

Uma função diferenciável com derivadas mistas de segunda ordem distintas

Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Mostraremos que esta função apresenta derivadas mistas na origem distintas.

Para tal, começamos calculando as derivadas primeiras na origem a partir da definição de derivada parcial.

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

e

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0$$

Para pontos $(x, y) \neq (0, 0)$, a função é regular e podemos aplicar as regras usuais de diferenciação do cálculo:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3 y - x y^3)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{(3x^4 y - x^2 y^3) + (3x^2 y^3 - y^5) - (2x^4 y - 2x^2 y^3)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Analogamente

$$f_y(x, y) = \frac{-y^4 x - 4y^2 x^3 + x^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

Podemos calcular, agora, as derivadas mistas na origem:

$$\begin{aligned} f_{xy}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1 \\ f_{yx}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - 0}{h} = -1 \end{aligned}$$