

1	2	3	4	Total

Nome: _____ Cartão: _____

Regras a observar:

- Seja sucinto porém completo.
- Justifique todo procedimento usado.
- Use notação matemática consistente.
- Ao usar sistemas de coordenadas curvilíneas (cilíndricas, esféricas etc), indique a correspondência para o sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z).
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Não é permitido destacar folhas nem usar folhas adicionais.
- Não é permitido o uso de calculadoras.

Formulário:

1. $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

2. $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

3. $\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$

4. $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

5. $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$

6. $\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$

7. $(a + b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$

• **Questão 1** (2.0 pontos): Um peixe se desloca dentro de um tanque. Sua posição no instante t é dada pelo vetor $\vec{r}(t)$. A temperatura dentro do tanque é descrita pelo campo escalar $T(x, y, z)$.

• **Item a** (1.0) Use a regra da cadeia para mostrar que a derivada no tempo da temperatura experimentada pelo peixe é dada por

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade do peixe no instante t .

• **Item b** (1.0) Sabendo que $T(x, y, z) = 300 + 20x \cos(y)$ e que $\vec{r}(t) = \cos(\pi t)\vec{i} + \sin(5\pi t)\vec{k}$, use a fórmula do item a para obter a taxa de variação no tempo da temperatura experimentada pelo peixe no instante $t = 1/2$.

- **Questão 2** (2.5 pontos) Considere a parábola

$$z = ax^2.$$

Encontre uma expressão para a **curvatura** e a **torção** desta curva em função de x e a . Considere $a = 2$ e esboce em um único gráfico a parábola e o círculo de curvatura no vértice.

- **Questão 3** (2.5 pontos): Considere o campo dado por:

$$\vec{F} = (x^2 + e^z y^2) \vec{i}$$

e os seguintes caminhos:

C_1 : a reta que liga o ponto (2,0,0) até o ponto (-2,0,0).

C_2 : $x = 2 \sin(t)$, $y = 2 \cos(t)$, $z = 0$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

C_3 : o caminho fechado formado pela concatenação de C_1 e C_2 .

Faça o que se pede:

- **Item a** (1.0) Calcule $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ usando uma parametrização direta.
- **Item b** (1.5) Calcule $\oint_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ usando o Teorema de Stokes.

- **Questão 4** (3.0 pontos): Calcule o fluxo para fora do campo

$$\vec{F} = z\vec{k}$$

através da superfície que envolve a região limitada superiormente pelo cone

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - z$$

e inferiormente pelo plano $z = 0$.

- **Item a** (1.5) usando o Teorema da Divergência;
- **Item b** (1.5) através de um integral sobre a superfície sem usar o Teorema da Divergência.