Olimpíada Regional de Matemática—2002

Região da Grande Porto Alegre

Segunda Fase — Nível 2

Problema 1

Determine todos os números inteiros positivos que possuem **três** algarismos *não nulos* e *distintos* e que satisfazem a seguinte propriedade:

- a soma de todos os números de dois dígitos que podem ser formados a partir de seus algarismos resulta no próprio número.

Obs. A soma dos números de dois dígitos a partir de 486, por exemplo, é igual a $48 + 46 + 84 + 86 + 64 + 68 = 396$.

Problema 2

Sejam r e s duas retas perpendiculares entre si que se cruzam no centro O de uma circunferência de raio 1. Considere A um ponto da reta r, externo à circunferência, e M o ponto médio do segmento $\overline{AO}$. Escolhe-se um ponto N da circunferência tal que $MO = MN$. A reta que passa por A e N corta s em B.

Mostre que $AN \times BN = 1$.

Problema 3

O campenato mundial de Fórmula 1 do planeta Vênus é disputado por 16 pilotos, em 8 corridas. A pontuação final de cada corrida é distribuída da seguinte maneira:

Colocação	Número de pontos atribuídos
1°	10
2°	6
3°	4
4°	3
5°	2
6°	1
$7^\circ, 8^\circ, 9^\circ, \ldots, 16^\circ$	0

A classificação final de cada piloto é feita com base nos pontos que este acumulou durante o campeonato.

a. Qual a pontuação mínima que um piloto deve obter, na classificação final, para ser o campeão isolado no campeonato?

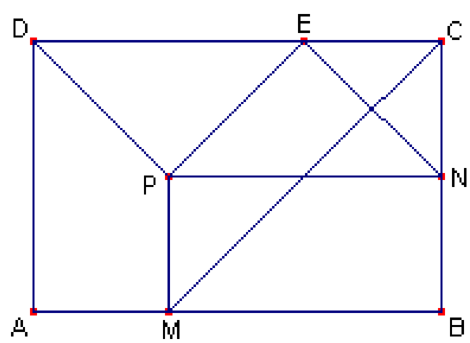
Ontem, 29/11/2002, terminou a temporada 2002 do campeonato Venusiano de Fórmula 1. Na classificação final, os **dez** primeiros colocados obtiveram pontuações distintas (não há necessidade de que apenas **um** piloto tenha obtido a **décima** colocação).

b. Qual a pontuação máxima que o **sexto** colocado deste ano pode ter obtido?

c. Qual a pontuação mínima que o **terceiro** colocado deste ano pode ter obtido?

Problema 4

Sejam $ABCD$ um retângulo (com os pontos marcados no sentido anti-horário) e P um ponto em seu interior. Os pontos M e N estão sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ respectivamente, de forma que $MBNP$ é um retângulo. Suponha que existe um ponto E sobre $\overline{CD}$ tal que $\overline{EN}$ é paralelo a $\overline{DP}$, $\overline{EP}$ é paralelo a $\overline{CM}$ e $DE = 2 \times CE$.



Prove que os pontos A, P e E estão alinhados.

Problema 5

Existe algum número natural n de **quatro** algarismos distintos A, B, C e D (nesta ordem) tal que A divide CD, B divide DA, C divide AB e D divide BC?

Obs. "A divide CD" não significa que A é um divisor de $C \times D$, mas sim do número de dois dígitos cujo algarismo das dezenas é C e o das unidades é D.