Resolução da 2ª Fase da ORM - Grande Porto Alegre, 2004

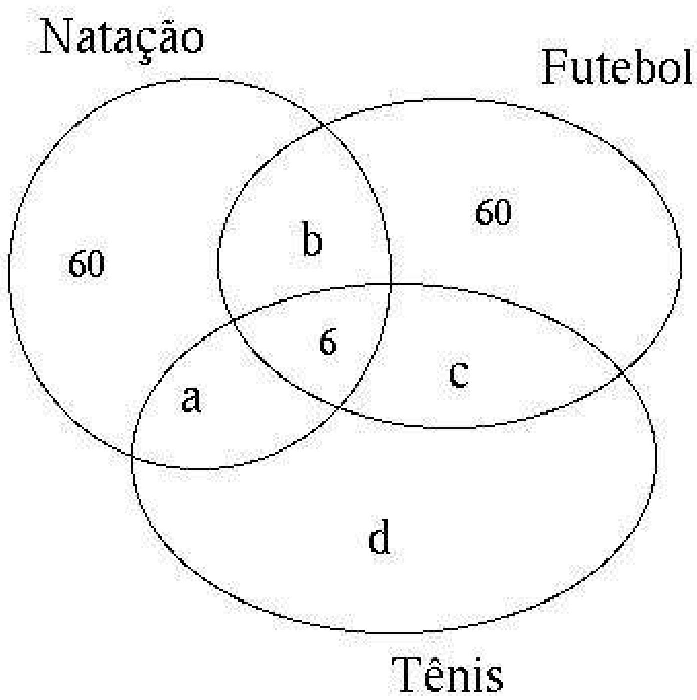
13 de janeiro de 2005

Nível 2

Questão 1

- O primeiro pagador de promessa (A) já percorreu nos dois primeiros dias: $\frac{1}{6}+\frac{3}{7}=\frac{7+18}{42}=\frac{25}{42}$. Falta percorrer no último dia: $\frac{42}{42}-\frac{25}{42}=\frac{17}{42}$.
- O segundo pagador de promessa (B) já percorreu nos dois primeiros dias: $\frac{1}{3}+\frac{5}{14}=\frac{14+15}{42}=\frac{29}{42}$. Falta percorrer no último dia: $\frac{42}{42}-\frac{29}{42}=\frac{13}{42}$.
- O terceiro pagador de promessa (C) já ficou entre os dois primeiros pagadores, isto quer dizer que, ele estará entre $\frac{25}{42}$ e $\frac{29}{42}$. Então a fração já percorrida por ele é de $\frac{27}{42}$. Falta percorrer no último dia: $\frac{42}{42}-\frac{27}{42}=\frac{15}{42}$.
- Logo, a ordem da chegada dos pagadores foi: B, C e A.

Questão 2



- Como 100 não jogam futebol, $a+d+60=100$, $d=40-a$. Como o total é 200, 100 jogam futebol. $b+c=100-66=34$. Metade dos que jogam tênis, também faz natação: $6+a=c+d$, $c=a+6-d=2\,a-34$. A natação vão o dobro dos que vão ao tênis: $60+b+(6+a)=4(6+a)$, $b=3\,a-42$.
- Então, $34=b+c=3\,a-42+2\,a-34$, $5\,a=110$, $a=22$. Daí, $b=24$, $c=10$ e $d=18$.
- As respostas são:

1. $66+a+b+c+d=140$.
2. $6+a=28$.
3. $6+a+c+d=56$; $66+a+b=112$; $66+b+c=100$.
4. $b=24$.

Questão 3

- Tanto $P\hat{T}S$ quanto $S\hat{R}Q$ são ângulos inscritos na circunferência de modo que, pelo teorema do ângulo inscrito, temos $x = \frac{1}{2}\,arco(SRP)$ e $y = \frac{1}{2}\,arco(QPS)$. Como $arco(SRP) = arco(SRQ) + 70°$, segue que:

$$x + y = \frac{1}{2}\,arco(SRP) + \frac{1}{2}\,arco(QPS)$$

$$= \frac{1}{2}\left[arco(SRQ) + 70°\right] + \frac{1}{2}\,arco(QPS)$$

$$= 35° + \frac{1}{2}\left[arco(SRQ) + arco(QPS)\right]$$

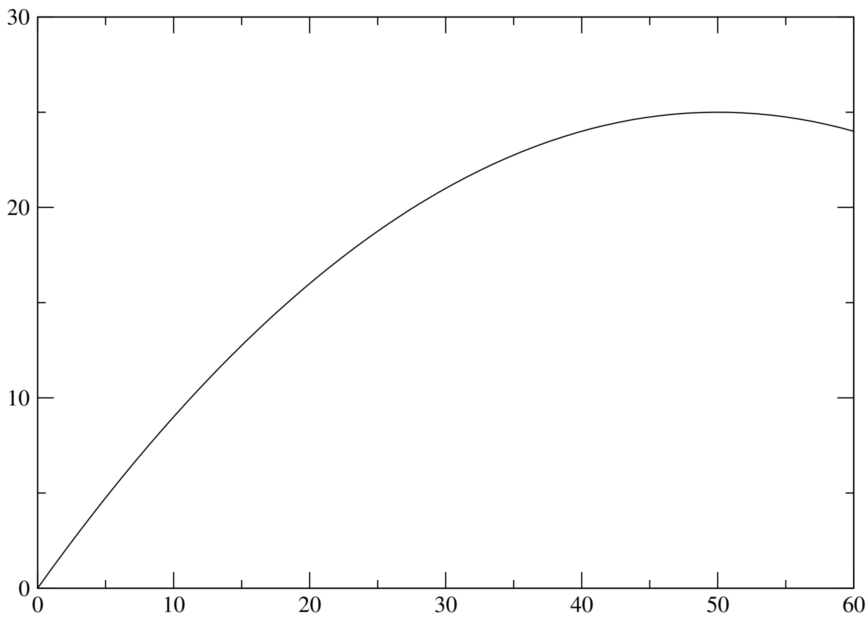
$$x + y = 35° + \frac{1}{2}\,360° = 35° + 180° = 215°$$

Questão 4

- Observe que no número $x = 0,112358314\ldots$, cada par ordenado de algarismos consecutivos (a, b) gera o próximo algarismo do número. Logo, se algum par de algarismos, que já apareceu na formação do número x, repertir-se em algum ponto na mesma ordem, a seqüência de algarismos começará a repertir-se a partir dele e asim terimos uma dízima periódica. Por exemplo, se em algum ponto do número $x$ocorrer novamente o par $(3, 5)$, nessa ordem, os algarismos seguintes serão $83145\ldots$ e a seqüência de algarismos se repetirá até surgir outro par $(3, 5)$. Mas com dez algarismos $0, 1, \ldots, 9$ podemos formar apenas um número finito de pares ordenado $(100\,pares\,:\;de\,(0,0)\,a\,(9,9)\,)$. Assim, algum par ordenado necessariamente se repetirá entre os 101 primeiros algarismos do número x e iniciará um novo período de uma dízima periódica. Portanto x é racional.

Questão 5

- Suponha que cada doce custe 1 . Assim, x doces custarão $x\,.\,1$ sem desconto, e custarão, com o desconto, $P = \left(1 - \frac{x}{100}\right)\,.\,x$ ou seja$P = -\frac{x^2}{100} + x$.
- O gráfico de P em função de x é:



- Notemos que quem compra entre 40 e 60 doces poderia comprar mais doces com a mesma quantia. No nosso caso, Daniel poderia ter comprado 55 doces, já que $-\frac{45^2}{100} + 45 = -\frac{55^2}{100} + 55 = 24,75$.