1	2	3	Total

UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2022/2
Prova da área I

Nome: ______________________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas (dissertativas)

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla} f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\times\vec{r}'(t)}{\lVert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\times\vec{r}'(t)\rVert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{\lVert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\rVert}$
Curvatura	$\kappa = \left\lVert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \frac{\lVert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\rVert}{\lVert\vec{r}'(t)\rVert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{\left(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right)\cdot\vec{r}'''(t)}{\lVert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\rVert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\lVert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\lVert\vec{a}\times\vec{v}\rVert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

- **Questão 1** (0.9 ponto cada item) Considerando a trajetória parametrizada pela seguinte função:

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + (1-t^2)\vec{k}, \quad t \geq 0,$$

está correto:

(A) tangente unitário $\vec{T}(t) =$:

( ) $\vec{i} + 2t\vec{j} - 2t\vec{k}$

( ) $\dfrac{\vec{i} + 2t\vec{j} - 2t\vec{k}}{\sqrt{8t^2+1}}$

( ) $\dfrac{\vec{i} + 2t\vec{j} + 2t\vec{k}}{\sqrt{8t^2+1}}$

( ) $\vec{i} + 2t\vec{j} + 2t\vec{k}$

( ) nenhuma das anteriores

(B) aceleração $\vec{a}(t) = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} =$:

( ) $\dfrac{\vec{i} + 2t\vec{j} - 2t\vec{k}}{\sqrt{8t^2+1}}$

( ) $\dfrac{\vec{i} + 2t\vec{j} + 2t\vec{k}}{\sqrt{8t^2+1}}$

( ) $2\vec{i} - 2\vec{k}$

( ) $2\vec{i} + 2\vec{k}$

( ) nenhuma das anteriores

(C) vetor normal unitário $\vec{N}(t)$ em $t = 1$:

( ) $\dfrac{-4\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{3\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{-4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{3\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{-4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{3\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{3\sqrt{2}}$

( ) nenhuma das anteriores

(D) vetor binormal $\vec{B}(t)$ em $t = 1$:

( ) $\dfrac{-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{3}}$

( ) $\dfrac{\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{\vec{i} - \vec{k}}{\sqrt{2}}$

( ) nenhuma das anteriores

(E) curvatura em $t = 1$:

( ) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

( ) $\dfrac{2\sqrt{2}}{27}$

( ) $\dfrac{27}{2\sqrt{2}}$

( ) $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

( ) nenhuma das anteriores

(F) aceleração normal em $t = 1$:

( ) $\dfrac{2\sqrt{2}}{27}$

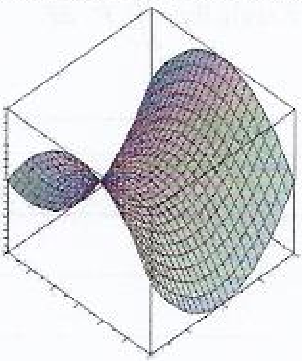
( ) 0

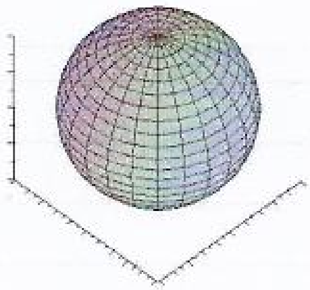
( ) $\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$

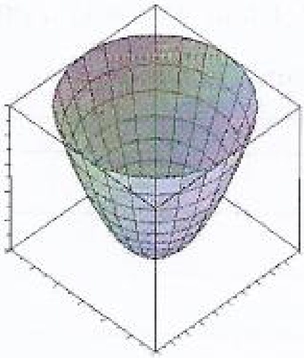
( ) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

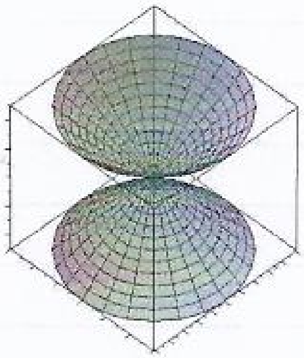
( ) nenhuma das anteriores

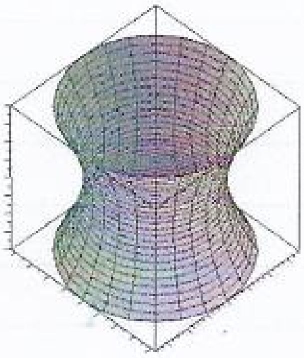
• **Questão 2** Considere a superfície parametrizada $\vec{r} = 4v\cos(u)\vec{i} + 3v\,\mathrm{sen}(u)\vec{j} + v^2\vec{k}$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 1$
(A)(0.6pt) marque a alternativa que melhor a representa:


( )


( )


( )


( )


( )

( ) nenhuma das anteriores

(B) (1.0pt) Obtenha o vetor normal unitário $\vec{N}$ e equação cartesiana do plano tangente à superfície em $(u, v) = \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$

• **Questão 3.** Considere o campo vetorial dado por $\vec{F} = (2x + z)\vec{i} + 2y\vec{j} + xy\vec{k}$.

(A) (1.0pt) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é a curva definida por $\vec{r} = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k}$, $0 \leq t \leq \pi$.

(B) (1.0pt) Calcule o fluxo $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$, onde S é a superfície lateral do cubo unitário de faces $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ e $\vec{N}$ é o normal unitário voltado para o exterior.

(C) (1.0pt) Seja S_1 a superfície determinada pela face $y = 0$ do cubo unitário de faces $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$. Seja C a curva segmentada, no bordo de S_1, que une os pontos $P_1(0,0,0)$, $P_2(1,0,0)$, $P_3(1,0,1)$, $P_4(0,0,1)$ e de volta a P_1, nesta ordem. Calcule o trabalho $\iint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Bom Trabalho.