UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma D - 2012/2
Primeira avaliação - Grupo 1

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras a observar:

- Seja sucinto porém completo.
- Justifique todo procedimento usado.
- Use notação matemática consistente.
- Ao usar sistemas de coordenadas curvilíneas (cilíndricas, esféricas etc), indique a correspondência para o sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z).
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Não é permitido destacar folhas nem usar folhas adicionais.
- Não é permitido o uso de calculadoras.

Formulário:

1. $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
2. $\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$
3. $\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$
4. $\operatorname{sen}(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$
5. $\cos(2t) = \cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)$
6. $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen}(t)\cos(t)$
7. $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{n} a^{n-j} b^j$, $\binom{j}{n} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$

• **Questão 1** (3.0 pontos): Calcule o fluxo para fora do campo

$$\vec{F} = z\vec{k}$$

através da superfície que envolve a região limitada superiormente pelo cone

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 - z$$

e inferiormente pelo plano $z = 0$.

- **Item a** (1.5) usando o Teorema da Divergência;
- **Item b** (1.5) através da um integral sobre a superfície sem usar o Teorema da Divergência.

• **Questão 2** (2.0 pontos): A posição no instante t de uma abelha que se desloca em uma sala é dada pelo vetor $\vec{r}(t)$. A temperatura dentro da sala é descrita pelo campo escalar $T(x, y, z)$.

• **Item a** (1.0) Use a regra da cadeia para mostrar que a derivada no tempo da temperatura experimentada pela abelha é dada por

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade da abelha no instante t.

• **Item b** (1.0) Sabendo que $T(x, y, z) = 300 + 30x\cos(y)$ e que $\vec{r}(t) = \cos(\pi t)\vec{i} + \text{sen}(2\pi t)\vec{k}$, use a fórmula do item a para obter a taxa de variação no tempo da temperatura experimentada pela abelha no instante $t = 1/2$.

• **Questão 3** (2.5 pontos) Considere a parábola

$$z = ax^2.$$

Encontre uma expressão para a **curvatura** e a **torção** desta curva em função de x e a. Considere $a = 1$ e esboce em um único gráfico a parábola e o círculo de curvatura no vértice.

- **Questão 4** (2.5 pontos): Considere o campo dado por:

$$\vec{F} = (e^z y^2 + x)\vec{i}$$

e os seguintes caminhos:

C_1 : a reta que liga o ponto (2,0,0) até o ponto (-2,0,0).
$C_2 : x = 2\,\text{sen}(t), \quad y = 2\cos(t), \quad z = 0, \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2.$
C_3 : o caminho fechado formado pela concatenação de C_1 e C_2.
Faça o que se pede:

- **Item a** (1.5) Calcule $\oint_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ usando o Teorema de Stokes.
- **Item b** (1.0) Calcule $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ usando uma parametrização direta.