendo-a pela primeira coluna, obtemos:

$$\det \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}} = 2 \cdot \det \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}} - 1 \cdot \det \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}} = 2 \cdot \det \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}} - 1 \cdot \det \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}}$$

Se denotarmos por δ_n o determinante da matriz n x n dessa família, acabamos de mostrar que $\delta_4 = 2 \cdot \delta_3 - \delta_2$. De um modo semelhante, o leitor não terá a menor dificuldade em verificar que $\delta_n = 2 \cdot \delta_{n-1} - \delta_{n-2}$ vale para todos os $n \geq 3$.

Por cálculo direto, é imediato vermos que $\delta_1 = 2, \delta_2 = 3$ e usando a recursão descoberta acima, podemos continuar: $\delta_3 = 2 \cdot 3 - 2 = 4, \delta_4 = 2 \cdot 4 - 3 = 5$ etc. Disso, podemos conjecturar que

$$\delta_n = n + 1.$$

Para provarmos rigorosamente esta conjectura, basta usar um raciocínio de indução matemática completa para os $n \geq 2$:

Já vimos a validade da fórmula para os casos $n = 1, 2$. Supondo que a mesma valha para $n = 1, 2, \ldots, k$, onde $k \geq 2$, provemos que ela vale para $n = k + 1$. Para provar isso, basta observar que $\delta_{k+1} = 2\delta_k - \delta_{k-1} = 2(k + 1) - (k) = k + 2 = (k + 1) + 1$.