

1 - 5	6	7	Total

Nome: _____ Cartão: _____

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente!

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1. Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\}$
2. Transformada da derivada	Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw\mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(t)\}$
3. Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at} f(t)\} = F(w + ia)$
4. Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-iaw} F(w)$
5. Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6. Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t) \cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2} F(w - w_0) + \frac{1}{2} F(w + w_0)$
7. Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi \mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8. Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9. Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10. Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{F(t)\}$
11. Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{ a } F\left(\frac{w}{a}\right)$, $a \neq 0$
12. Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) ^2 dw$
13. Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) ^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n ^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)]$ <p>onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$</p> $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt,$ $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(w_n t) dt,$ $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(w_n t) dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t},$ <p>onde $C_n = \frac{a_n - i b_n}{2}$</p>
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A(w) \cos(wt) + B(w) \sin(wt)) dw$, para $f(t)$ real, <p>onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt$</p>	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{i w t} dw,$ <p>onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i w t} dt$</p>

Tabela de integrais definidas:

1. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{m}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ma} \quad (a \geq 0, m > 0)$
5. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \cos(nx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n < m \\ \frac{\pi}{4}, & n = m, \\ 0, & n > m \end{cases} \quad \begin{matrix} (m > 0, \\ n > 0) \end{matrix}$	6. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m < 0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \quad (r > 0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos(mx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$
9. $\int_0^\infty x e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2am}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) \cos(nx) dx = \frac{m(a^2 + m^2 - n^2)}{(a^2 + (m - n)^2)(a^2 + (m + n)^2)} \quad (a > 0)$
11. $\int_0^\infty x e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a^2 - m^2}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4 + 4a^4} dx = \frac{\pi}{8a^3} e^{-ma} (\sin(ma) + \cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(mx)}{x^2} dx = m \frac{\pi}{2}$	14. $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(ax) \sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0 < m < 2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0 < 2a = m) \\ 0, & (0 < 2a < m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \sin(nx)}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0 < m \leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0 < n \leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2m(3a^2 - m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$	18. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{2a(a^2 - 3m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3} (1 + ma) e^{-ma} \quad \begin{matrix} (a > 0, \\ m \geq 0) \end{matrix}$	20. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi m}{4a} e^{-ma} \quad (a > 0, m > 0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a} (1 - ma) e^{-ma} \quad \begin{matrix} (a > 0, \\ m \geq 0) \end{matrix}$	22. $\int_0^\infty x e^{-a^2 x^2} \sin(mx) dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$

Frequências das notas musicais em Hertz:

Nota \ Escala	1	2	3	4	5	6
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó #	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré #	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá #	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol #	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá #	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

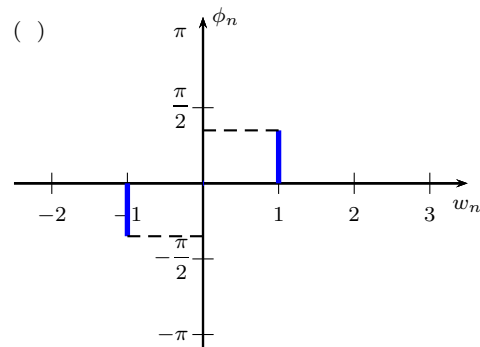
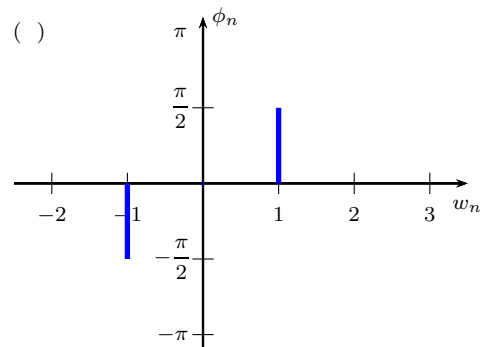
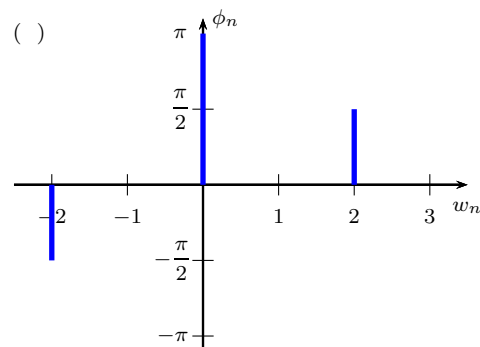
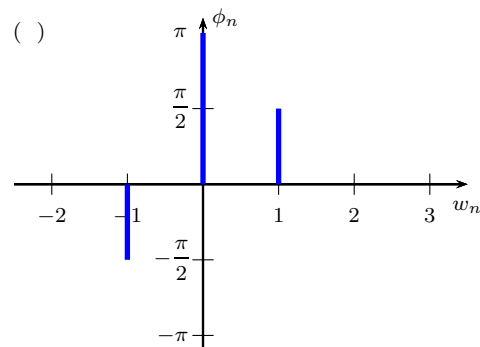
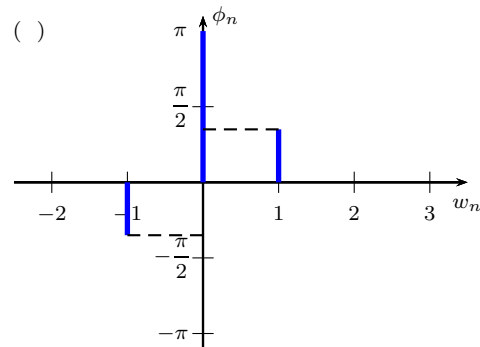
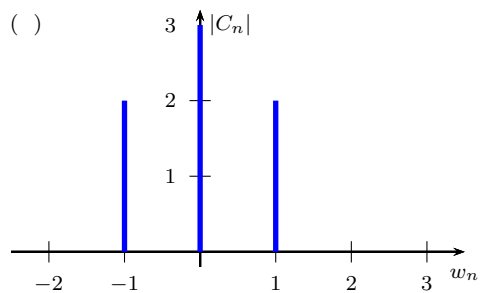
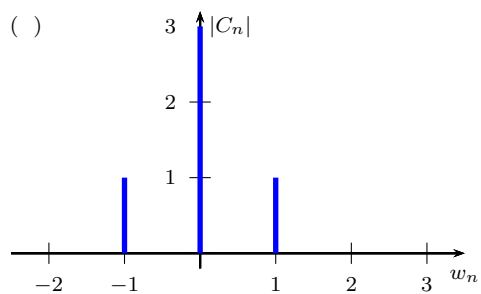
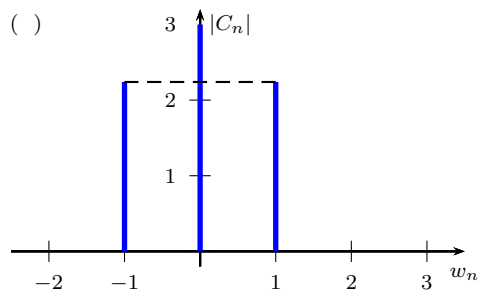
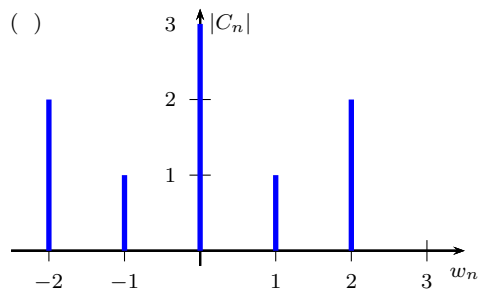
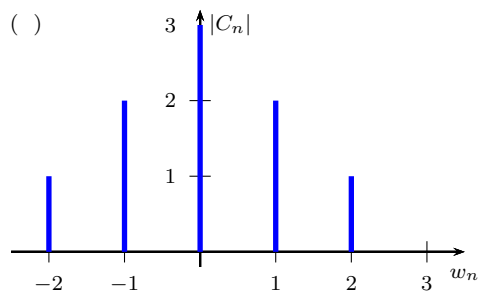
Identidades Trigonômicas:

$\cos(x) \cos(y) = \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2}$
$\sin(x) \sin(y) = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$
$\sin(x) \cos(y) = \frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{2}$

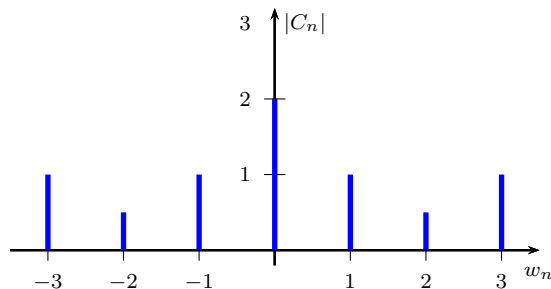
Integrais:

$\int x e^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2} (\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} \left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x) dx = \frac{\cos(\lambda x) + \lambda x \sin(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x \sin(\lambda x) dx = \frac{\sin(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Assinale as alternativas que melhor representam os diagramas de espectro de amplitude e fase da função $f(t) = -3 + 2 \cos(t) - 4 \sin(t)$ (amplitude na primeira coluna e fase na segunda).



• **Questão 2** (1.0 ponto) Dado o diagrama de espectro de amplitude de uma função periódica $f(t)$, marque as alternativas que representam, respectivamente, o módulo do valor médio e a potência média da função $\left(\left|\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt\right| \text{ e } \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt\right)$.



Valor Médio

- 0
- 0.5
- 1
- 1.5
- 2
- 2.5
- 3

Potência Média

- 11.5
- 10
- 8.5
- 6
- 4.5
- 3
- 0.5

• **Questão 3** (1.0 ponto) Calcule as transformadas de Fourier das funções $f(t) = e^{-2|t|}$ e $g(t) = e^{-2|t|} \cos(3t)$, $a > 0$, respectivamente.

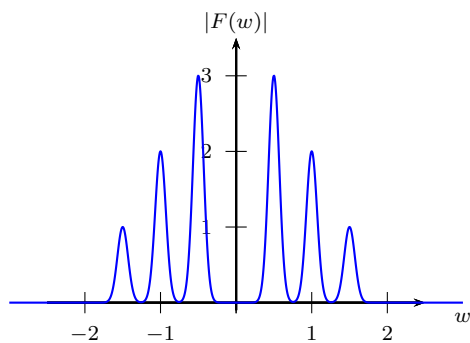
$\mathcal{F}\{f(t)\}$

- $\frac{1}{w^2 + 2}$
- $\frac{2}{w^2 + 2}$
- $\frac{2}{w^2 + 4}$
- $\frac{4}{w^2 + 4}$
- $\frac{4}{w^2 + \sqrt{2}}$
- $\frac{8}{w^2 + 4}$
- $\frac{2}{w^2 + 1}$

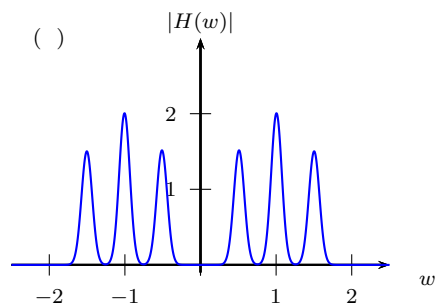
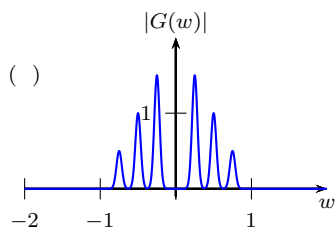
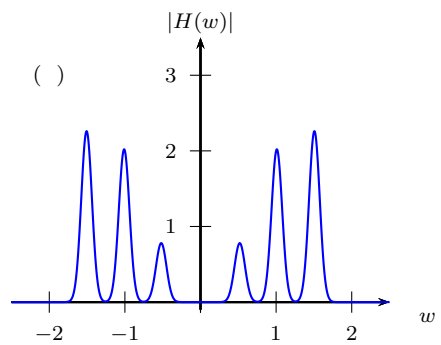
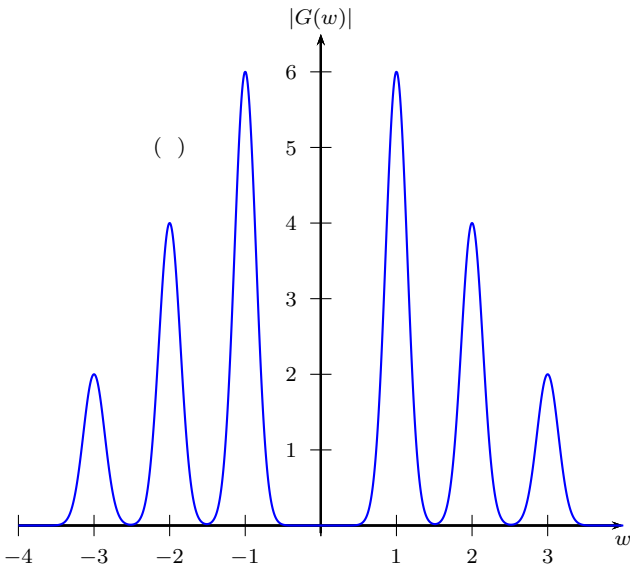
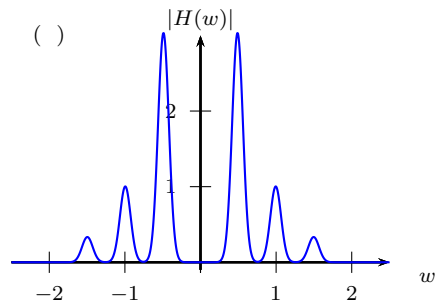
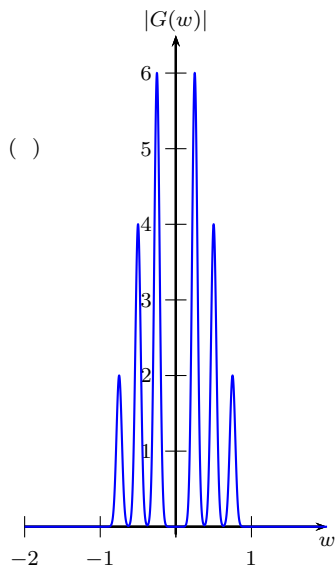
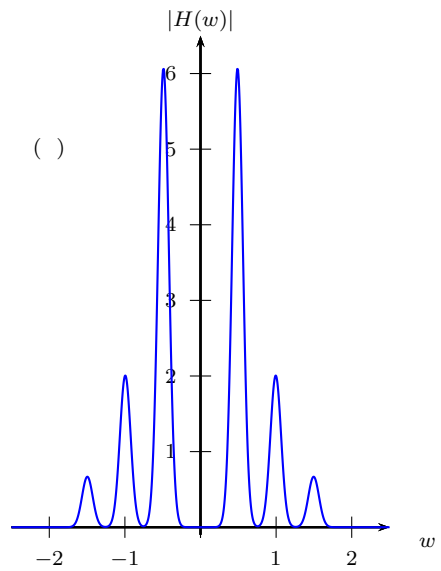
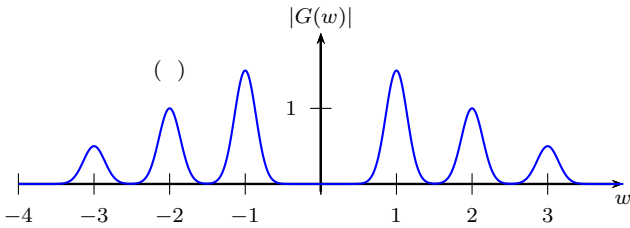
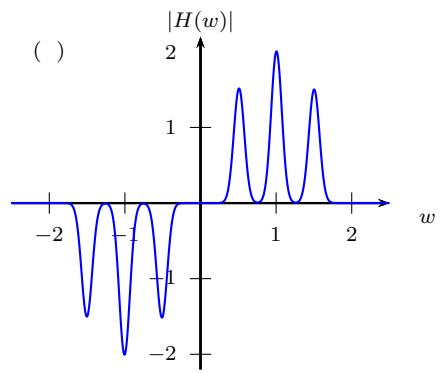
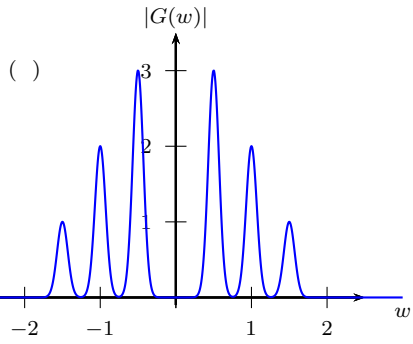
$\mathcal{F}\{g(t)\}$

- $\frac{2}{(w-3)^2 + 4} + \frac{2}{(w+3)^2 + 4}$
- $\frac{2}{(w-3)^2 + 4}$
- $\frac{2}{(w+3)^2 + 4}$
- $\frac{4}{(w-3)^2 + 4} + \frac{4}{(w+3)^2 + 4}$
- $\frac{2}{(w-3)^2 + 2} + \frac{2}{(w+3)^2 + 2}$
- $\frac{2}{(w-2)^2 + 3} + \frac{2}{(w+2)^2 + 3}$
- $\frac{2}{(w-3)^2 + \sqrt{2}} + \frac{2}{(w+3)^2 + \sqrt{2}}$

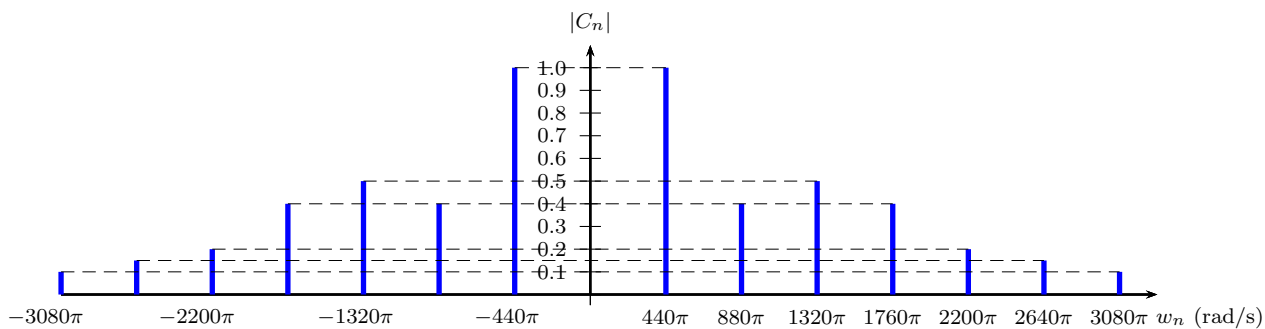
• **Questão 4** (1.0 ponto) Considere o diagrama de espectro de magnitudes de uma função $f(t)$ dado no gráfico abaixo ($\mathcal{F}\{f(t)\} = F(w)$). Assinale as alternativas que representam os diagramas de espectro de magnitudes de $g(t) = f(2t)$ e $h(t) = f'(t)$, respectivamente.



Assinale as respostas da questão 4 nesta página: $G(w)$ na coluna à esquerda e $H(w)$ à direita.



• **Questão 5** (1.0 ponto) Considere uma aproximação discreta do diagrama de espectro de uma nota tocada por um instrumento musical e representado por uma função periódica $f(t)$:



Marque a resposta que indicam as notas que melhor aproximam à do sinal $f(t)$ e à do sinal $f(-3t)$, respectivamente.
 [Lembrete: $2\pi \text{ rad/s} = 1 \text{ Hz}$].

Nota tocada por $f(t)$

- Lá da escala 2
- Lá da escala 3
- Dó da escala 2
- Dó da escala 3
- Sol da escala 2
- Sol da escala 3

Nota tocada por $f(-3t)$

- Dó da escala 2
- Ré da escala 1
- Si da escala 6
- Mi da escala 5
- Mi da escala 4
- Mi da escala 3

- **Questão 6** (3.0 pontos) Considere a função $f(t) = |\text{sen}(2\pi t)|$ e responda as questões abaixo.
 - a) (0.5) Calcule a frequência e o período fundamental de $f(t)$
 - b) (1.5) Calcule a forma trigonométrica da série de Fourier de $f(t)$
 - c) (1.0) Esboce as primeiras raias dos diagramas de espectro da série de Fourier de $f(t)$.

- **Questão 7** (2.0 pontos) Considere a seguinte equação da onda:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = e^{-|x|}, & -\infty < x < \infty, \\ u_t(x, 0) = 0, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

- a) (1.0) Aplique a transformada de Fourier na equação diferencial para concluir que

$$\mathcal{F}\{u(x, t)\} = F(k) \cos(kt),$$

onde $F(k) = \mathcal{F}\{e^{-|x|}\}$.

- b) (1.0) Calcule a transformada inversa usando a expressão do item anterior para concluir que a solução da equação diferencial dada é

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(e^{-|x+t|} + e^{-|x-t|}).$$